$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt \right] \hat{g}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \hat{g}(k) e^{ikx} dk$$

cbdo.

Sens fizyczny:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \qquad z = \dot{x} + i\omega x, \quad \dot{z} - i\omega z =$$

$$= \ddot{x} + i\omega\dot{x} - i\omega\dot{x} + \omega^2 x = \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t)$$

Energia $E(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m |z(t)|^2$

Niech oscylator dla $t \to$ spoczywa. Obliczymy energię przekazaną przez siłę $F(t)$

$$\int_{T_1}^{T_2} (\dot{z} - i\omega z) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{m} \int_{T_1}^{T_2} F(t) e^{-i\omega t} dt = \qquad \int u v' dt = uv - \int u' v dt$$

lewa strona

$$L = \int (\dot{z} - i\omega z) e^{-i\omega t} dt = z e^{-i\omega t} \Big|_{T_1}^{T_2} - \int_{T_1}^{T_2} z \cancel{(-i\omega e^{-i\omega t})} dt - \cancel{i\omega \int_{T_1}^{T_2} z e^{-i\omega t} dt} =$$

$$= z(T_2) e^{-i\omega T_2} = \frac{1}{m} \int_{T_1}^{T_2} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad , 0 > T_1 \longrightarrow -\infty; \ z(T_1) \text{ i } F(T_1) \text{ znika}$$

$$\Delta \mathcal{E} = \lim_{T_2 \to \infty} \frac{m}{2} |z(T_2)|^2 = \lim_{T_2 \to \infty} \frac{m}{2} \left| e^{i\omega T_2} \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{T_2} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 = \frac{1}{2m} |\hat{f}(\omega)|^2, \quad \text{tutaj } \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$$

2π jest teraz w $F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dt$

Przekaz energii następuje tylko przy częstości rezonansowej ω

1. $f(x) = x$ na $(-\pi, \pi)$: $x = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}\right) \\ 0 \text{ przy } x = \pm\pi \end{cases}$

$a_k = 0$

2. $f(x) = x^2$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} \quad \text{dla } x \in [-\pi, \pi]$$

dla $x = 0$: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots\frac{1}{k^2}+\dots=\sigma$, $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\dots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\dots=\sigma_1$

to otrzymujemy: $\sigma=\sigma_1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\dots=\sigma_1+\frac{1}{4}\sigma \Rightarrow$

więc: $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots=\sigma_1-\frac{1}{4}\sigma=$ $\Rightarrow \sigma_1=\frac{3}{4}\sigma$

$=\frac{1}{2}\sigma=\frac{1}{12}\pi^2 \Rightarrow \sigma=\frac{\pi^2}{6}$, czyli $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$

$\sigma_1=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\dots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\dots=\frac{\pi^2}{8}$

Dowód tw. (*) ze str. 5:

$a_n'=nb_n$, $b_n'=-na_n$, $a_0'=0$

nierówność Bessela: $(f,f)\geq\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2$

$$(f',f')\geq\pi\left[\frac{a_0'^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'+b_n')^2\right)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)$$

Tw. (kryterium Cauchy'ego)

ciąg f. $h_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[a,b]$, jeżeli dla $\forall\varepsilon>0$ istnieje takie $N(\varepsilon)$, że dla $\forall k>N$ i $l>N$ i $x\in[a,b]$ zachodzi $|h_k(x)-h_l(x)|<\varepsilon$!

Niech $S_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{p=1}^{\infty}a_p\cos px+\sum_{p=1}^{\infty}b_p\sin px$

$p\to k$

$$|S_n-S_m|=\left|\sum_{p=m+1}^{n}(a_p\cos px+b_p\sin px)\right|=\left|\sum_{p=m+1}^{n}\frac{1}{p}(pa_p\cos px+pb_p\sin px\right|\leq$$

$$\leq\sqrt{\sum_{p=m+1}^{n}\frac{1}{p^2}\sum_{p=m+1}^{n}|pa_p\cos px+pb_p\sin px|^2}$$

nierówność Schwarza: $|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|$;

z nierówności Bessela $\left|\left(x,\frac{y}{\|y\|}\right)\right|^2\leq\|x\|^2 \Rightarrow |(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|$