

MODA NA FRAKTALE

Klasyczna geometria, stworzona przez starożytnych Greków, opiera się na prostych figurach: liniach, okręgach, trójkątach, wielokątach i innych figurach o prostym opisie. W przyrodzie jednak przeważają kształty nieregularne, że wspomnijmy tylko chmury, góry, drzewa, pioruny, paprocie, płatki śniegu, skały, galaktyki, i wiele innych. Klasyczna geometria jest bezsilna wobec takich obiektów. Brak jej języka, który mógłby służyć do ich opisu. Do wypełnienia pozostaje więc bardzo poważna luka, zwłaszcza że według definicji pozytywistycznej, zadaniem nauki jest dostarczanie języka, tzn. zbioru pojęć i reguł, służącego do opisu zjawisk.

W połowie lat siedemdziesiątych powstała jednak nowa dziedzina nauki - geometria fraktalna. Opisuje ona wiele skomplikowanych kształtów spotykanych w przyrodzie i mechanizm ich powstawania. Twórcą tej nowej gałęzi nauki jest Benoit Mandelbrot, jeden z największych współczesnych matematyków, profesor na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Yale i jednocześnie "nadworny" matematyk koncernu IBM, pracujący w centrum badawczym im. J. Watsona w Yorktown.

W 1975 r. ukazała się pierwsza z serii książek Mandelbrota o fraktalach "Les objets fractals: forme, hasard et dimension", a w 1977 r. jej rozszerzona wersja angielska "Fractals: form, chance and dimension". W 1982 r. opublikowano zmienione wydanie tej książki zatytułowane "The Fractal Geometry of Nature".

Dopiero jednak w ostatnim dziesięcioleciu nastąpił burzliwy rozwój tej dziedziny, łączący na styku matematyki i fizyki. Niewątpliwie do zainteresowania się fraktalami przyczynił się także rozwój komputerów, szczególnie wzrost ich możliwości, niższe ceny i coraz powszechniejsza dostępność. Wielu czytelników Computer-Worlda widziało zapewne fraktale lub nawet zmuszało swoje komputery do ich rysowania choćby dla zaspokojenia zainteresowań natury estetycznej. Są one bowiem zbiorami o wyjątkowym pięknie, a

tym, że mają one "dziurawą" strukturę. Są więc obiektami samopodobnymi, tzn. nie zmieniają charakteru ani kształtu podczas oglądania ich powiększeń; część jest podobna do całości lub innej części. Wszystkie je można podzielić na dwie grupy - fraktale deterministyczne i losowe. Ich otrzymywanie związane jest z powtarzaniem (iterowaniem lub rekurencją) równań albo pewnych przepisów. I tak zbiór Mandelbrota to zbiór takich liczb zespolonych, dla których ciąg liczb zespolonych otrzymywanych przez iterowanie równania:

$$z(n+1) = z^2(n) + c, z(0) = 0$$

jest zbieżny. Ponieważ w powyższym przepisie nie występują zmienne losowe, zbiór Mandelbrota jest fraktalem deterministycznym. Można pokazać, że gdy moduł liczby zespolonej z przekroczy 2, ciąg $z(n)$ jest rozbieżny. Będąc kolorowe fraktale otrzymuje się zaznaczając piksel odpowiadający parametrowi c kolorem o numerze równym tej wartości n, dla której $z(n)$ wykroczyło poza okrąg o promieniu 2. Tak otrzymane fraktale nie mają jednak zbyt wiele wspólnego z rzeczywistością.

Tymczasem zainteresowanie fizyków fraktalami bierze się głównie stąd, że wiele z nich ma swoje "odbicia" w realnym świecie. Ważnym tego przykładem są tzw. zlepki (ang. cluster), otrzymywane poprzez zlepianie się błędzących losowo cząstek (ang. Diffusion-Limited Aggregation, w skrócie DLA). Model ten został zaproponowany w 1981 r. przez amerykańskich fizyków Sanderę i Wittena, a ich praca ukazała się na łamach renomowanego czasopisma "Physical Review Letters". W ciągu 10 lat od momentu pojawienia się ich pracy, DLA stało się obszerną dziedziną badań, której poświęcono już wiele konferencji i na temat której napisano już kilka książek. Istnieje wprawdzie wiele wariantów idei Sanderę i Wittena, tutaj jednak przedstawimy jej oryginalną wersję.

Wyobraźmy sobie dużą (w ścisłym sformułowaniu matematycznym modelu - nieskończoną)

tryczny ruch losowy, tzn. idzie do jednego z czterech najbliższych sąsiednich węzłów z prawdopodobieństwem 1/4. Cząstka błądzi tak długo, dopóki nie dotknie obwodu zarodka, tzn. jednego z czterech pustych węzłów wokół niego. Po jego dotknięciu cząstka przylepia się na stałe i w ten sposób tworzy zlepki złożony z dwóch cząstek. Proces ten jest powtarzany wiele razy - błędnie zaczyna trzecia cząstka i wędruje po sieci tak długo, aż dotrze do obwodu, obecnie złożonego już z 6 punktów. Następnie wypuszczamy 4 cząstkę, itd. Wydawać by się mogło, że cząstki pozlepiają się, tworząc kształt zbliżony do kwadratu. Okazuje się jednak, że najbardziej prawdopodobnym rezultatem jest nieregularna i intrygująca figura taka, jak pokazano na rys. 1.

Dla teoretycznego opisu zlepków dysponujemy jedynie współrzędnymi cząstek i cała teoria powinna być przez nie wyrażona. W początkowym okresie, gdy generowane zlepki nie były duże, stwierdzono, że liczba cząstek $N(R)$ wewnątrz okręgu o promieniu R wykazuje (po uśrednieniu) własność skalowania, tzn. zależy od R w sposób potęgowy:

$$N(R) \sim R^D, D \approx 1.7 \quad (1)$$

Zauważmy, że dla typowych figur geometrycznych zależność "masy" (powierzchni lub objętości) od rozmiarów jest też potęgowa, lecz z wykładnikiem będącym liczbą naturalną równą wymiarowi przestrzeni. Np. dla koła lub kwadratu wykładnik jest równy 2, zaś dla kuli lub sześcianu wynosi 3. Liczba $D \approx 1.7$, występująca w powyższym wzorze jest nazywana wymiarem fraktalnym i dlatego właśnie można powiedzieć, że fraktal to taki obiekt, którego wymiar jest liczbą niecałkowitą.

Na rys. 1 widzimy też inną własność fraktali, np. samopodobieństwo, przejawiające się w tym, że część fraktala jest podobna do całości lub innej części po odpowiednim "rozciągnięciu". Gdy w 1985 r. udało się "ulepić" zlepki złożone z mniej więcej miliona cząstek, okazało się, że zależność (1) przestaje obowiązywać przy dużych R: wymiar fraktalny maleje w miarę rozrastania się fraktala, a zlepki stają się bardziej regularne i podobne do krzyża o ramionach skierowanych wzdłuż osi sieci. W związku z naruszeniem prawa skalowania, wymiar fraktalny nie jest wielkością dobrze określoną. Obecnie istnieje przekonanie, że łamanie prawa skalowania związane jest z małą symetrią sieci kwadratowej i dlatego przy dużym R zlepki zaczynają przypominać krzyż. W międzyczasie wprowadzono modyfikację oryginalnego modelu Wittena i Sanderę, polegającą na zastąpieniu sieci dyskretnej przez ciągłą płaszczyznę, którą można obracać o dowolne kąty (sieć kwadratowa jest nie zmiennicza tylko względem obrotów o wielokrotność kąta prostego). W modelu "pozasieciowym" ("off-lattice") ruch losowy przypomina proces dyfuzji: losowany jest kąt przesunięcia i jego długość. Przylepienie następuje wtedy, gdy cząstka zbliży się do innej o mniej niż "e", gdzie e jest liczbą mniejszą od 1. Oczywiście fakt, że "e" nie może być w komputerze dowolnie małe, jest w pewien sposób równoważny wprowadzeniu sieci. Niemniej dla zlepków wygenerowanych poza siecią prawo skalowania jest spełnione aż do N rzędu kilku milionów.

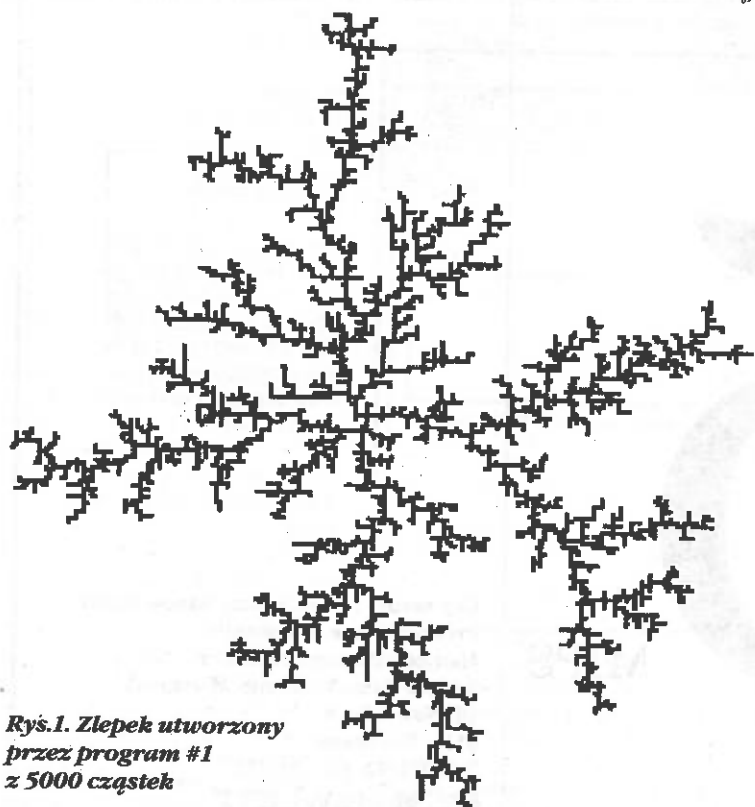
Zainteresowanie modelem DLA spowodowane jest uniwersalno-

ścią tego modelu. Twory o kształtach podobnych do widocznych na rys. 1. były obserwowane przez chemików, biologów i geologów.

Prostą realizacją doświadczalną fraktalnego wzrostu jest w procesie elektrolizy osadzanie się jonów metalu na katodzie. Tworzy się w tym procesie fraktal podobny do zlepka z rys. 1. Zapewne podobne procesy doprowadziły w zamierzonej przeszłości do utworzenia na skałach wapiennych, znajdowanych przez geologów, dendrytów manganu lub innych metali do złudzenia przypominających zlepki. Niektóre metale krzepną tworząc rozgałęzione struktury podobne do zlepka z rys. 1. Dlatego "rozebranie" na części pierwsze takich procesów stwarza ogromne możliwości technologicznych zastosowań do produkcji wytrzymałych materiałów.

Również długie łańcuchy tworzą w pewnych warunkach struk-

Pomimo wielu prób liczba ta jednak nie została dotychczas wyznaczona teoretycznie, stąd też brak jest pełnej teorii DLA. Obecnie wiadomo jednak, że zlepki DLA są przykładem ogólniejszych struktur zwanych multifraktalami, do opisu których konieczna jest cała rodzina wymiarów fraktalnych, numerowana ciągłym parametrem. Zlepki pokazany na rys. 1. składa się z 5000 cząstek i został wygenerowany przez załączony program #1 na komputerze z procesorem 486 i koprocesorem (25 MHz) w ciągu 40 minut. Najbardziej czasochłonne jest błędzenie cząstki. Dlatego też w przeszłości stosowano różne wybiegi, mające na celu przyspieszenie symulacji. W załączonym programie nałożono okresowe warunki na ruch losowy. Oznacza to, że odbywa się on na ograniczonym kwadracie, przy czym cząstka "wpadająca" z niego pojawia się po przeciwległej stronie. Napisanie

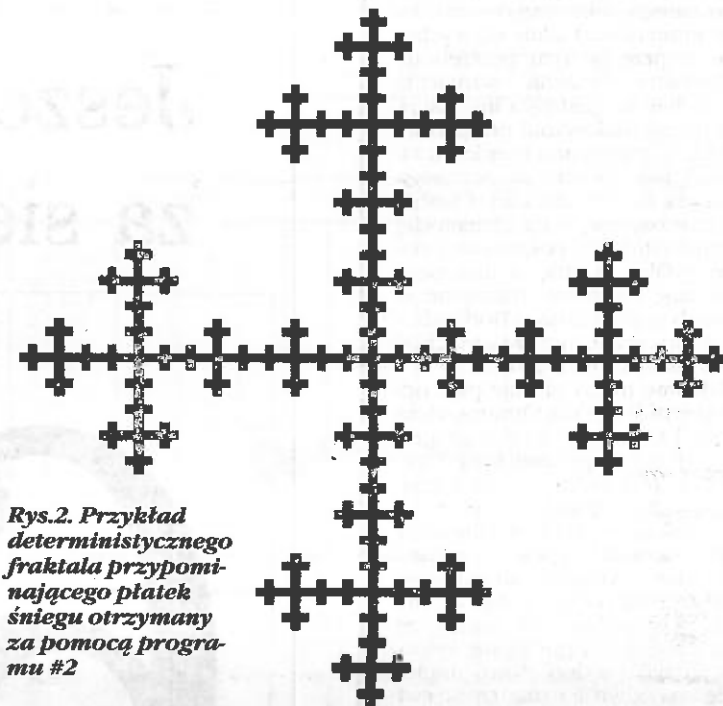


Rys. 1. Zlepki utworzony przez program #1 z 5000 cząstek

ich kształt zdaje się naśladować tajemnicę przyrody. Znacznie jednak łatwiej uzyskać fraktale na monitorze niż zdefiniować je jako nową dziedzinę wiedzy i wytyczyć obszar jej zastosowań.

Fraktale to obiekty o niecałkowitym wymiarze, co wiąże się z

dwuwymiarową dyskretną płaszczyzną (kwadratową sieć), na której wybrano jeden z węzłów i umieszczono w nim cząstkę. Ten wybrany węzeł jest zarodkiem, z którego komputer "wychodowić" ma zlepki. Następnie z daleka startuje cząstka i wykonuje syme-



Rys. 2. Przykład deterministycznego fraktala przypominającego płatki śniegu otrzymany za pomocą programu #2

tury fraktalne. Francuski fizyk de Gennes, laureat Nagrody Nobla za 1991 r., w stworzonej przez siebie teorii polimerów posługiwał się pojęciami wymiaru fraktalnego. Najczęściej jednak z obiektami o rozgałęzionej budowie, jak np. korzenie roślin i drzew, neurony, naczyniówka w siatkówce oka, niektóre mitochondria, spotykają się biologowie. Strukturę fraktalną mają płuca, paprocie i kalafior.

W 1987 r. Nittman i Stanley opublikowali pracę prezentującą wyniki komputerowych symulacji płatków śniegu, opartą na modelu będącym modyfikacją DLA. Zmieniając pewien parametr byli oni w stanie wygenerować różnorodne kształty płatków (dotychczas nie zaobserwowano dwóch identycznych płatków śniegu - prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest rzędu 10 do potęgi kilku milionów!). Załączony tutaj program #2 pozwala narysować rekurencyjnie figurę będącą przybliżeniem płatków śniegu (p.rys. 2), choć trzeba dodać, że metoda użyta przez Nittmana i Stanleya była zupełnie inna.

Dodajmy też jeszcze, że powierzchnię Księżyca pokrywają kraterami o bardzo różnej średnicy, przejawiające własność samopodobieństwa. Zdjęcia krajobrazu księżycowego wykonane z ekranu komputera wraz z odpowiednim algorytmem można także znaleźć w książce Mandelbrota. Nie sposób również nie dostrzec podobieństwa gałęzi z rys. 1. do piorunów pojawiających się na niebie w czasie burzy. Fizycy przeprowadzili odpowiednie symulacje komputerowe takich wyładowań. Otrzymały struktury, dla których liczba zajętych pikseli zależy od rozmiaru błyskawicy w sposób potęgowy z wykładnikiem równym mniej więcej 1.7.

efektywnego programu, generującego bardzo duże zlepki, nie jest bynajmniej trywialnym zagadnieniem. Dużo czasu zabiera sam proces błędzenia. Dla przyspieszenia, cząstki, znajdującej się z dala od zlepka, można pozwolić wykonywać dłuższe skoki. Również sprawdzanie, czy n-ta cząstka dotknęła zlepka, wymaga porównania współrzędnych (n-1) cząstek, co dla dużych n zajmuje sporo czasu. Można dokonywać tylko 4 porównań z użyciem macierzy boolowskiej, jak w załączonym programie #1, ale wtedy dla dużych sieci pojawią się problemy z wielkością pamięci komputera.

Stąd też warto chyba przytoczyć uzyskane w tej dziedzinie kolejne rekordy. W 1983 r. Paul Meakin wygenerował zlepki złożony z 10000 cząstek na komputerze VAX-11/780 w ciągu 20 godzin. W dwa lata później Ball i Brady na IBM 3081 w ciągu 10 minut utworzyli zlepki o $N = 100\,000$. Aktualny rekord dla symulacji poza siecią należy do Petera Ossadnika z Niemiec, który na początku 1991 roku na Sun Sparc-workstation wygenerował zlepki o $N = 6\,000\,000$ w ciągu 6 dni. Kilka lat temu autor niniejszego artykułu "ulepił" na poczciwym ZX Spectrum zlepki składający się z 3000 cząstek w ciągu 46 godzin za pomocą programu napisanego w Hi-Soft Pascalu, używając sztuczek assemblerowych.

Mam nadzieję, że ten krótki przegląd pozwolił Czytelnikowi przekonać się o znaczącej roli fraktali w rozwoju współczesnej nauki. Niektórzy twierdzą nawet, że jesteśmy świadkami trzeciej, po teorii względności i mechanice kwantowej, tym razem fraktalowej rewolucji w fizyce dwudziestego stulecia.

PROGRAM #1 - Turbo Pascal 6.0

```

program DLA;
{$R-}
uses graph,crt;
const
  liczba_czastek=5000;
  dlugosc=228;
type
  plaszczyna=array [0..dlugosc,0..dlugosc] of boolean;
  punkt=record x,y:byte end;
  punkty=array [1..liczba_czastek] of punkt;

var
  grupa_czastek, krok,m,n,x,y: integer;
  warunek:boolean;
  i:array [0..dlugosc] of integer;
  zszansa: comp;
  wspolrz:punkty;
  fiwspolrz:file of punkty;
  siec : plaszczyna;
  nazwa : string [17];

function szansa:extended; { generator liczb losowych }
const
  a:comp=1203248318.0; c:comp= 2147483647.0 ;
var
  rzec: extended;
begin
  zszansa:= a*zszansa;
  rzec:= zszansa/c;
  zszansa:=zszansa-c*Trunc(rzec);
  szansa:= zszansa/c;
end;

procedure poczatek;
begin
  krok:=1;
  randomize; zszansa:=trunc( 2147483647.0*random);
  grupa_czastek:=liczba_czastek div 16; { kolejna grupa
  przyleplonych czastek bedzie zaznaczona innym kolorem; pozwoli
  to zaobserwować, ze wzrost zlepka zachodzi glownie
  w zewnetrznych obszarach, a "fjordy" sa ekranowane. }
  for n:=1 to dlugosc-1 do i[n]:=n;
  i[0]:=dlugosc-1; i[dlugosc]:=1;

  for m:=0 to dlugosc do
  for n:=0 to dlugosc do
  siec[m,n]:=false;

  siec[dlugosc div 2,dlugosc div 2]:=true;
  putpixel(dlugosc div 2,dlugosc div 2,white);
end;

procedure wypusc_czastke;
var
  los :integer;
begin
  los:=1+trunc(random(4));

  case los of
  1 : begin x:=1+trunc(random(dlugosc-1));y:=1;end;
  2 : begin x:=dlugosc-1;y:=1+trunc(random(dlugosc-1));end;
  
```

```

3 : begin x:=1+trunc(random(dlugosc-1));y:=dlugosc-1;end;
4 : begin x:=1;y:=1+trunc(random(dlugosc-1));end;
end;
end;

procedure grafika;
var
  sterownik,tryb:integer;
begin
  detectgraph(sterownik,tryb);
  sterownik:=detect;
  initgraph(sterownik,tryb,'C:\TURBO\BGI');
  setgraphmode(1);
end;

procedure dotknij;
begin
  if siec[x+1,y] then warunek:=true else
  if siec[x-1,y] then warunek:=true else
  if siec[x,y+1] then warunek:=true else
  if siec[x,y-1] then warunek:=true;
end;

procedure ruch;
var
  los:byte;
begin
  los:=1+trunc(szansa*4.0);
  case los of
  1 : begin x:=x+krok;y:=i[x];end;
  2 : begin x:=x-krok;y:=i[x];end;
  3 : begin y:=y+krok;y:=i[y];end;
  4 : begin y:=y-krok;y:=i[y];end;
end;
{putpixel(x,y,white); (* ta instrukcja pozwala zobaczyc ruch losowy*) }
end;

begin { **** PROGRAM GLOWNY **** }

  grafika;
  poczatek;

  for n:=1 to liczba_czastek do
  begin
  warunek:=false;
  wypusc_czastke;
  repeat
  ruch;
  dotknij;
  until warunek;
  putpixel(x,y,1+n div grupa_czastek);
  wspolrz[n].x:=x;wspolrz[n].y:=y;
  siec[x,y]:=true;
  end;

  nazwa:='dla2.wsp';
  assign(fiwspolrz,nazwa);rewrite(fiwspolrz);
  write(fiwspolrz,wspolrz);close(fiwspolrz);

  closegraph;

end.

```

PROGRAM #2 - Turbo Pascal 6.0

```

program sniezynka;
uses graph,crt;

type
  punkt=record x:integer;
             y:integer
           end;

var
  l:integer;
  a:punkt;

procedure platek(a:punkt;h:integer);
{ ***** procedura rekurencyjna ***** }
var
  aa:punkt;
  i,n:integer;
begin
  if h>1 then
  begin
  aa.x:=a.x+h div 3;aa.y:=a.y+0;
  platek(aa,h div 3);
  aa.x:=a.x+2*h div 3;aa.y:=a.y+h div 3;
  platek(aa,h div 3);
  aa.x:=a.x+h div 3;aa.y:=a.y+2*h div 3;
  platek(aa,h div 3);
  aa.x:=a.x+0;aa.y:=a.y+h div 3;
  platek(aa,h div 3);
  aa.x:=a.x+h div 3;aa.y:=a.y+h div 3;
  end
  else
  begin
  for i:=1 to 1000 do begin end; { spowolnienie }
  putpixel(a.x,a.y,1);
  end;
end;

procedure grafika;
var
  sterownik,tryb:integer;
begin
  detectgraph(sterownik,tryb);
  sterownik:=detect;
  initgraph(sterownik,tryb,'C:\TURBO\BGI');
  setgraphmode(1);
end;

begin { PROGRAM GLOWNY }
  grafika;

  a.x:=2;
  a.y:=2;
  writeln('1 musi byc potega liczby 3, tzn. l=3, 9, 27, 81, 243,...');
  readln();
  platek(a,l);

  repeat until keypressed;
end.

```

Marek Wolf

Od redakcji: wszystkim, którzy przysła nam swoje dyskiety lub przyjdą do redakcji (po uzgodnieniu telefonicznym) jesteśmy gotowi udostępnić kody źródłowe publikowanych programów.



AGENCJA HANDLOWA
 Wrocław, ul. Św. Antoniego 2/4
 tel. (71) 350-51 do 55
 fax: 362-25

SALONY KOMPUTEROWE

ZESTAWY KOMPUTEROWE
 AT 286, 386, 486, MONO, COLOR

DRUKARKI
 STAR, CITIZEN, SEIKOSHA

AKCESORIA
 myszy, kable, acary, tasm, filtry, pudełka, joysticki, podstawki
 i wiele innych drobiazgów.

DYSKIETKI
 Verbatim, Dysan, Precision, Basf, Nashua

OPROGRAMOWANIE
 Borland[®], Microsoft[®], Wordperfect[™], Central Point Software[™], Symantec[™]

LITERATURA I CZASOPISMA

ZAPRASZAMY
 PRZYJDŹ, ZOBACZ, NA PEWNO COS KUPISZ

Wrocław
 ul. Olawska 16
 tel./fax (71) 312 27

Leszno
 ul. Westerplatte 15
 tel./fax (65) 20 25 06

Kalisz
 ul. Pułaskiego 6
 tel./fax: 772 49

Stoisko K&K
Wrocław
 ul. Ralska 37
 / IV piętro /

Bolesławiec
 ul. Daszyńskiego 16
 tel./fax: 65 52

Czynny od
 7.02.92
Wrocław
 ul. Św. Antoniego 2/4
 tel./fax (71) 350-51 do 55

ZAPRASZAMY
 PRZYJDŹ, ZOBACZ, NA PEWNO COS KUPISZ

NOWE SALONY JUŻ WKRÓTCE
 OSTROW WLKP., LUBIN i inne

ZADZWOŃ - INFORMACJE SZEGÓŁOWE O CENACH I ASORTYMENTYCE UZYSKASZ W DOWOLNYM SALONIE