Szeregi i transformata Fouriera

J. Fourier odkrył, że z grubsza nie ma innych funkcji okresowych niż sinus (i cosinus). Mianowicie, niech $f(x+2\pi) = f(x)$ będzie funkcją okresową o okresie 2π. Spróbujmy przedstawić $f(x)$ w postaci szeregu

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big) \tag{1}$$

Aby wyznaczyć a_0 całkujemy obie strony (1) po x od $-\pi$ do π. Z powodu okresowości $\sin(x)$ i $\cos(x)$ dostajemy:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Aby dostać wyrażenie na a_n, b_n, $n \geqslant 1$ mnożymy obie strony (1) najpierw przez $\cos(kx)$ a potem przez $\sin(kx)$ i całkujemy po x od $-\pi$ do π. Korzystając z dobrze znanych wzorów

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

dostajemy:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \tag{3}$$

Można też całkować przez części, ale to jest więcej roboty. Ścisły dowód: Tw. 5.4 w Byron F.W., Fuller R.W. Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej t.1. Proszę zauważyć, jak dostaje się zbieżność jednostajną: 4 nierówność od góry (i od dołu) na str. 233— prawa strona nierówności nie zależy od x.

Uwaga: *Matematycy mogą protestować, że powyższe rozumowania nie są ścisłe, ale pewnie właśnie tak były pierwotnie przeprowadzone.*

Pytanie 1: Jak się upraszczają powyższe wzory, gdy $f(-x) = f(x)$ albo $f(-x) = -f(x)$? Zrobić zadanie 1 z listy zadań 3.

Pytanie 2: Zastanowić się, jak powyższe wzory się zmienią, gdy okres nie jest 2π lecz $2T$: $f(x+2T) = f(x)$. Odpowiedź: Byron F.W., Fuller R.W. Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej t.1, wzory (5.58).

Proszę postarać się zrobić zadania 6–10 z listy 2 (umieściłem właśnie poprawioną wersję). Jaki jest okres funkcji $f(x) = \{x\}$ w zadaniu 10? Na stronie wykładu **http://pracownicy.uksw.edu.pl/mwolf/MMF/** są animacje zbieżności szeregów Fouriera dla $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ i funkcji schodkowej $\theta(x)$ (zad.9 lista 2). Zadanie $8b$ to znany problem **Problem bazylejski**

Gdy funkcja $f(x)$ nie jest okresowa, można powiedzieć, że okres $2T$ jest nieskończony. Wtedy dostaje się transformatę Fouriera, Byron F.W., Fuller R.W. Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej t.1, §5.7, wzory (5.61). Tam jest heurystyczne wyprowadzenie tych wzorów. Sa dowody transformaty Fouriera długie i krótkie. Krótki dowód można znaleźć w **książce prof. Marcinkowskiej**: tw. 1.1 na str. 61–63. Długi dowód jest w ciekawej **książce D. Bensona *Music: a Mathematical Offering***, paragraf 2.14 (pdf jest za darmo).

Pewna wersja transformaty Fouriera (dyskretna transformacja kosinusowa) jest używana w procesie kodowania MP3. Transformata Fouriera jest stosowana przy obrazowaniu w tomografii jądrowego rezonansu jądrowego, w niektórych systemach ustawiania odległości (focus) w aparatach fotograficznych. W praktyce stosuje się algorytm szybkiej transformaty Fouriera (ang. Fast Fourier Transform, FFT).

Marek Wolf ‘