Marek Wolf[1]

Prawo Zipfa, samopodobieństwo i muzyka

W latach trzydziestych George Kingsley Zipf, nauczyciel języka niemieckiego na uniwersytecie Harvarda, odkrył dziwną prawidłowość [1], [2]. Policzył on mianowicie częstotliwość występowania rożnych słów w języku angielskim. Najczęściej występującemu słowu "the" przypisał numer $n = 1$, następnemu z kolei słowu "and" liczbę $n = 2$, "of" przypisał $n = 3$ itd. Gdy wykreślił zależność liczby wystąpień słowa $h(n)$ w funkcji kolejnego numeru, czyli gdy zrobił histogram, otrzymał praktycznie idealną hiperbolę:

$$h(n) \sim 1/n^{\beta}, \tag{1}$$

gdzie $\beta \approx 1$. Potem okazało się, że podobne zależności zachodzą też dla innych języków, przy czym wykładnik β jest praktycznie niezależny od języka i przybiera wartości w pobliżu 1. A więc wykres liczby wystąpień słów w języku opisane jest jedną z najpiękniejszych krzywych: hiperbolą. Następnie podobny charakter zależności stwierdzono także dla innych wielkości. Np. zależność między liczbą mieszkańców a liczbą określającą miejsce na liście kolejnych miast uporządkowanych według wielkości także jest opisana relacją potęgową [7], [3]. Liczba przedsiębiorstw o obrotach zawartych w danym przedziale rośnie jak odwrotność miejsca na liście uporządkowanej według wartości tychże obrotów [3]. Także liczba trzęsień ziemi rośnie od największych do najsłabszych w sposób potęgowy. W 1990 roku K.J.Hsü i A.J Hsü [5] odkryli zależność potęgową liczby kolejnych nut odległych od siebie o i półtonów od tejże wielkości i. Dokładniej, jeśli F oznacza względną częstotliwość wystąpienia interwału o długości i półtonów (tzn. $i = 0$ dla prymy, $i = 1$ dla małej sekundy, ..., $i = 8$ dla oktawy), to materiał doświadczalny pozwolił stwierdzić istnienie zależności:

$$F \sim i^{D}. \tag{2}$$

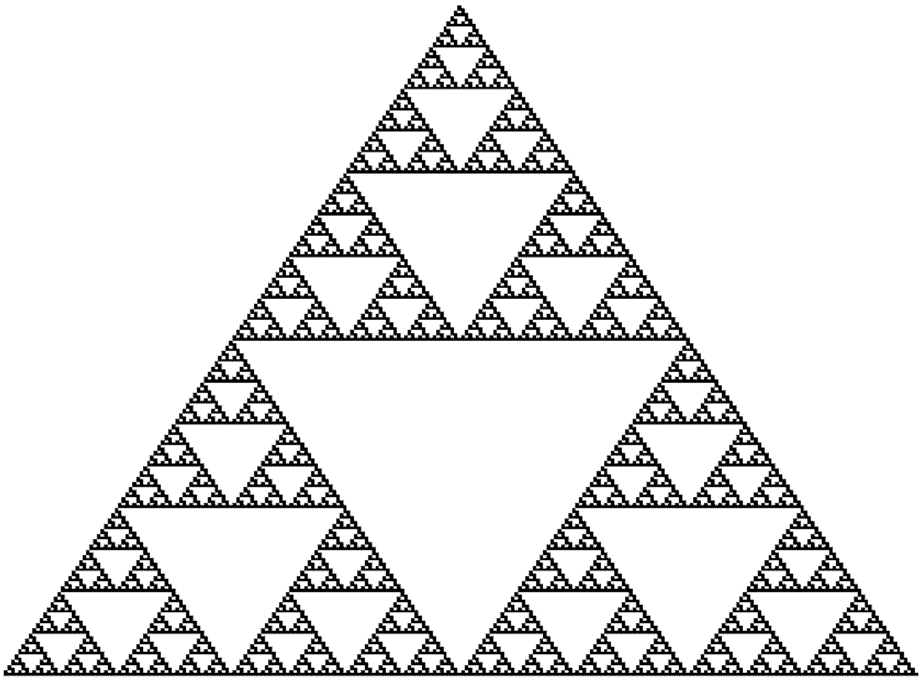
Chociaż autorzy ci nie wspomnieli o tym, odkryta przez nich zależność potęgowa podobna do (1) może być także uważana za przejaw prawa Zipfa. Parametr D dla analizowanych utworów wahał się pomiędzy 1.34 dla toccaty $fis - moll$ Bacha (BWV 910) poprzez 1.73 dla sonaty $F - dur$ Mozarta (KV 533) do 2.42 dla Invention nr 1 $C - dur$ Bacha (BWV 772). Dla utworów Stockhausena komponującego współczesną muzykę nie podlegającą klasycznym regułom, punkty $(\log(F), \log(i))$ nie leżały na linii prostej i dlatego nie ma sensu wprowadzenie indeksu D.

Takie uniwersalne występowanie w różnych zagadnieniach prostej zależności potęgowej wydaje się być spowodowane jakąś głęboką przyczyną. Jedną z prób wyjaśnienia prawa Zipfa dla języka podjął Benoit Mandelbrot tworząc hierarchiczny model języka [4], p. też [2]. Następnie zajmował się on między innymi stworzeniem matematycznego opisu ruchu kursów akcji na giełdzie

[1]Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Wrocławsk, pl. M. Borna 9, 50-204 Wrocław

[8]. Te badania doprowadziły ostatecznie Mandelbrota po wielu latach do wprowadzenia pojęcia fraktali [9] i swego rodzaju rewolucji w fizyce [10].

Mandelbrot wywodzi pochodzenie słowa fraktal (po polsku powinno się raczej mówić fraktał, analogicznie do słów funkcjonał, minerał, chorał, itd.) od łacińskiego przymiotnika *fractus*, co oznacza "złamany", "niecałkowity" (w domyśle: wymiar). Nie sposób podać tutaj ścisłej defincji tych obiektów, gdyż po pierwsze matematycy używają kilku różnych definicji fraktali, a po drugie w każdej z nich występują bardzo trudne pojęcia i dlatego nie nadają się do przytoczenia w popularnym wykładzie. W 1983 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Warszawie Mandelbrot powiedział [11]: *Nie ma dobrej i ścisłej definicji fraktala, ponieważ ciągle jeszcze nie rozumiemy dostatecznie głęboko tego pojęcia* i w innym miejscu *Chociaż ścisłość jest istotą matematyki, w moim wykładzie uniknąłem definicji pojęcia fraktal.*



Rys.1 Uszczelka Sierpińskiego.

W skrócie można powiedzieć, że fraktal jest figurą samopodobną, wykazującą niezmienniczość względem transformacji skalowania. Geometria, której uczono nas w szkole, operowała regularnymi figurami: liniami prostymi, trójkątami, okręgami, sześcianami, wielościanami foremnymi — żaden z tych obiektów nie jest fraktalem, gdyż w przeciwieństwie do nich ma on całkowity wymiar odpowiednio równy 1, 2 lub 3. Figura geometryczna zasługująca na miano fraktala musi być dostatecznie nieregularna (ale nie po prostu czysto losowa), dziurawa, a także być w pewien sposób piękna i na pierwszy rzut oka powinna przyciągać uwagę i intrygować swoją — czasem barokową — strukturą. Charakterystyczną cechą fraktali są potęgowe związki albo równania, ktorych przykładem są (1) lub (2) wyrażające własność nazywaną przez fizyków skalowaniem. Co to jest skalowanie? Upraszczając nieco sprawę można powiedzieć, że ze skalowaniem mamy do czynienia wówczas, gdy jedna wielkość zależy od drugiej w sposób potęgowy. Prostym tego przykładem jest kwadrat lub koło. W obu wypadkach pole powierzchni zależy od rozmiarów liniowych figury w sposób potęgowy z wykładnikiem równym 2: *pole kwadratu*= L^2, *pole okręgu*= πr^2. Dla fraktali odpowiednie wykładniki są liczbami niecałkowitymi, co wiąże się z ich "dziurawą" strukturą. Są one obiektami samopodobnymi, tzn. nie zmieniają charakteru kształtu podczas oglądania ich powiększeń („przeskalowań"): część jest podobna do innej części lub do całości.

Rysunek 1 przedstawia uszczelkę Sierpińskiego. Została ona zaproponowana w 1916 roku w pracy [12] dla potrzeb topologii, a obecnie jest chyba jednym z najczęściej przywoływanych przykładów fraktali. Uszczelka Sierpińskiego powstaje z wyjściowego trójkąta równobocznego na drodze rekurencyjnego wyjmowania trójkąta opartego w środkach boków trójkąta wyższego rzędu; usuwany trójkąt ma dwukrotnie zmniejszony bok. Sierpiński udowodnił mianowicie, że każdy zwarty jednowymiarowy zbiór na płaszczyźnie można odwzorować homeomorficznie na podzbiór jego uszczelki, tzn. że "trójkąt" z rysunku 1 jest w sensie topologicznym uniwersalnym jednowymiarowym zbiorem na płaszczyźnie. Na przykład, odcinek można odwzorować homeomorficznie po prostu na jeden z boków uszczelki Sierpińskiego. Usuwanie trójkątów powoduje zmniejszanie powierzchni zajmowanej przez uszczelkę i w granicy ma ona zerowe pole powierzchni. Aby znaleźć odpowiednie prawo skalowania dla uszczelki Sierpińskiego, powiążemy liczbę N_k odcinków składających się na uszczelkę na k–tym etapie rekurencji z ich długością ϵ_k. Na początku ($k = 0$) mamy trójkąt równoboczny o bokach 1, więc $N_0 = 3, \quad \epsilon_0 = 1$. Po wykonaniu pierwszej rekurencji otrzymujemy 3×3 odcinki, każdy o boku $\frac{1}{2}$. Następnie w każdym z 3 trójkątów wyjmujemy środkowe trójkąty, co powoduje powstanie dodatkowych 3×3 odcinków o długości $\frac{1}{2^2}$. Zauważamy, że:

$$N_k = 3^k, \qquad \epsilon_k = \frac{1}{2^k}.$$

Stąd mamy $N_k = \epsilon_k^{-\ln 3/\ln 2}$, a więc wymiar fraktalny uszczelki Sierpińskiego wynosi $D_f = \ln 3/\ln 2 \approx 1.585\ldots$. Biorąc dowolny fragment struktury z rys.1 i powiększając go o odpowiednią potęgę 3, możemy doprowadzić do dokładnego pokrycia się fragmentu z całą strukturą (proszę pamiętać, że proces wybierania trójkątów przebiega do nieskończoności).

Klasyczne fraktale wykazują własność samopodobieństwa ze względu na zmienne przestrzenne. Jednak zjawiska przyrodnicze obok rozciągłości przestrzennej przebiegają w czasie. Jak się okazuje, dla wielu wielkości, będących funkcją czasu również ma miejsce skalowanie. Przykładem jest właśnie muzyka i równanie (2). Odkrycie związków typu (2) pozwoliło na używanie komputerów do automatycznego komponowania muzyki. Jednak pierwsze użycie komputerów do tworzenie "sztucznej" muzyki miało miejsce długo przed odkryciem skalowania w utworach. Mianowicie w latach pięćdziesiątych, zaraz po zbudowaniu pierwszych komputerów, prekursorami w dziedzinie pisania programów komponujących muzykę byli dwaj Amerykanie: Lejaren Hiller i Leonard Isaacson [13]. Pierwszym utworem skomponowanym przez komputer Illiac była suita *Illiac* na kwartet smyczkowy. Ciekawe uwagi na temat tego utworu poczynił znany polski kompozytor Krzysztof Meyer w [14]. Te próby dały początek CAC: Computer Aided Composititon (komputerowo wspomaganemu komponowaniu, analogicznie do CAD: Computer Aided Design, czyli komputerowo wspomaganemu projektowaniu, konstruowaniu), p. [15], [16]. Zwróćmy uwagę na zasadniczą różnicę między literaturą a muzyką: mimo że występowanie słów w tekstach literackich podlega regule (1), dokładnie odpowiadającej wzorowi (2), to nie znaczy to wcale, że komputer mógłby tworzyć utwory literackie. Można oczywiście zaprogramować reguły gramatyki lub ortografii i dodać wybieranie słów według rozkładu prawdopodobieństwa (1), lecz w wyniku tego otrzymamy bełkot: można tworzyć automatycznie bezsensowne zdania poprawne gramatycznie. Różnica polega na tym, że mowa przekazuje konkretną informację, natomiast muzyka nie niesie takiego bezpośredniego przekazu. Tym niemniej były podejmowane próby automatycznego tworzenia zdań albo nawet opowiadań. W [2] można np. znaleźć następujące zdanie otrzymane za pomocą prostego algorytmu: *Należy otworzyć okno i wietrzyć dużo wieczorem nocą rozkoszując się czystością swego mieszkania i bielą lśniącą zadowolenia* (przykład ze strony 335). Zauważmy przy okazji, że gra w szachy też daje się zautomatyzować, i to tak efektywnie, że w maju 1997 roku komputer IBM Big Blue wygrał mecz składający się z 6 partii z aktualnym mistrzem świata Garrym Kasparowem. Mogłoby to świadczyć o tym, że gra w szachy nie wymaga inteligencji. Jednak tak nie jest: komputer Big Blue przeglądał dziesiątki milionów pozycji w ciągu sekundy, podczas gdy człowiek w tym samym czasie analizuje co najwyżej 2-4 ruchy naprzód. I właśnie w tym przejawia się inteligencja: rzut oka na szachownicę pozwala wytrawnemu mistrzowi od razu skupić się tylko na kilku obiecujących posunięciach, podczas gdy "tępa" maszyna musi analizować prawie wszystkie możliwe ruchy i za każdym razem obliczać wartość otrzymanej pozycji za pomocą odpowiedniej funkcji oceniającej.

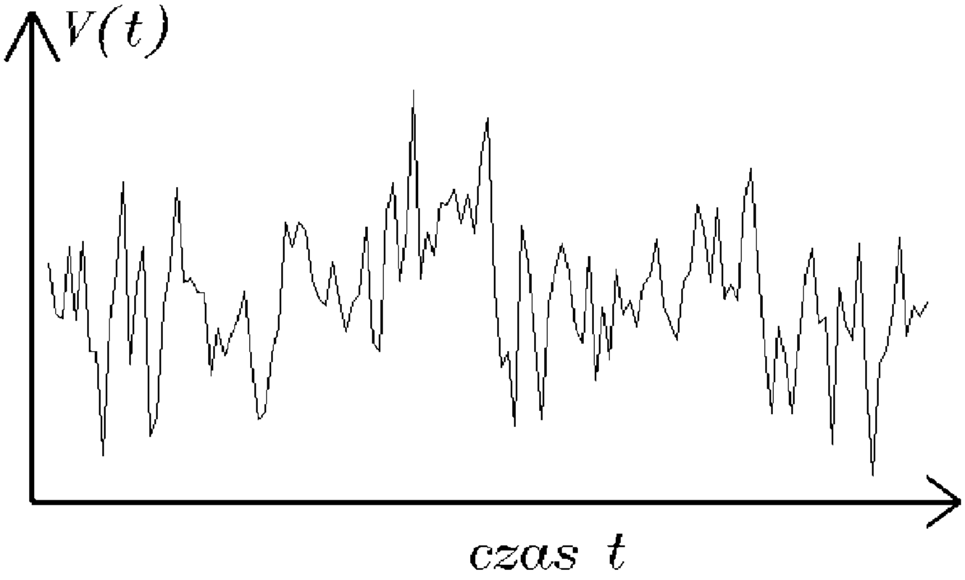
Według mnie bardziej głęboką strukturę w utworach muzycznych aniżeli wzór (2) odkryli w 1975 roku Richard Voss i John Clark [17], p. też [22]. Wzór (2) opisuje niejako "lokalne" własności muzyki, gdyż dotyczy korelacji między dwoma kolejnymi dźwiękami. Natomiast w pracy [17] przeprowadzono analizę "globalną" całych utworów wyliczając tak zwane widmo mocy. Poglądowo można wyjaśnić co to jest widmo mocy w następujący sposób: Dużą klasę funkcji zależnych od czasu (np. napięcie $V(t)$ przyłożone do elektromagnesu w głośniku) można przedstawić jako sumę drgań harmonicznych o częstotliwościach f i odpowiednich amplitudach $A(f)$. Typowy przebieg zależności $V(t)$ przedstawiono na rys. 2. Widmo mocy $S_V(f)$ mówi z grubsza ile energii w fali dźwiękowej emitowanej przez membranę głośnika pochodzi od drgań o częstości f. Bardziej formalna definicja oparta jest na rozkładzie Fouriera: Jeżeli funkcja $V(t)$ spełnia określone warunki natury matematycznej, to daje się ona złożyć z podstawowych drgań sinusoidalnych (harmonicznych) o częstotliwościach f (Twierdzenie Fouriera):

$$V(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(f_k) e^{2\pi i k f t}, \qquad \text{gdzie} \quad f_k = 1/T, \quad i = \sqrt{-1} \tag{3}$$

Wielkość $\tilde{V}(f)$ nosi nazwę transformaty Fouriera funkcji $V(t)$. Wyraża ona zawartość ruchu o częstotliwości f w pełnej zależności od czasu wielkości $V(t)$. Widmo mocy $S_V(t)$ sygnału $V(t)$ (gęstość spektralna) zdefiniowana jest jako wielkość proporcjonalna do modułu (zespolonego) transformaty Fouriera:

$$S_V(f) \sim \mid \tilde{V}(f) \mid^2 . \tag{4}$$

W bardzo wielu zupełnie różnych sytuacjach [18] obserwuje się dla małych f zależność potęgową $S_V(f) \sim 1/f^\beta$, gdzie β jest bliskie jedności. Na przykład, zmienność w czasie natężenia prądu w lampach elektronowych, na złączu diodowym, w tranzystorach, liczba aut na autostradzie lub czekających na odprawę celną oraz zjawiska dźwiękowe i ludzka mowa mają gęstość spektralną typu $1/f$. R.F. Voss i J. Clarke odkryli, że również muzyka wykazuje szum $1/f$. Jak stwierdzili wymienieni autorzy, szum typu $1/f$ występuje prawie we wszystkich rodzajach melodii. Z wyjątkiem współczesnych kompozycji atonalnych K.Stockhausena lub E.Cartera, które przypominają biały szum ze stałą gęstością spektralną $S_V(f) \sim 1/f^0 = const$, utwory średniowieczne, Beethovena, Straussa czy Beatlesów wykazują zależność typu $1/f$. Ponieważ szum $1/f^\beta$ jest typowy dla zjawisk naturalnych, można powiedzieć, że muzyka imituje charakterystyczny sposób, w jaki zjawiska przyrodnicze przebiegają w czasie. Samopodobieństwo melodii przejawia się w tym, że nawet najmniejsza fraza przypomina całość w wypadku utworu klasycznego. Zarówno muzyka, jak szum $1/f^\beta$ zajmują pośrednie miejsce między szumem losowym (białym, $\beta = 0$), a klasycznym Brownowskim ruchem losowym ($\beta = 2$).



Rys.2 Losowy przebieg zależności napięcia *V(t)* od czasu t otrzymany za pomocą algorytmu użytego w programie zamieszczonym w Dodatku dla wartości $\beta = 0.25$.

Po odkryciu Vossa i Clarke pojawiła się możliwość automatycznego komponowania utworów muzycznych bez uciekania się do sztucznych reguł, takich jakich używali Hiller i Jacobsen albo opisanych w [15]. Robi się to niejako od tyłu: najpierw generuje się funkcję $V(t)$ o dyskretnym zbiorze wartości $V(k), k = 0, 1, \ldots, N$ mającej widmo mocy postaci $1/f^{\beta}$ o zadanym indeksie β, a następnie odwzorowuje się te wartości na dźwięki w gamie. Znanych jest kilka algorytmów pozwalających otrzymać proces $V(t)$ o zadanej wartości β. Jeden z nich został użyty w programie zamieszczonym w dodatku. Oparty jest on na metodzie kolejnych, losowych sumowań, p. [22]. Można mianowicie pokazać [22], że proces o gęstości spektralnej $1/f^{\beta}$ jest równoważny losowemu ruchowi Browna o wariancji:

$$var \mid V(t_1) - V(t_2) \mid \sim \mid t_1 - t_2 \mid^{2H}, \qquad \text{gdzie} \quad H = \frac{\beta - 1}{2}.$$

Aby wygenerować ruch o liczbie kroków N będącej zpotęgą 2, postępuje się w sposób rekurencyjny: Najpierw łączymy początkową $V(0)$ i końcową wartość $V(N)$ odcinkiem linii prostej. Następnie w połowie tego odcinka wartość $(V(0) + V(N))/2$ zmieniamy o losową wartość $delta$, będący zmienną o rozkładzie normalnym (jest to pętla **while** w programie głównym). Otrzymujemy teraz linię łamaną składającą się z dwóch odcinków. Teraz procedurę dzielenia odcinków na pół i losowego przesuwania stosujemy do dwóch odcinków i otrzymujemy łamaną 4 odcinki. Proces ten kontynuujemy rekurencyjnie aż otrzymamy łamaną zbudowaną z $N-1$ odcinków. Zmienną losową o rozkładzie Gaussowskim otrzymuje się ze zmiennej o rozkładzie jednostajnym korzystając z własności, że suma niezależnych od siebie wielkości ma rozkład normalny (**function Gauss** przed programem głównym). Zastosowany algorytm generuje zmienną losową $V(t)$ o liczbie elementów będącej potęgą 2, a więc melodia może się składać tylko z 2,..., 512, 1024, 2048,... dźwięków. Liczba tych dźwięków zadana jest stałą `Max` na początku programu i wiąże się ze stałą `Maks_poziom` równaniem $\texttt{Max} = 1 + 2^{\texttt{Maks\_poziom}}$. Czytelnik powinien wybrać wartość zmiennej `tempo` w zależności od szybkości używanego komputera i subiektywnych odczuć estetycznych oraz własnego temperamentu. Interesująca i przyjemna muzyka jest otrzymywana dla wartości parametru β rzędu $0.5 \div 1.3$ — dla większych wartości utwory są zbyt monotonne.

Powstało już wiele programów służących do komponowania muzyki fraktalnej. W internecie można znaleźć ponad tysiąc witryn oferujących albo kupienie płyty CD z muzyką fraktalną albo wprost programy komputerowe grające fraktalne utwory lub też pliki midi z samopodobną muzyką. Jako przykłady podaję następujące adresy:

http://www.vanderbilt.edu/VUCC/Misc/Art1/Sonify/Mandi.html

http://members.aol.com/strohbeen/fml.html

http://users1.ee.net/pmason/music.html

http://library.advanced.org/12740/html20/music/making.html

http://www.forwiss.uni-erlangen.de/~kinderma/musinum/musinum.html

http://www-ks.rus.uni-stuttgart.de/people/schulz/fmusic/

http://www.thinks.com/sounds/fractal.htm

http://www.geocities.com/SiliconValley/Haven/4386/

http://community.cc.pima.edu/users/larry/fracmus.htm

Chciałbym na zakończenie podkreślić, że poruszyłem zaledwie małą część zagadnień związanych z komputerowym tworzeniem muzyki i ograniczyłem się jedynie do samopodobnych metod. W pracach [20] [21] można znaleźć opisy utworów otrzymanych za pomocą układów dynamicznych. Były też próby odwzorowania bicia serca na zapis nutowy [19], a nawet Zachary Goldberger sprzedawał kasetę magnetofonową zatytułowaną "Melodie spod serca" zawierającą utwory, dla których wzorcem były elektrokardiogramy.

Dodatek

```
program  Muzyka_fraktalna_8_dzwiekami;
```

```
{$R-}
uses crt;
const
maks_poziom=10;
Max=1+1024;        (*      trunc(exp(maxlevel*ln(2)));     *)
var
beta,sigma,ff:real;
delta:array[1..maks_poziom] of real;
c,i,k,j,N,D,d2,poziom,tempo:integer;
V:array[0..Max] of real;
f:word;b:boolean;a:char;

function Gauss:real;
const
Nrand=6;
var
i:integer;
Add,Fac,suma:single;

begin
Add:=sqrt(3.0*Nrand);
Fac:=2.0*Add/Nrand;
suma:=0.0;
   for i:=1 to Nrand do suma:=suma+random;
Gauss:=Fac*suma-Add;
end;


begin           {      MAIN  PROGRAM     }
randomize;
clrscr;

write('beta=');
repeat readln(beta); until (beta>=0.0) and (beta<2.9);
writeln('tempo= adagio lub presto (a/p)');
repeat a:=readkey; until (a='a') or (a='A') or (a='p') or (a='P');

if (a='a') or (a='A') then tempo:=10000 else tempo:=5000;

if beta<>0.0 then sigma:=beta else sigma:=0.02;
for i:=1 to maks_poziom do
delta[i]:=sigma*exp(i*(beta-1.0)/2.0*ln(0.5))*sqrt(0.5)*
sqrt(1.0-exp((beta-3.0)*ln(2.0)));
N:=Max-1;
V[0]:=0.0;v[N]:=sigma*Gauss;
D:=N; d2:=D div 2;
```

```
poziom:=1;

while (poziom<=maks_poziom) do
   begin
      k:=(N-d2) div D;
      for j:=0 to k do begin
      i:=d2+j*D;
      V[i]:=0.5*(v[i-d2]+v[i+d2]); end;
      k:=N div d2;
              for j:=0 to k do begin
              i:=j*d2; v[i]:=v[i]+delta[poziom]*Gauss; end;
      D:=D div 2;
      d2:=d2 div 2;
      poziom:=poziom+1;
   end;

for i:=0 to Max do
begin
        ff:=abs(660*exp(v[i]/12.0*ln(2.0)));
        if (ff>65110) then f:=65000 else f:=round(ff);
        case f of
            1..467:sound(440);
          468..522:sound(495);
          523..568:sound(550);
          569..623:sound(586);
          624..696:sound(660);
          697..779:sound(733);
          780..852:sound(825);
          852..65111:sound(880);
        end;

for j:=1 to tempo do
begin b:=keypressed;if b then begin nosound;halt; end;end;

end;

nosound;

end.
```

References

[1] G.K. Zipf *Human Behaviour and the Principle of Least Effort* (Addison – Wesley Press, 1949)

[2] J.R. Pierce, *Symbole, sygnały i szumy* (PWN, Biblioteka Problemów, Warszawa, 1967)

[3] M.Gell–Mann, *Jaguar i kwark* (Wydawnictwo CIS, Warszawa 1996)

[4] B.Mandelbrot, "On the theory of word frequencies and on related markovian models of discourse" in Structure of Language and its Mathematical Aspects, Symposia in Applied Mathematics XII, R. Jakobsen, ed. (Am. Math. Soc., Providence RI, 1961), str. 190–219

[5] K.J.Hsü i A.J Hsü, *Fractal Geometry of Music*, Proc.Natl.Acad.Sci. USA, **87** (1990), str. 317–318

[6] B.Mandelbrot, "Structure formelle des textes et communication (deux etudes)" Word **10** (1954) str. 1–27; "On the theory of word frequencies and on related markovian models of discourse" w Structure of Language and its Mathematical Aspects, Symposia in Applied Mathematics XII, R. Jakobsen, ed. (Am. Math. Soc., Providence RI, 1961), str. 190–219

[7] B.Mandelbrot, "Very long–tailed probability distribution and the empirical distribution of city sizes" in: Mathematical Exploration in Behavioral Science (Cambria Pines CA, 1964), F.Massarik and Ph. Ratoosh, eds. (Irvin, Homewood IL,1965), str. 322–332

[8] B.Mandelbrot, *The variation of some other speculative prices*, J.Business Univ.Chicago **40**(1967), 393–413; B.Mandelbrot, H.M.Taylor, *On the distribution of stock prices differences*, Operations Res. **15** (1967), str. 1057–1062

[9] B.B.Mandelbrot, *Les object fractales* (Flammarion, Paris, 1975); ang. tłumaczenie *Fractals:Form, Chance, and Dimension*, (W.H.Freeman and Co., San Francisco, 1977); w 1982 roku opublikowano zmienione wydanie tej książki zatytułowane *The Fractal Geometry of Nature*, (W.H.Freeman and Co., San Francisco, 1982)

[10] J.Gleick, *Chaos. Narodziny nowej nauki*, (Zysk i S-ka, Poznań, 1996)

[11] B. Mandelbrot, *On Fractal Geometry, and a Few of the Mathematical Questions It Has Raised*, C.Olech, Z. Ciesielski, eds. Proc. Internat. Congress of Mathematicians (PWN, Warszawa 1984), t. II, str. 1681– 1675

[12] W. Sierpiński, *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue detoute courbe donee*, C.R.Acad.Paris, **162** (1916), str.629–632

[13] L. Hiller, L. Isaacson, *Experimental Music*, McGraw–Hill, Nowy Jork, 1959

[14] K. Meyer, "Kompozytor o "twórczości" komputerowej", FOTON **48** (1997), str. 26

[15] R. G. Zaripow, "Ob algoritmiczeskom opisanii processa soczinienia muzyki" Dokl. Akad. Nauk ZSRR **132** (1960) str. 1283–1286

[16] C.Dodge, C.R. Bahn, "Musical Fractals" Byte June 1986, str. 185–196;

[17] R.F.Voss, J.Clarke, *1/f noise in music and speech*, Nature, **258** (1975), s. 317; *1/f Noise in Music: Music from 1/f noise* J.Accoust.Soc.Am. **63**, (1978) str. 258–263

[18] D.Wolf, *Noise in Physical Systems*, (Springer, Heidelberg, Nowy Jork, 1978)

[19] H.E. Stanley *et al*, *Statistical Mechanics in Biology: how ubiquitous are long–range correlations?*, Physica **A205** (1994) str. 214–255

[20] J.P Boon and O. Decroly, *Dynamical systems theory for music dynamics* Chaos **5** (1995), str. 501–508; D. S. Dabby, *Musical variations from a chaotic mapping*, Chaos **6** (1996), str. 95–107

[21] A. Stasiewicz, *Brzmienie chaosu*, Enter, styczeń 1995, str. 91–94

[22] H.-O.Peitgen, H.Jürgens, D.Saupe *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, (Springer–Verlag, Nowy Jork, Berlin, Heidelberg, 1992)