jest dołączonym wielomianem Legendre'a. Harmoniki (funkcje) sferyczne:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad m\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r'^l}{r^{l+1}}\frac{4\pi}{(2l+1)}Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta',\varphi')$$

wzór ten rozdziela odległości iloczyny f. od $\vec{r}$ i $\vec{r}\,'$ zamiast $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r})=4\pi\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left[\int Y_{lm}(\theta,\varphi)r'^l\rho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,'\right]\frac{Y^*_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}}$$

$$\rightarrow q_{lm}=\int Y_{lm}(\theta',\varphi')r'^l\rho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,' \leftarrow \text{momenty multipolowe}$$

Równanie falowe:

$$\Box G(x,x')=\delta^{(4)}(x-x'), \qquad \Box=(\quad), \quad \delta^4=\delta(x_0-x_0')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$G(x,x')=G(x-x') \leftarrow$ w nieobecności powierzchni ograniczających.

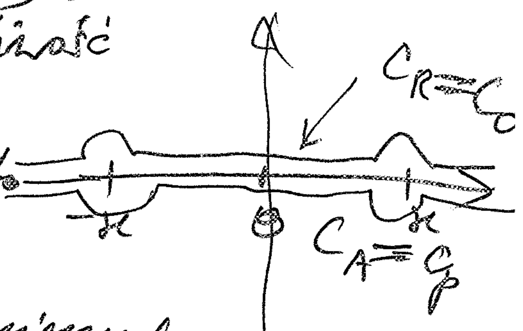
$$\Rightarrow \Box G(z)=\delta^4(z) \qquad G(z)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\tilde{G}(k)e^{-ikz}d^4k$$

$$\delta^4(z)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikz}d^4k \Rightarrow \tilde{G}(k)=-\frac{1}{k_\mu k^\mu}=-\frac{1}{k^2} \qquad kz=k_0z_0-\vec{k}\cdot\vec{z}$$

$$\Rightarrow G(z)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{-ikz}}{k\cdot k}d^4k$$

osobliwość

$$G(z)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{z}}\int_{-\infty}\frac{e^{-ik_0z_0}}{k_0^2-\underbrace{\vec{k}^2}_{\varkappa^2}}dk_0$$



Dla $z_0>0$ f. podc. $e^{-ik_0z_0}$ rośnie nieograniczenie w górnej półpłaszczyźnie — musimy zamknąć kontur w dolnej półpłaszczyźnie.

Dla $C_R=C_0$: dla $z_0<0$ całka znika, bo trzeba zamknąć kontur w górnej półpłaszczyźnie, a nie obejmuje osobliwości. Dla $z_0>0$ mamy

$$\oint_{C_R} \frac{e^{-ik_0 z_0}}{k_0^2-\varkappa^2}\, dk_0 \underset{\uparrow}{=} -2\pi i\left(f(\varkappa)+f(-\varkappa)\right) = \ldots = -\frac{2\pi}{\varkappa}\sin(\varkappa z_0)$$

bo kontur obchodzimy w złym kierunku!

$$G(z) = \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{z}}\,\frac{\sin(\varkappa z_0)}{\varkappa}\, d^3\vec{k} = \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3}\int_0^\infty k^2 dk \,\sin|\vec{k}| z_0 \,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{1}{k}\int_0^\pi \sin\theta_k \, d\theta_k \int_0^{2\pi} e^{ikz\cos\theta_k}\, d\varphi_k = \left(u=\cos\theta\right) =$$

$$= \frac{\Theta(z_0)}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \sin k z_0 \, dk \int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{ikzx} = \frac{1}{2\pi^2 z}\int_0^\infty \sin k z_0 \sin kz\, dk$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 z}\int_{-\infty}^{\infty} \sin kz \sin kz_0\, dk = \frac{1}{8\pi^2 z}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos k(z-z_0) - \cos k(z_0+z)\right] dk$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

ale $\frac{1}{2\pi}\int \cos xk\, dk = \delta(x)$

$$\Rightarrow\quad G(z) = \frac{1}{4\pi z}\left[\delta(z-z_0) - \underbrace{\delta(z+z_0)}_{=0}\right]\Theta(z_0)$$

$$R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$$

$$\underset{\text{opóźnione}}{G_R(x-x')} = \frac{\Theta(\overset{t-t'}{x_0-x_0'})}{4\pi R}\left[\delta\left(|\vec{r}-\vec{r}\,'| - c(t_0-t_0')\right) - \underbrace{\delta\left(|\vec{r}-\vec{r}\,'| + c(t_0-t_0')\right)}_{=0}\right]$$

Podobnie dostajemy przedwczesną f. Greena:

$$G_A(x-x') = \frac{\Theta(-(t_0-t_0'))}{4\pi R}\,\delta\left(ct - ct' + |\vec{r}-\vec{r}\,'|\right)$$

Rozwiązanie równania falowego:

$$\psi_R(\vec{r},t) = \psi_0(\vec{r},t) + \frac{1}{4\pi}\int \frac{j\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,'$$

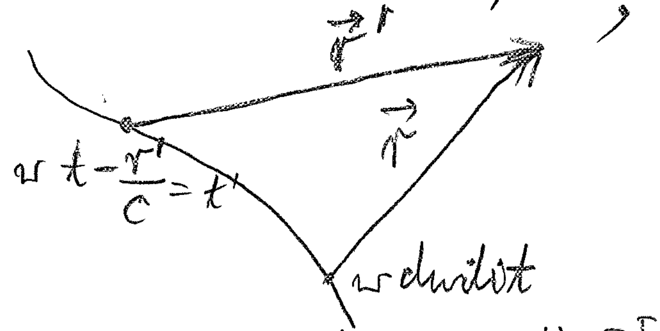
$$j_{ret}(\vec{r}\,', t') = j\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)$$

Pole w $\vec{r}$ w chwili t jest określone przez stan ruchu ładunków we wcześniejszej chwili t' takiej, aby czas potrzebny na przejście sygnału świetlnego (fali e.-m.) z $\vec{r}\,'(t')$, w którym znajduje się ładunek w chwili t' do p. obserwacji $\vec{r}$ był $t-t'$!

W p. $\vec{r}$ odczuwamy w t tylko to, co źródło umieszczone w $\vec{r}'$ we wcześniejszej chwili t'; ten moment t' poprzedza obecną chwilę t dokładnie o czas, jaki zajmuje fali przejście od $\vec{r}'$ do $\vec{r}$: $|\vec{r}-\vec{r}'|/c$

$$\vec{R}(t) = \vec{r} - \vec{r}'(t)$$

$t' + R/$



$$G_{ret}(x-x') = \frac{1}{2\pi}\theta(x_0-x_0')\,\delta[(x-x')^2]$$

A_μ pochodzące od poruszającego się ładunku:

$$A_\mu(x) = \frac{4\pi}{c}\int G_{ret}(x-x')\,J^\mu(x')\,d^4x'$$

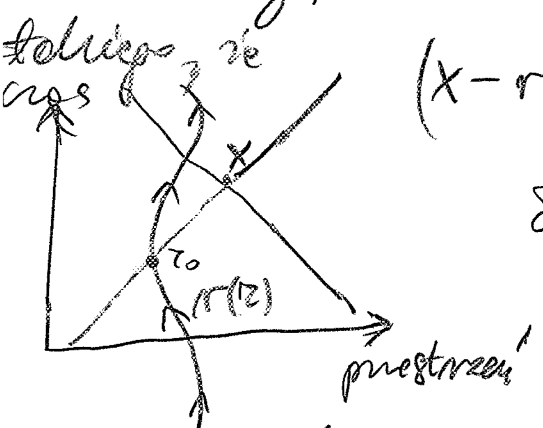
gdzie $J^\mu(x') = ec\int d\tau\, u^\mu(\tau)\,\delta^4(x'-r^\mu(\tau))$

tutaj $u^\mu(\tau)$ – czteroprędkość, $r^\mu(\tau)$ – czterowektor położenia.

$$A^\mu(x) = 2e\int u^\mu(\tau)\,\theta(x_0-r_0(\tau))\,\delta[(x-r(\tau))^2]$$

Całka względem τ czynnik daje wkład jedynie dla $\tau=\tau_0$ takiego, że

$(x-r(\tau_0))^2=0$ oraz warunkiem spełnienia $x_0 > r_0(\tau_0)$.



$$\delta(f(x)) = \sum \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_i}\right|}, \quad f(x_i)=0$$

potrzebujemy więc znać wartości pochodnej

$$\frac{d}{d\tau}(x-r(\tau))^2 = -2\,(x-r(\tau))_\mu u^\mu(\tau)$$

gdzie $u^\mu(\tau) = \frac{dr^\mu}{d\tau}$. W ten sposób: (nie "–", bo jest $|\cdot|$)

$$A^\mu(x) = \frac{e\,u^\mu(\tau)}{u^\mu(x_\mu - r_\mu(\tau))}\Bigg|_{\tau=\tau_0}$$ ← potencjały Liénarda-Wiecherta