Operatory w przestrzeni Hilberta

Niech H_1 oraz H_2 będą dwiema przestrzeniami Hilberta. Funkcje liniowe z podzbioru przestrzeni H_1, nazywanego dziedziną, w przestrzeń H_2 nazywamy operatorami. W praktyce fizycznej (mechanika kwantowa) mamy najczęściej do czynienia z sytuacją, że $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = \mathrm{H}$. Operator liniowy A spełnia warunek:

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y}$$

dla każdej pary wektorów $\vec{x}, \vec{y}$ z dziedziny $\mathcal{D}(A) \subsetneqq H$ operatora A i dowolnych liczb zespolonych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Często operator oznacza się "daszkiem" nad literą: $\hat{A}$. Zbiór $\mathcal{L}(H)$ operatorów liniowych działających w przestrzeni H też jest przestrzenią liniową z naturalną definicją:

$$(\alpha A + \beta B)\vec{x} = \alpha A\vec{x} + \beta B\vec{x}$$

Na algebrze zapewne było pojęcie operatorów liniowych działających między dwiema przestrzeniami wektorowymi skończenie wymiarowymi $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$. W tym przypadku operatory liniowe są reprezentowane (w pewnej bazie) przez macierze. Przykładem operatora działającego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej $L_2(\mathbb{R})$ funkcji $f(x)$ całkowalnych z kwadratem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx < \infty$$

jest operacja różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}f(x).$$

Operator A może posiadać operator doń sprzężony oznaczany mieczykiem † po prawej u góry $A^\dagger$ zdefiniowany wzorem

$$(A^\dagger\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}) \tag{1}$$

dla każdej pary wektorów $\vec{x}, \vec{y}$ z dziedziny $\mathcal{D}(A)$ operatora A. Zadanie: sprawdzić, że $(A^\dagger)^\dagger = A$. Specjalną rolę w mechanice kwantowej odgrywają operatory hermitowskie (samosprzężone): $A^\dagger = A$, zob. np. **pl.wikipedia.org/wiki/Operator_samosprzężony**.

Czasem udaje się dla danego operatora A znaleźć takie wektory ψ_n, że działanie tego operatora na te wektory polega tylko na mnożeniu ich przez pewne liczby λ_n, tzn. zmianie długości tych wektorów. Takie zagadnienie opisuje równanie

$$A\psi_n = \lambda_n\psi_n.$$

Powyższe równanie to tzw. zagadnienie własne dla operatora A, np. **tutaj**, wektory ψ_n to wektory własne, liczby λ_n to wartości własne. Zadanie: pokazać, że wartości własne λ_n operatora hermitowskiego są rzeczywiste.

Równanie własne odgrywa podstawową rolę w mechanice kwantowej, gdzie wielkościom fizycznym odpowiadają operatory samosprzężone, które mają rzeczywiste wartości własne, np. poziomy energetyczne jakiegoś układu fizycznego. Dla oscylatora harmonicznego w jednostkach $m = \hbar = \omega = 1$ zagadnienie na wartości własne hamiltonianu ma postać:

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\psi_n(x) = (n + \tfrac{1}{2})\psi_n(x) \tag{2}$$

gdzie

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a $H_n(x)$ to wielomiany Hermite'a:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right).$$

Dla ochotników: sprawdzić, że faktycznie zachodzi (2). Cztery klasyczne prace Erwina Schrödingera, które zapoczątkowały "falowe" sformułowanie mechaniki kwantowej, nosiły tytuł *Quantisierung als Eigenwertproblem I, II, III, IV*, czyli "Kwantowanie jako problem wartości własnych I, II, III, IV". **Tutaj** można znaleźć angielskie tłumaczenie tych fundamentalnych prac, za które Schrödinger dostał Nagrodę Nobla. Dyskusję zagadnienia (2) można znaleźć na stronach 30–32.

Ewolucja w mechanice kwantowej opisana jest przez operatory unitarne, tzn. takie, które nie zmieniają iloczynu skalarnego:

$$(U\vec{x}, U\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Korzystaj z definicji (1) pokazać, że operator unitarny spełnia

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1},$$

gdzie $\mathbb{1}$ to operator jednostkowy ("tożsamościowy") w przestrzeni Hilberta H: $\mathbb{1}\vec{x} = \vec{x}$ dla każdego $\vec{x} \in H$. Dla ochotników: **ogólna postać operatorów unitarnych**.

Zadania są na listach 7 i 8. Dużo frajdy daje zrobienie zadania 9 z listy 7:

Niech

$$H = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{i}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \tag{3}$$

Pokazać, że unitarna transformacja:

$$\widetilde{H} = e^{\frac{i}{2}xy} H e^{-\frac{i}{2}xy} \tag{4}$$

przeprowadza H w

$$\widetilde{H} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4} xy \tag{5}$$

Rozwiązanie zajmuje mniej niż $\frac{1}{2}$ kartki A4: trzeba prawą stroną (4) podziałać na funkcję $f(x)$ i korzystać ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji. Skraca się dużo wyrazów i zostaje prawa strona (5). Podobnie robi się zadanie 6 z listy 8. Algebra Virasoro odgrywa pewną rolę w modnych teoriach strun.

Ja się tych rzeczy uczyłem 45 lat temu z książki Byrona i Fullera, jest na **stronie wykładu**, §3.10 i rozdziały 4 i 5. Można też zajrzeć **tutaj** albo poszukać w internecie.