Metody matematyczne fizyki, Lista dodatkowa

1. *Wzory Winograda.* Sprawdzić, że można wykonać mnożenie dwóch liczb zespolonych $a+bi$, $c+di$

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + i(bc+ad)$$

za pomocą 3 mnożeń rzeczywistych:

$$P1 = ac, \qquad P2 = bd, \qquad P3 = (a+b)(c+d),$$

$$ac - bd = P1 - P2, \qquad , ad + bc = P3 - P2 - P1.$$

2. Przedstawić w postaci $a+bi$ następujące liczby zespolone:

$$(3+4i)(2-i) + (-5-7i)(-2-3i), \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad (1-i)^2, \quad \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$
$$\frac{2-i}{3+4i}, \quad (1+i)(1-i) + (-1+i)(-1-i), \quad \frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}.$$

3. Wyznaczyć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

$$(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i, \quad \frac{1+yi}{x-2i} = 3i - 1, \quad \frac{x+yi}{x-yi} = \frac{9-2i}{9+2i}$$

4. Znaleźć pierwiastki kwadratowe z liczb: $2i$, $2+i$, $-1+3i$, $5-12i$.

5. Rozwiązać równania w ciele liczb zespolonych:

$$z^2 = i, \quad z^2 - z = -1, \quad z^2 - 6z + 13 = 0, \quad z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0.$$

6. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające:

$$\overline{z} = z^2, \quad \frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\overline{z}}, \quad 2z + \overline{z} = 6 - 5i,$$

$$i\overline{z} + (1-2i)z = 3 + i, \quad z\overline{z} + z - \overline{z} = 5 + 2i, \quad i(z+\overline{z}) + i(z-\overline{z}) = 2i - 3.$$

7. Wyznaczyć wszystkie wartości $\sqrt[3]{1}$.

8. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby zespolone: $1, -2, i, -3i, 1+i, \sqrt{3}-i, -2+2i, 1-(2+\sqrt{3})i, 1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3}), 2+\sqrt{3}+i$.

9. Pokazać, ze $(a+bi)/(a-bi)$ ma moduł 1 bez obliczania tego ilorazu.

10. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażeń: $\sqrt{1+i}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[5]{-i}$

11. Obliczyć: $(2\sqrt{3}-2i)^{30}, (\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i})^{100}, (1-i)^{50}(\sqrt{3}+i)^{60}, \frac{2i^3(1-i)^{15}}{-3(-i)^5(-1+i\sqrt{3})^9}, \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

12. Wyrazić:

    (a) $\cos 3x$ przez funkcję $\cos x$

    (b) $\sin 3x$ przez funkcję $\sin x$

(c) $\sin 4x$ przez funkcje $\sin x$ i $\cos x$

(d) $\operatorname{ctg} 5x$ przez funkcję $\operatorname{ctg} x$

13. Wykorzystując wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego obliczyć:

$$a) \quad 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx, \quad \text{gdzie} \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad 1 + \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx \quad \text{gdzie} \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

14. Znaleźć obraz odcinka $[0, \pi]$ na osi urojonej y przy odwzorowaniu $f(z) = e^z$.

15. Skomentować rozumowanie: ponieważ $1 = (-1) \cdot (-1)$ więc $\sqrt{1} = 1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$ czyli $1 = -1$.

16. Zbadać ciągłość funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określonych dla $z \neq 0$ w następujący sposób:

$$a) \quad f(z) = \frac{\Re e(z)}{1 + |z|}, \qquad b) \quad f(z) = \frac{\Re e(z^2)}{z^2}, \qquad c) \quad f(z) = \frac{(\Re e(z^2))^2}{z^2}.$$

a dla $z = 0$ równych zero.

17. Sprawdzić, że równość $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ zachodzi też dla liczb zespolonych.

18. Wyprowadzić równość:

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).$$

19. Zbadać, dla jakich z funkcje $\sin(z)$, $\cos(z)$ oraz $\operatorname{tg}(z)$ przybierają wartości: $a)$ czysto rzeczywiste, $b)$ czysto urojone.

20. Skomentować przekształcenia: $(-z)^2 = z^2$, $\ln((-z)^2) = \ln(z^2)$, $\ln(-z) + \ln(-z) = \ln(z) + \ln(z)$, $2\ln(-z) = 2\ln(z) \Rightarrow \ln(-z) = \ln(z)$. W szczególności $\ln(-1) = \ln(1) = 0$. Czy dla liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzi $\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$?

21. Dla funkcji $f(z) = z^2 + 2z$ sprawdzić równania Cauchy–Riemanna. To samo dla $f(z) = z^3$.

22. Wyliczyć całkę $\int_L |z| dz$ jeśli $a)$ $L = [-i, i]$, $b)$ L jest lewym półokręgiem łączącym i z $-i$.

23. Wyznaczyć wartość całki $\int_O \frac{e^z dz}{z^2 + a^2}$ wzdłuż okręgu O o środku w $(0,0)$ i promieniu $2a$.

24. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości całki $\int_L \frac{e^z dz}{z(z^2 - 1)}$, gdzie L jest krzywą zamkniętą nie przechodzącą przez punkty $0, \pm 1$.

25. Za pomocą residuów wyliczyć całki:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + a\cos(\theta))^2} = \frac{2\pi}{(1 - a^2)^{3/2}},$$

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x) dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}, \qquad (a > 0)$$

26. Obliczyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx.$$