JAN MIKUSIŃSKI

WSTĘP DO ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Wydanie II poprawione

WARSZAWA 1990
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Pozycja dotowana przez Ministra Edukacji Narodowej

© Copyright by
Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1990

Okładkę projektował: *Andrzej Kok*
Redaktor: *Romana Ehrenfeucht*
Redaktor techniczny: *Danuta Jezierska-Żaczek*
Korektor: *Beata Grzelka*

ISBN 83-01-09886-4

PRZEDMOWA

Książka jest przeznaczona przede wszystkim dla studentów pierwszego roku matematyki jako dodatkowa lektura, poza tym może służyć za samouczek. Ma na celu wprowadzić czytelnika możliwie szybko i w sposób poprawny w podstawowe pojęcia analizy matematycznej, jak funkcja, granica, pochodna, ciąg, szereg i całka. Odmienny niż w większości podręczników układ materiału pozwolił w wielu miejscach skrócić wykład przez wykorzystanie mniej elementarnych środków dowodowych, które wszakże nie obciążają kursu, bo i tak są zawsze wykładane.

Przy pisaniu książki korzystałem w szerokiej mierze z istniejącej literatury w różnych językach. Ponadto wykorzystałem pewne pomysły kolegów A. Bieleckiego, C. Ryll-Nardzewskiego i M. Warmusa, za co wyrażam im swą wdzięczność.

Jan Mikusiński

Wrocław, 2 czerwca 1954 r.

PRZEDMOWA DO WYDANIA DRUGIEGO

Drugie wydanie „Wstępu do analizy matematycznej" ukazuje się po trzydziestu pięciu latach od wydania pierwszego.

Duży to upływ czasu dla podręcznika przedmiotu, którego wykład uległ na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych poważnej modernizacji. Początkujący student matematyki, fizyki, a także nauk technicznych musi dzisiaj opanować bardzo obszerny wykład analizy matematycznej pełny pojęć teoriomnogościowych, algebraicznych i topologicznych. Zdarza się, że studium abstrakcyjnej teorii powoduje zaniedbanie umiejętności rachunkowych oraz zepchnięcie na margines własności funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Dlatego na wielu uczelniach powraca się do wykładu klasycznego lub uzupełnia się główny kurs analizy wstępem do tego przedmiotu, nadając mu formę oddzielnego wykładu.

Książka Profesora Jana Mikusińskiego z pewnością okaże się w tej sytuacji bardzo użyteczną i będzie jak przed laty służyć studentom wielu specjalności.

Nie jest ona napisana tak pedantycznym stylem jak wykłady obecnie publikowane: Autor nie zawsze wypisuje jawnie założenia zapewniające poprawność podawanych definicji, często nie odróżnia symbolicznie różnych pojęć – np. symbole f i $f(x)$ są w tej książce używane wymiennie. Ma to swoje zalety, dając wykładowi lekkość i zwięzłość, ale wymaga też większej uwagi Czytelnika. W kilku takich miejscach dokonano drobnych poprawek, a w niektórych przypadkach dodano przypisy.

Wydawnictwo wyraża nadzieję, że książka ta pomoże wielu czytelnikom w opanowaniu pierwszych zasad trudnego i fascynującego przedmiotu jakim jest analiza matematyczna.

Arkadiusz Płoski

Rozdział I

LICZBY

Rozdział ten stanowi uporządkowanie wiadomości o *liczbach rzeczywistych.* Innych liczb w tej książce w ogóle wprowadzać nie będziemy, dlatego liczby rzeczywiste będziemy po prostu nazywali *liczbami.*

Większość pojęć i twierdzeń rozdziału I jest znana ze szkoły podstawowej, systematyczne więc studiowanie całego tego rozdziału nie jest konieczne dla zrozumienia dalszego ciągu książki. Wystarczy przejrzeć same twierdzenia (bez dowodów) i zapoznać się bliżej z zasadą indukcji matematycznej (§ 15) oraz z pojęciem i własnościami kresu (§ 22). Jednakże dla uzyskania ogólnego poglądu na stosunek analizy do innych podstawowych działów matematyki pożyteczne jest stopniowe zapoznanie się z całością rozdziału I.

§ 1. Oznaczenia literowe

W matematyce często liczby oznaczamy literami. Pisząc na przykład

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \tag{1.1.}$$

mamy na myśli, że wzór ten jest spełniony dla jakichkolwiek liczb podstawionych za litery a i b. Jest przy tym oczywiste, że litera a w tym wzorze musi wszędzie oznaczać tę samą liczbę i podobnie litera b, gdyż inaczej równość mogłaby się stać fałszywa.

Przyjmujemy ogólną zasadę:

W danym wzorze jedna i ta sama litera oznacza wszędzie jedną i tę samą liczbę.

Podobna zasada obowiązuje także, jeżeli mamy więcej wzorów związanych z sobą jakimś rozumowaniem matematycznym, jak to ma miejsce w różnych dowodach.

Wzór (1.1) jest także spełniony, gdy a i b oznaczają tę samą liczbę.

Różne litery mogą oznaczać tę samą liczbę.

Natomiast, jak powiedzieliśmy, jedna i ta sama litera nie może jednocześnie oznaczać dwóch liczb.

Przyjmujemy dalszą zasadę:

Jeżeli dwie litery oznaczają tę samą liczbę, to możemy zawsze jedną literę zastąpić drugą i odwrotnie.

Na przykład, jeżeli a i b oznaczają tę samą liczbę, to możemy zamiast wzoru (1.1) napisać

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+a^2;$$

ostatnia litera b została tu zastąpiona przez a, poprzednie zaś litery b pozostały bez zmiany. Oczywiście taka modyfikacja wzoru jest dopuszczalna tylko wtedy, gdy a i b oznaczają tę samą liczbę.

Czasem liczby są oznaczone nie literami, lecz innymi symbolami. Powyższe zasady obowiązują także w tym przypadku.

§ 2. Równość

Jeżeli litery a i b oznaczają tę samą liczbę, to piszemy

$$a = b$$

i mówimy, że *a jest równe b*. Zamiast liter a i b mogą też być użyte inne symbole.

Przy tej umowie ostatnią zasadę z § 1 możemy wypowiedzieć tak:

Jeżeli $a = b$, to możemy zawsze a zastąpić przez b i odwrotnie.

Równość ma następujące własności [1]:

[1] Oprócz numeracji bieżącej, jak np. (1.1), (2.1), (2.2) itp., w tym rozdziale niektóre wzory mają specjalne oznaczenia, np. $(1^=)$, $(2^=)$, $(3^=)$, (1^+), (2^+), (3^+) itp. Wzory ze specjalnymi oznaczeniami mają podstawowe znaczenie i należy je pamiętać w ciągu czytania pierwszego rozdziału. W razie potrzeby czytelnik może posłużyć się tabelką wzorów podstawowych z rozdziału I zamieszczoną na końcu książki.

$(1^=)$ $a = a$;

$(2^=)$ *Jeżeli* $a = b$, *to* $b = a$;

$(3^=)$ *Jeżeli* $a = b$ *i* $b = c$, *to* $a = c$.

Własność $(1^=)$ pochodzi stąd, że litera a i ta sama litera a oznaczają tę samą liczbę. Własność $(2^=)$ wynika stąd, że jeżeli $a = b$, to literę a stojącą po lewej stronie równości $(1^=)$ można zastąpić przez b, co daje równość $b = a$. Wreszcie własność $(3^=)$ wynika stąd, że jeżeli $a = b$ i $b = c$, to w drugiej z tych równości można zastąpić b przez a, co daje równość $a = c$.

Dodawanie przyporządkowuje każdej parze liczb a i b jednoznacznie trzecią liczbę; liczbę tę oznaczamy przez $a+b$.

Zupełnie podobnie, *mnożenie* przyporządkowuje każdej parze liczb a i b jednoznacznie trzecią liczbę (na ogół inną niż dodawanie); liczbę tę oznaczamy przez ab.

Wypowiemy tu dwie elementarne reguły rachunkowe, które wynikają z jednoznaczności dodawania i mnożenia. Dla wygody reguły te ujmiemy w formę twierdzeń.

TWIERDZENIE 2.1. *Jeżeli* $a = b$, *to* $a+c = b+c$ *i* $ac = bc$.

(Słowami: *Do obydwu stron równości wolno dodać tę samą liczbę; wolno także obie strony pomnożyć przez tę samą liczbę*).

Dowód. Na podstawie $(1^=)$ mamy

$$a+c = a+c \quad \text{i} \quad ac = ac, \tag{2.1}$$

gdyż własność $(1^=)$ przysługuje każdej liczbie, a więc także i liczbom $a+c$ i ac. Jeżeli $a = b$, to zamiast litery a z prawej strony każdej z tych równości (2.1) można napisać b, co daje $a+c = b+c$ i $ac = bc$.

TWIERDZENIE 2.2. *Jeżeli* $a = b$ *i* $c = d$, *to* $a+c = b+d$ *i* $ac = bd$.

(Słowami: *Równości można dodawać do siebie i mnożyć przez siebie*).

Dowód. Na podstawie twierdzenia 2.1 z równości $a = b$ wynika

$$a+c = b+c \quad \text{i} \quad ac = bc. \tag{2.2}$$

Jeżeli $c = d$, to literę c z prawej strony każdej z równości (2.2) można zastąpić przez d, co daje równości $a+c = b+d$ i $ac = bd$.

§ 3. Dodawanie

Dodawanie ma następujące własności:

(1^+) $a+b=b+a$;

(2^+) $(a+b)+c=a+(b+c)$;

(3^+) *Równanie* $a+x=b$ *jest rozwiązalne.*

Równości (1^+) i (2^+) są spełnione dla wszystkich liczb a, b i c. Własność (3^+) wyraża, że dla każdej pary liczb a i b istnieje liczba x, spełniająca równość $a+x=b$.

Własność (1^+) nazywamy *przemiennością dodawania*, (2^+) *łącznością dodawania*, wreszcie (3^+) *wykonalnością odejmowania*. Uzasadnienie tej ostatniej nazwy podamy w § 4.

Własności (1^+), (2^+) i (3^+) są tak dobrane, że wynikają z nich już wszystkie inne własności dodawania. Wobec tego dalsze własności dodawania możemy ująć w formę twierdzeń i przeprowadzić dla nich dowody.

TWIERDZENIE 3.1. *Istnieje jedna i tylko jedna liczba* x *spełniająca równanie* $b+x=b$ *przy wszelkich* b.

Dowód. Istnienie liczby x spełniającej równanie $b+x=b$ wynika z własności (3^+). Wszelako z własności tej wynika tylko tyle, że dla każdej liczby b istnieje jakaś liczba x spełniająca żądane równanie, ale nie wynika jeszcze, że liczba ta jest wspólna dla wszystkich liczb b. To musimy udowodnić.

Niech a oznacza dowolnie pomyślaną liczbę. Dla tej liczby istnieje jakaś liczba x, spełniająca równanie

$$a+x=a; \tag{3.1}$$

wykażemy, że ta właśnie liczba x jest wspólnym rozwiązaniem równania

$$b+x=b$$

przy wszelkich b.

Z (3^+) wynika, że istnieje liczba y spełniająca równość

$$a+y=b,$$

czyli, co na jedno wychodzi, równość

$$b=a+y \qquad (2^=). \tag{3.2}$$

Stąd mamy kolejno

$$b+x=(a+y)+x \qquad \text{(tw. 2.1)},$$

$$b+x=a+(y+x) \qquad (2^+),$$

$$b+x=a+(x+y) \qquad (1^+),$$

$$b+x=(a+x)+y \qquad (2^+),$$

$$b+x=a+y \qquad (3.1),$$

$$b+x=b \qquad (3.2).$$

Po prawej stronie każdej z tych równości podaliśmy twierdzenie, własność albo wzór uzasadniający daną równość.

Ostatecznie udowodniliśmy, że liczba x, spełniająca równanie $a+x=a$ przy jakiejś dowolnie wybranej liczbie a, spełnia również równanie $b+x=b$ przy wszelkich b. Musimy jeszcze udowodnić, że istnieje tylko jedna liczba o tej własności.

Przypuśćmy, że istnieją dwie takie liczby i oznaczmy je przez x_1 i x_2. Wtedy zachodzą równocześnie równości

$$x_1+x_2=x_1,$$

$$x_2+x_1=x_2.$$

Z pierwszej równości mamy

$$x_1=x_1+x_2 \qquad (2^=),$$

z drugiej zaś

$$x_1+x_2=x_2 \qquad (1^+),$$

a stąd

$$x_1=x_2 \qquad (3^=).$$

Otrzymana równość dowodzi, że istnieje tylko jedna liczba o żądanej własności.

Twierdzenie 3.1 jest ciekawe z tego powodu, że pozwala wyróżnić spośród wszystkich liczb jedną o szczególnej własności: liczba ta dodana do jakiejkolwiek liczby daje ją w wyniku. Liczbę o tej własności nazywamy *zerem* i oznaczamy przez 0.

Wobec twierdzenia 3.1 i przemienności dodawania (1^+) mamy

$$0+a=a+0=a. \tag{1^0}$$

Mamy tu do czynienia z dwiema równościami, gdyż wzór (1^0) jest skróconym sposobem zapisania równości $0+a=a$ oraz $a+0=a$.

TWIERDZENIE 3.2. *Jeżeli* $a+x_1=b$ *i* $a+x_2=b$, *to* $x_1=x_2$.

(Słowami: *Rozwiązanie równania* $a+x=b$ *jest jedyne dla każdej pary liczb* a *i* b).

Twierdzenie to jest uzupełnieniem własności (3^+).

Dowód. Jeżeli $a+x_1=b$ i $a+x_2=b$, to na podstawie własności równania mamy

$$a+x_1=a+x_2. \tag{3.3}$$

Wobec (3^+) istnieje taka liczba y, że

$$a+y=0. \tag{3.4}$$

Z (3.3) mamy kolejno

$$\begin{aligned}
(a+x_1)+y &= (a+x_2)+y && \text{(tw. 2.1)},\\
(x_1+a)+y &= (x_2+a)+y && (1^+),\\
x_1+(a+y) &= x_2+(a+y) && (2^+),\\
x_1+0 &= x_2+0 && (3.4),\\
x_1 &= x_2 && (1^0).
\end{aligned}$$

Ćwiczenie. Udowodnić wzory:
(α) $(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)$;
(β) $[(a+b)+c]+d=a+[b+(c+d)]$.

§ 4. Odejmowanie

Na podstawie własności (3^+) i twierdzenia 3.2 istnieje jedna i tylko jedna liczba x spełniająca równanie $a+x=b$ przy danych a i b. Liczbę tę nazywamy *różnicą* liczb a i b i oznaczamy przez $b-a$.

Liczba $b-a$ spełnia równanie $a+x=b$, to znaczy że

$$a+(b-a)=b. \tag{1^-}$$

Przez wprowadzenie pojęcia różnicy określiliśmy nowe działanie, które każdej parze (uporządkowanej) liczb a i b przyporządkowuje liczbę $b-a$. Działanie to nazywamy *odejmowaniem*. Twierdzenie 3.2 zapewnia jednoznaczność, własność (3^+) zaś wykonalność odejmowania. Stąd też nazwa tej ostatniej własności.

TWIERDZENIE 4.1. $a-a=0$.

Dowód. Dla $b=a$ mamy ze wzoru (1^-)

$$a+(a-a)=a;$$

z drugiej strony zgodnie z (1^0)

$$a+0=a.$$

Stąd na podstawie twierdzenia 3.2 wynika

$$a-a=0.$$

TWIERDZENIE 4.2. *Mamy wzory*

$$(b-a)+a=b \quad i \quad (b+a)-a=b.$$

(Słowami: *Jeżeli od pewnej liczby odejmiemy drugą, a potem ją dodamy, to wrócimy do liczby początkowej. Podobnie, jeżeli do jakiejś liczby dodamy drugą, a potem ją odejmiemy, to wrócimy do liczby początkowej*).

Dowód. Pierwszy z tych wzorów wynika od razu ze wzoru (1^-) przez zastosowanie prawa przemienności (1^+) do jego lewej strony. Na podstawie wzoru (1^-) możemy też napisać $a+[(b+a)-a]=b+a$; z drugiej strony zgodnie z (1^+) mamy $a+b=b+a$. Z tych dwóch równości wynika równość $(b+a)-a=b$ na podstawie twierdzenia 3.2. Tym samym obydwa wzory twierdzenia 4.2 są udowodnione.

Ćwiczenie. Udowodnić wzory:
(α) $a-0=a$;
(β) $a+(b-c)=(a+b)-c$;
(γ) $a-(b-c)=(a+c)-b$;
(δ) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

§ 5. Liczba przeciwna

Liczbę $0-a$ oznaczamy krócej przez $-a$ i nazywamy *liczbą przeciwną* do a; mamy więc równość

$$0-a=-a. \tag{2$^-$}$$

TWIERDZENIE 5.1. $a+(-a)=0$.
(Słowami: *Suma danej liczby i liczby przeciwnej jest równa zeru*).

Dowód. Dla $b=0$ mamy z równości (1^-)

$$a+(0-a)=0,$$

a stąd $a+(-a)=0$ na podstawie (2^-).

TWIERDZENIE 5.2. $b+(-a)=b-a$.
(Słowami: *Dodanie liczby przeciwnej prowadzi do tego samego wynika, co odjęcie danej liczby*).

Dowód. Dodając stronami liczbę b do równości w twierdzeniu 5.1 mamy

$$[a+(-a)]+b=0+b,$$

a stąd

$$a+[(-a)+b]=b \qquad (2^+) \text{ i } (1^0),$$

$$a+[b+(-a)]=b \qquad (1^+).$$

Zestawiając ostatnią równość z równością (1^-) widzimy, że $b+(-a)=b-a$ na podstawie twierdzenia 3.2.

TWIERDZENIE 5.3. $-(-b)=b$.
(Słowami: *Liczba przeciwna do przeciwnej jest równa danej liczbie*).

Dowód. Podstawiając zamiast a liczbę b w twierdzeniu 5.1 mamy $b+(-b)=0$ i wobec (1^+)

$$(-b)+b=0.$$

Podstawiając zaś w twierdzeniu 5.1 zamiast a liczbę $-b$ mamy

$$(-b)+[-(-b)]=0.$$

Z otrzymanych dwóch równości wynika $-(-b)=b$ na podstawie twierdzenia 3.2.

Ćwiczenie. Udowodnić, że $-(b-a)=a-b$.

§ 6. Mnożenie

Mnożenie przyporządkowuje każdej parze liczb a i b trzecią liczbę ab, zwaną *iloczynem*, z zachowaniem własności podobnych jak w przypadku dodawania:

(1°) $ab=ba$;
(2°) $(ab)c=a(bc)$;
(3°) *Równania* $ax=b$ *jest rozwiązalne przy* $a\neq 0$.

Własność (1°) nazywamy *przemiennością mnożenia*, (2°) *łącznością mnożenia*, (3°) *wykonalnością dzielenia*. Uzasadnienie ostatniej nazwy jest podobne jak dla wykonalności odejmowania.

Własność (3°) różni się od analogicznej własności dodawania (3^+) tym, że dochodzi tu dodatkowe założenie, że liczba a jest różna od zera, co zapisaliśmy symbolem $a\neq 0$. Konieczność tego założenia będzie wyjaśniona w § 9.

TWIERDZENIE 6.1. *Istnieje jedna i tylko jedna liczba* x *spełniająca równanie* $bx=b$ *przy wszelkich* b.

Dowód. Niech a oznacza dowolną liczbę różną od zera. W myśl (3°) istnieje dla tej liczby liczba x taka, że

$$ax=a; \tag{6.1}$$

wykażemy, że ta właśnie liczba x jest wspólnym rozwiązaniem równania $bx=b$ przy wszelkich b.

Z (3°) wynika, że istnieje liczba y spełniająca równość $ay=b$, czyli

$$b=ay \qquad (2^=). \tag{6.2}$$

Stąd mamy kolejno

$$bx=(ay)x \qquad \text{(tw. 2.1)},$$

$$bx=a(yx) \qquad (2°),$$

$$bx = a(xy) \qquad (1^*),$$
$$bx = (ax)y \qquad (2^*),$$
$$bx = ay \qquad (6.1),$$
$$bx = b \qquad (6.2).$$

Udowodniliśmy istnienie liczby x o żądanej własności. Musimy jeszcze wykazać, że istnieje tylko jedna taka liczba.

Jeżeliby istniały dwie takie liczby, na przykład x_1 i x_2, to mielibyśmy

$$x_1 x_2 = x_1 \quad \text{i} \quad x_2 x_1 = x_2.$$

Ponieważ druga z tych równości może być wobec (1*) napisana w postaci $x_1 x_2 = x_2$, więc na podstawie własności równości mamy $x_1 = x_2$. A to dowodzi, że istnieje tylko jedna liczba o żądanej własności.

Twierdzenie 6.1 wyróżnia taką liczbę, że każda liczba b przez nią pomnożona daje w wyniku b. Liczbę o tej własności nazywamy *jedynką* i oznaczamy przez 1.

Wobec twierdzenia 6.1 i przemienności mnożenia (1*) mamy

$$1a = a1 = a. \qquad (1^1)$$

TWIERDZENIE 6.2. *Jeżeli* $ax_1 = b$, $ax_2 = b$ *i* $a \neq 0$, *to* $x_1 = x_2$.
(Słowami: *Rozwiązanie równania* $ax = b$ *jest przy* $a \neq 0$ *jedyne*).

Dowód. Jeżeli

$$ax_1 = b \quad \text{i} \quad ax_2 = b,$$

to na podstawie własności równości mamy

$$ax_1 = ax_2. \qquad (6.3)$$

Jeżeli $a \neq 0$, to wobec (3*) istnieje liczba y taka, że

$$ay = 1. \qquad (6.4)$$

Z (6.3) mamy kolejno

$$(ax_1)y = (ax_2)y \qquad \text{(tw. 2.1)},$$
$$(x_1 a)y = (x_2 a)y \qquad (1^*),$$
$$x_1(ay) = x_2(ay) \qquad (2^*),$$
$$x_1 1 = x_2 1 \qquad (6.4),$$
$$x_1 = x_2 \qquad (1^1).$$

§ 7. Dzielenie

Na podstawie własności (3*) i twierdzenia 6.2 dla każdej pary licz
a i b, takiej że $a \neq 0$, istnieje liczba x spełniająca równanie $ax = b$
Liczbę tę nazywamy *ilorazem* liczb b i a lub *ułamkiem* o mianowniku
a i liczniku b; oznaczamy ją przez $\frac{b}{a}$.

Liczba $\frac{b}{a}$ spełnia równanie $ax = b$, to znaczy że

$$a\frac{b}{a} = b \quad (a \neq 0) \ (^1). \qquad (1^:)$$

Przez wprowadzenie pojęcia ilorazu określiliśmy nowe działanie
które każdej parze (uporządkowanej) liczb a i b takiej, że $a \neq 0$
przyporządkowujemy liczbę $\frac{b}{a}$. Działanie to nazywamy *dzieleniem*.

TWIERDZENIE 7.1. $\frac{a}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$.

Dowód. Dla $b = a$ mamy ze wzoru (1:)

$$a\frac{a}{a} = a.$$

Z drugiej strony zgodnie ze wzorem (1¹)

$$a1 = a.$$

Stąd na podstawie twierdzenia 6.2 wynika $\frac{a}{a} = 1$.

TWIERDZENIE 7.2. $c\frac{b}{a} = \frac{b}{a}c = \frac{bc}{a} \quad (a \neq 0)$.

(Słowami: *Ułamek mnożymy przez liczbę, mnożąc jego liczni*
przez tę liczbę).

---

(1) Wzór (1:) należy czytać: „$a\frac{b}{a} = b$ dla $a \neq 0$". Analogicznie rozumiemy podobn
zapisy.

Dowód. Równość $c\frac{b}{a} = \frac{b}{a}c$ wynika z (1°). Pozostaje więc udowodnić, że $\frac{b}{a}c = \frac{bc}{a}$.

Mnożąc (1·) obustronnie przez c (tw. 2.1, str. 9), mamy

$$\left(a\frac{b}{a}\right)c = bc,$$

a stąd wobec (2°)

$$a\left(\frac{b}{a}c\right) = bc. \tag{7.1}$$

Ale wzór (1·) zachodzi dla każdej liczby b, pozostanie więc prawdziwy, gdy w nim literę b zastąpimy przez bc

$$a\frac{bc}{a} = bc. \tag{7.2}$$

Z (7.1) i (7.2) wynika na podstawie twierdzenia 6.2, że $\frac{b}{a}c = \frac{bc}{a}$.

TWIERDZENIE 7.3. *Mamy wzory*

$$\frac{b}{a}a = b \quad i \quad \frac{ba}{a} = b \quad (a \neq 0).$$

(Słowami: *Jeżeli jakąś liczbę podzielimy przez drugą, różną od zera, i iloraz przez nią pomnożymy, to wrócimy do liczby początkowej.* Podobnie, *jeżeli jakąś liczbę pomnożymy przez drugą, różną od zera, i iloczyn przez nią podzielimy, to wrócimy do liczby początkowej*).

Dowód. Pierwszy z tych wzorów wynika z (1·) i (1°). Gdy we wzorze (1·) zamiast b napiszemy ba, to będziemy mieli $a\frac{ba}{a} = ba$, z drugiej strony zgodnie z (1°) jest $ab = ba$. Z tych dwóch równości wynika równość $\frac{ba}{a} = b$ na podstawie twierdzenia 6.2.

§ 8. Liczba odwrotna

Liczbę $\frac{1}{a}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy *liczbą odwrotną* do a lub *odwrotnością* liczby a.

TWIERDZENIE 8.1. $c\frac{1}{a} = \frac{c}{a}$ $\quad (a \neq 0)$.

(Słowami: *Pomnożenie przez liczbę odwrotną daje to samo co podzielenie przez daną liczbę*).

Dowód. Dla $b = 1$ mamy z twierdzenia 7.2 $c\frac{1}{a} = \frac{c1}{a}$ i dalej $c\frac{1}{a} = \frac{c}{a}$ wobec (1^1).

§ 9. Rozdzielność mnożenia względem dodawania

Do podstawowych, omówionych już własności dodawania i mnożenia

(1^+)	$a+b = b+a$,	(1°)	$ab = ba$,
(2^+)	$(a+b)+c = a+(b+c)$,	(2°)	$(ab)c = a(bc)$,
(3^+)	*Równanie* $a+x = b$ *jest rozwiązalne*,	(3°)	*Równania* $ax = b$ *jest rozwiązalne przy* $a \neq 0$

dołączamy jeszcze jedną, wiążącą z sobą oba działania:

$$a(b+c) = ab+ac. \tag{+}$$

Własność tę nazywamy *rozdzielnością mnożenia względem dodawania*. Nie da się ona wyprowadzić jako twierdzenie z poprzednich sześciu własności. Natomiast ze wszystkich siedmiu wymienionych podstawowych własności dadzą się już wyprowadzić wszystkie, w których jest mowa o równości, dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu. Podamy kilka ważniejszych twierdzeń, których dowody opierają się w sposób istotny na własności (+).

TWIERDZENIE 9.1. $(b+c)a = ba+ca$.

Dowód. Równość tę otrzymuje się z (+) przez zastosowanie (1°).

TWIERDZENIE 9.2. *Mamy wzory*

$$a(b-c) = ab-ac \quad i \quad (b-c)a = ba-ca.$$

(Słowami: *Mnożenie jest rozdzielne względem odejmowania*).

Dowód. Wobec (1^-) mamy równości

$$ac+(ab-ac) = ab, \tag{9.1}$$

$$c+(b-c) = b. \tag{9.2}$$

Mnożąc równość (9.2) przez a, mamy

$$a[c+(b-c)] = ab$$

i na podstawie $(\dot{+})$

$$ac+a(b-c) = ab. \tag{9.3}$$

Z równości (9.3) i (9.1) mamy zgodnie z twierdzeniem 3.2 (str. 12)

$$a(b-c) = ab-ac.$$

W ten sposób pierwsza z równości twierdzenia 9.1 jest dowiedziona. Druga zaś wynika z pierwszej na zasadzie (1').

TWIERDZENIE 9.3. $0a = a0 = 0$.

(Słowami: *Każda liczba pomnożona przez zero daje zero*).

Dowód. Dla $c = b$ mamy z pierwszej równości w twierdzeniu 9.2

$$a(b-b) = ab-ab,$$

a stąd na podstawie twierdzenia 4.1

$$a0 = 0.$$

Ponadto mamy $0a = a0$ na mocy (1'), co uzupełnia dowód.

Z twierdzenia 9.3 wynika, że równanie $ax = b$ nie ma rozwiązania, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$. Tym samym jest wyjaśniona konieczność warunku $a \neq 0$ w (3'). Jeżeli natomiast $a = 0$ i $b = 0$, to każda liczba x spełnia równanie $ax = b$. Wyjaśnia to konieczność warunku $a \neq 0$ w twierdzeniu 6.2.

TWIERDZENIE 9.4. *Mamy wzory*

$$(\alpha) \qquad (-a)b = -ab,$$

$$(\beta) \qquad (-a)(-b) = ab.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} (-a)b &= (0-a)b = && (2^-)\\ &= 0b-ab = && \text{(tw. 9.2)}\\ &= 0-ab = && \text{(tw. 9.3)}\\ &= -ab && (2^-). \end{aligned}$$

Mając w ten sposób udowodnioną równość (α), możemy napisać

$$(-a)(-b) = -a(-b)$$

i dalej

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -a(0-b) = && (2^-)\\ &= -(a0-ab) = && \text{(tw. 9.2)}\\ &= -(0-ab) = && \text{(tw. 9.3)}\\ &= -(-ab) = && (2^-)\\ &= ab && \text{(tw. 5.3)}. \end{aligned}$$

TWIERDZENIE 9.5. *Jeżeli* $a \neq 0$ *i* $b \neq 0$, *to* $ab \neq 0$.
(Słowami: *Iloczyn liczb różnych od zera jest liczbą różną od zera*).

Dowód. Wystarczy udowodnić, że jeżeli $a \neq 0$ i

$$ab = 0, \tag{9.4}$$

to $b = 0$. Istotnie, z równości (9.4) i z równości w twierdzeniu 9.3

$$a0 = 0$$

wynika $b = 0$ na podstawie twierdzenia 6.2.

TWIERDZENIE 9.6. *Jeżeli* $a \neq 0$ *i* $b \neq 0$, *to* $\frac{b}{a} \neq 0$.

(Słowami: *Iloraz liczb różnych od zera jest różny od zera*).

Dowód. Wystarczy udowodnić, że jeżeli $a \neq 0$ i

$$\frac{b}{a} = 0, \tag{9.5}$$

to $b = 0$. Istotnie, mnożąc równość (9.5) przez a mamy $\frac{b}{a}a = 0a$, skąd wynika $b = 0$ na podstawie twierdzeń 7.3 i 9.3.

TWIERDZENIE 9.7. $\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$ $(a \neq 0 \ i \ c \neq 0)$.

(Słowami: *Ułamki mnożymy przez siebie mnożąc ich liczniki i mianowniki*).

Dowód. Zgodnie z (1˙) mamy równości

$$a\frac{b}{a} = b \quad \text{i} \quad c\frac{d}{c} = d.$$

Mnożąc te równości przez siebie (tw. 2.2, str. 9), mamy

$$\left(a\frac{b}{a}\right)\left(c\frac{d}{c}\right) = bd,$$

a stąd

$$\left[\left(a\frac{b}{a}\right)c\right]\frac{d}{c} = bd \qquad (2^{\cdot}),$$

$$\left[a\left(\frac{b}{a}c\right)\right]\frac{d}{c} = bd \qquad (2^{\cdot}),$$

$$\left[a\left(c\frac{b}{a}\right)\right]\frac{d}{c} = bd \qquad (1^{\cdot}),$$

$$\left[(ac)\frac{b}{a}\right]\frac{d}{c} = bd \qquad (2^{\cdot}),$$

więc

$$(ac)\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}\right) = bd \tag{9.6}$$

$(2^{\cdot})$.

Z drugiej strony zgodnie z (1˙) można napisać

$$(ac)\frac{bd}{ac} = bd, \tag{9.7}$$

ponieważ ac jest liczbą różną od zera na mocy twierdzenia 9.6. Z równości (9.6) i (9.7) wynika $\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$ na podstawie twierdzenia 6.2.

TWIERDZENIE 9.8. $\frac{b}{a} = \frac{bc}{ac}$ $(a \neq 0 \ i \ c \neq 0)$.

(Słowami: *Ułamek nie zmienia swej wartości, jeżeli licznik i mianownik pomożymy przez tę samą liczbę różną od zera*).

Dowód. (Wobec (1^1) mamy $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}1$, a stąd kolejno na podstawie twierdzeń 7.1 i 9.7: $\frac{b}{a} = \frac{b}{a}\cdot\frac{c}{c} = \frac{bc}{ac}$.

TWIERDZENIE 9.9. *Mamy wzory*

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a} = \frac{b+c}{a} \quad i \quad \frac{b}{a}-\frac{c}{a} = \frac{b-c}{a} \qquad (a \neq 0).$$

(Słowami: *Ułamki o wspólnym mianowniku dodajemy lub odejmujemy, dodając lub odejmując ich liczniki i zachowując mianownik bez zmiany*).

Dowód. Stosując kolejno twierdzenia 8.1, 9.1 i jeszcze raz 8.1, mamy

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a} = b\frac{1}{a}+c\frac{1}{a} = (b+c)\frac{1}{a} = \frac{b+c}{a}.$$

Podobnie, stosując kolejno twierdzenia 8.1, 9.2 i jeszcze raz 8.1, mamy

$$\frac{b}{a}-\frac{c}{a} = b\frac{1}{a}-c\frac{1}{a} = (b-c)\frac{1}{a} = \frac{b-c}{a}.$$

Wypisywanie równości jedna za drugą jest nieraz wygodniejsze niż wypisywanie ich pod sobą. Każde dwie liczby będące ogniwami tego samego łańcucha równości są sobie równe.

Twierdzenia 9.8 i 9.9 pozwalają dodawać i odejmować ułamki o dowolnych mianownikach (różnych od zera). Istotnie,

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}, \qquad \frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}.$$

W rachunkach tych oprócz wymienionych twierdzeń była wykorzystana także przemienność mnożenia (1°).

TWIERDZENIE 9.10. $\dfrac{c}{\left(\frac{b}{a}\right)}=c\dfrac{a}{b}$ $(a\neq 0 \text{ i } b\neq 0)$.

(Słowami: *Liczbę dzielimy przez ułamek, mnożąc ją przez jego odwrotność*).

Dowód. Ponieważ wobec twierdzenia 9.5 jest $ab\neq 0$, więc

$$\frac{ab}{ab}=1 \qquad \text{(tw. 7.1)},$$

$$\frac{ba}{ab}=1 \qquad (1^{\circ}),$$

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1 \qquad \text{(tw. 9.7)},$$

$$\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}\right)c=1c \qquad \text{(tw. 2.1)},$$

$$\frac{b}{a}\left(\frac{a}{b}c\right)=c \qquad (2^{\circ}) \text{ i } (1^{1}),$$

$$\frac{b}{a}\left(c\frac{a}{b}\right)=c \qquad (1^{\circ}).$$

Ponieważ wobec twierdzenia 9.6 jest $\dfrac{b}{a}\neq 0$, więc zgodnie ze wzorem $(1^{\cdot})$ można napisać

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{\left(\frac{b}{a}\right)}=c.$$

Z ostatnich dwóch równości wynika

$$\frac{c}{\left(\frac{b}{a}\right)}=c\frac{a}{b}$$

dzięki twierdzeniu 6.2.

Ćwiczenie. Udowodnić wzór

$$\frac{\left(\frac{d}{c}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)}=\frac{ad}{bc} \qquad (a\neq 0,\ b\neq 0 \text{ i } c\neq 0).$$

§ 10. Cyfry

Przyjmujemy oznaczenia

$$\begin{array}{lccc} & 2=1+1, & 5=4+1, & 8=7+1, \\ (1^{c}) & 3=2+1, & 6=5+1, & 9=8+1, \\ & 4=3+1, & 7=6+1, & 10=9+1. \end{array}$$

Wynika stąd (przez dodanie obustronne liczby -1 i zastosowanie twierdzeń 5.2 i 4.2), że

$$\begin{array}{lccc} & 2-1=1, & 5-1=4, & 8-1=7, \\ (2^{c}) & 3-1=2, & 6-1=5, & 9-1=8, \\ & 4-1=3, & 7-1=6, & 10-1=9. \end{array}$$

Liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 nazywamy *cyframi*. Wszystkie one, z wyjątkiem 0, nazywają się też liczbami jednocyfrowymi. Liczba 10 jest dwucyfrowa; symbol 10 nie oznacza tu mnożenia 1 przez 0. Jest to pewna niekonsekwencja w stosunku do poprzednich oznaczeń, ale przyjmujemy ją ze względów tradycyjnych. Mnożenie dwóch cyfr będziemy zawsze zaznaczać, umieszczając między tymi cyframi kropkę, na przykład $1\cdot 0$ lub $5\cdot 7$.

Znak $5\cdot 7$ oznacza iloczyn liczby 5 przez 7. Pisząc natomiast 57, mamy na myśl liczbę $5\cdot 10+7$.

Ogólnie, jeżeli znaki $\Diamond$ i Υ oznaczają dwie dowolne cyfry, z których pierwsza jest różna od zera, przyjmujemy, że

$$\Diamond\Upsilon = \Diamond\cdot 10+\Upsilon; \tag{10.1}$$

liczby tej postaci nazywamy dwucyfrowymi.

§ 11. Tabliczka dodawania

Poniższa tabliczka jest tak ułożona, że każda wypisana w niej liczba jest sumą liczby z lewego brzegu tego samego wiersza i liczby u góry tej samej kolumny, do których należy dana liczba. Jest to *tabliczka dodawania.*

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tabliczka dodawania

Wszystkie pozycje tabliczki dodawania wymagają dowodu.

Dowód pozycji pierwszej kolumny i pierwszego wiersza wynika od razu z (1^0). Zauważmy dalej, że jeżeli Υ jest dowolną cyfrą, to

$$10+\Upsilon = 1\Upsilon, \tag{11.1}$$

gdyż zgodnie z (10.1) jest

$$10+\Upsilon = (1\cdot 10+0)+\Upsilon = 1\cdot 10+\Upsilon = 1\Upsilon.$$

Według wzoru (11.1) mamy na przykład $10+4=14$.

Oprócz wzoru (11.1) będzie nam jeszcze potrzebna równość

$$(a+1)+(b-1) = a+b, \tag{11.2}$$

którą uzasadnia następujący rachunek:

$$(a+1)+(b-1) = a+[1+(b-1)] = a+[(b-1)+1] = a+b.$$

Wyszczególnienie wzorów i twierdzeń, na których ten rachunek się opiera, pominęliśmy. Systematyczne powoływanie się za każdym krokiem na wzory i twierdzenia byłoby, po nabyciu pewnej wprawy, żmudne i niecelowe.

Poniższe rachunki są oparte na wzorach (1^c), (2^c), (10.1) i (11.1);

$$\begin{aligned}
&2+2= 3+1= 4,\\
&3+2= 4+1= 5,\\
&3+3= 4+2= 5+1= 6,\\
&4+3= 5+2= 6+1= 7,\\
&4+4= 5+3= 6+2= 7+1= 8,\\
&5+4= 6+3= 7+2= 8+1= 9,\\
&5+5= 6+4= 7+3= 8+2= 9+1=10,\\
&6+5= 7+4= 8+3= 9+2=10+1=11,\\
&6+6= 7+5= 8+4= 9+3=10+2=12,\\
&7+6= 8+5= 9+4=10+3=13,\\
&7+7= 8+6= 9+5=10+4=14,\\
&8+7= 9+6=10+5=15,\\
&8+8= 9+7=10+6=16,\\
&9+8=10+7=17,\\
&9+9=10+8=18.
\end{aligned}$$

Dzięki tym równościom możemy w tabliczce dodawania wypełnić wszystkie pozycje na przekątnej głównej (to znaczy na linii łączącej lewy górny punkt kwadratu z prawym dolnym) oraz pod nią. Ale wobec przemienności dodawania możemy też wypełnić pozostałe pozycje symetrycznie względem przekątnej głównej. W ten sposób cała tabliczka dodawania jest uzasadniona.

§ 12. Tabliczka mnożenia

Poniższa tabliczka jest ułożona podobnie jak tabliczka dodawania, lecz zamiast sum są w niej wypisane iloczyny liczb stojących w pierwszej kolumnie i w pierwszym wierszu.

Jest to *tabliczka mnożenia.* Ma ona o jedną kolumnę i o jeden wiersz mniej niż tabliczka dodawania, bo nie jest w niej uwzględnione mnożenie przez 0.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Tabliczka mnożenia

Pierwsza kolumna tabliczki ma swe uzasadnienie we własności (1^1) jedynki. Dalej zauważmy, że

$$a2 = a(1+1) = a+a;$$

stąd wynika, że druga kolumna tabliczki mnożenia jest identyczna z przekątną główną tabliczki dodawania (po odrzuceniu 0).

W celu uzasadnienia pozostałych pozycji wprowadzimy dwa twierdzenia pomocnicze.

(I) Każda liczba w tabliczce (z wyjątkiem liczb pierwszej kolumny) jest sumą liczby sąsiadującej z nią z lewej strony i liczby stojącej na początku tego samego wiersza.

(II) Jeżeli Υ_1, Υ_2, Υ_3 i $\Diamond$ oznaczają cyfry, przy czym cyfra $\Diamond$ jest różna od zera i od 9, to

$$\Diamond\Upsilon_1+\Upsilon_2 = \begin{cases} \Diamond\Upsilon_3, & \text{gdy } \Upsilon_1+\Upsilon_2 = \Upsilon_3, \\ \Diamond_1\Upsilon_3 \quad (\Diamond_1 = \Diamond+1), & \text{gdy } \Upsilon_1+\Upsilon_2 = 1\Upsilon_3. \end{cases}$$

Na przykład: $74+5 = 79$, bo $4+5 = 9$,
$74+8 = 82$, bo $4+8 = 12$.

Dowód (I). Przypuśćmy, że liczba a stoi w wierszu o początkowym wyrazie Υ_1 i w kolumnie o początkowym wyrazie Υ_2 ($\Upsilon_2 \neq 1$). W takim razie jest $a = \Upsilon_1\cdot\Upsilon_2$. Liczba sąsiadująca z a z lewej strony jest równa $\Upsilon_1\cdot(\Upsilon_2-1)$, ponieważ znajduje się w wierszu o początkowym wyrazie Υ_1 i w kolumnie o początkowym wyrazie Υ_2-1. Wobec tego mamy udowodnić, że

$$\Upsilon_1\cdot\Upsilon_2 = \Upsilon_1\cdot(\Upsilon_2-1)+\Upsilon_1.$$

Istotnie, jest

$$\Upsilon_1\cdot\Upsilon_2 = \Upsilon_1\cdot[(\Upsilon_2-1)+1] = \\ = \Upsilon_1\cdot(\Upsilon_2-1)+\Upsilon_1\cdot 1 = \Upsilon_1\cdot(\Upsilon_2-1)+\Upsilon_1.$$

Dowód (II). Jeżeli $\Upsilon_1+\Upsilon_2 = \Upsilon_3$, to

$$\Diamond\Upsilon_1+\Upsilon_2 = (\Diamond\cdot 10+\Upsilon_1)+\Upsilon_2 = \Diamond\cdot 10+(\Upsilon_1+\Upsilon_2) = \\ = \Diamond\cdot 10+\Upsilon_3 = \Diamond\Upsilon_3.$$

Jeżeli $\Upsilon_1+\Upsilon_2 = 1\Upsilon_3$, to

$$\Diamond\Upsilon_1+\Upsilon_2 = (\Diamond\cdot 10+\Upsilon_1)+\Upsilon_2 = \Diamond\cdot 10+(\Upsilon_1+\Upsilon_2) = \\ = \Diamond\cdot 10+1\Upsilon_3 = \Diamond\cdot 10+(1\cdot 10+\Upsilon_3) = \\ = (\Diamond\cdot 10+1\cdot 10)+\Upsilon_3 = (\Diamond+1)\cdot 10+\Upsilon_3 = \\ = \Diamond_1\cdot 10+\Upsilon_3 = \Diamond_1\Upsilon_3.$$

Korzystając z twierdzeń (I) i (II) oraz z tabliczki dodawania i uzasadnionych już pozycyj tabliczki mnożenia, wyliczamy kolejno:

$3\cdot 3 = 6+3 = 9$, $7\cdot 7 = 42+7 = 49$,
$4\cdot 3 = 8+4 = 12$, $8\cdot 3 = 16+8 = 24$,
$4\cdot 4 = 12+4 = 16$, $8\cdot 4 = 24+8 = 32$,
$5\cdot 3 = 10+5 = 15$, $8\cdot 5 = 32+8 = 40$,
$5\cdot 4 = 15+5 = 20$, $8\cdot 6 = 40+8 = 48$,
$5\cdot 5 = 20+5 = 25$, $8\cdot 7 = 48+8 = 56$,
$6\cdot 3 = 12+6 = 18$, $8\cdot 8 = 56+8 = 64$,
$6\cdot 4 = 18+6 = 24$, $9\cdot 3 = 18+9 = 27$,
$6\cdot 5 = 24+6 = 30$, $9\cdot 4 = 27+9 = 36$,
$6\cdot 6 = 30+6 = 36$, $9\cdot 5 = 36+9 = 45$,
$7\cdot 3 = 14+7 = 21$, $9\cdot 6 = 45+9 = 54$,
$7\cdot 4 = 21+7 = 28$, $9\cdot 7 = 54+9 = 63$,
$7\cdot 5 = 28+7 = 35$, $9\cdot 8 = 63+9 = 72$,
$7\cdot 6 = 35+7 = 42$, $9\cdot 9 = 72+9 = 81$.

W ten sposób mamy już obliczone wszystkie pozycje tabliczki mnożenia leżące na przekątnej i pod nią. Pozostałe pozycje wpisujemy symetrycznie względem przekątnej głównej, co jest uzasadnione przemiennością mnożenia (1*).

§ 13. Ogólne uwagi o pojęciu liczby

Wszystkie liczby, o których była mowa w dwóch poprzednich paragrafach, należą do zbioru liczb naturalnych. Liczby naturalne zjawiają się najwcześniej w historycznym rozwoju matematyki. Dopiero później przez stopniowe uogólnienie zostają wprowadzone inne liczby, pojmowane początkowo w sposób naiwny i intuicyjny. Potrzeba oparcia analizy matematycznej na ścisłych podstawach wyłania konieczność dokładnego sprecyzowania pojęcia liczby. Powstają (z końcem XIX wieku) teorie Dedekinda i Cantora. W każdej z nich pojęcie liczby jest inaczej skonstruowane, choć w obydwu punktem wyjścia są liczby naturalne. W kilka lat później Peano buduje dla liczb naturalnych teorię opartą na pewnych pojęciach logicznych. Oprócz wymienionych teorii czy to ogólnych, czy też dotyczących liczb naturalnych istnieje wiele innych. Choć liczby w tych teoriach są pojęciami różnymi, każde z tych pojęć jest równie dobre dla celów matematyki i jej zastosowań, a podstawowe własności liczb są we wszystkich teoriach wspólne.

Dział matematyki, który zajmuje się wprowadzeniem pojęcia liczby i uzasadnieniem podstawowych własności liczb, nazywa się *arytmetyką teoretyczną*.

W naszej książce przyjęliśmy bez dowodu podstawowe własności liczb jako punkt wyjścia. Własności te stanowią niejako słupy graniczne, które postawiliśmy między treścią książki a arytmetyką teoretyczną.

Dotąd omówiliśmy siedem podstawowych własności (1^+), (2^+), (3^+), (1^*), (2^*), (3^*) i $(\dotplus)$ oraz pewne konsekwencje z nich wynikające. Własności te pozwalają wyróżnić ze zbioru liczb dwie liczby szczególne 0 i 1. Liczba 1 jest liczbą naturalną. Dodając do niej 1 dostajemy liczbę naturalną 2. Dodając kolejno znowu liczbę 1 dostajemy coraz to nowe liczby naturalne. Postępowanie to sprecyzujemy ściśle w następnym paragrafie. Pozwala ono na podstawie wymienionych własności wyróżnić spośród wszystkich liczb zbiór liczb naturalnych i w konsekwencji wyprowadzić zasadę indukcji matematycznej.

Droga ta jest w pewnym sensie odwróceniem historycznej kolejności, pozwala jednak od samego początku prowadzić ściśle dedukcyjny wykład w oparciu o kilka podstawowych własności liczb, przyjętych z arytmetyki teoretycznej (i znanych zresztą dobrze ze szkoły średniej).

§ 14. Liczby naturalne

Liczbę 1 nazywamy liczbą naturalną. Jeżeli do liczby 1 dodamy 1, następnie znowu 1 i tak dalej, to za każdym razem dostaniemy liczbę naturalną. Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 są więc naturalne. Następną liczbą naturalną jest 11, gdyż $10+1=11$. Ogólnie, zbiór liczb naturalnych N ma następujące dwie własności:

(1^N) Liczba 1 należy do zbioru;

(2^N) Jeżeli liczba p należy do zbioru, to liczba $p+1$ również do niego należy.

Te własności nie charakteryzują jednak jednoznacznie zbioru liczb naturalnych N, gdyż istnieją inne zbiory, na przykład zbiór wszystkich liczb, mające własności (1^N) i (2^N). Zbiór N można wyróżnić zważywszy, że do zbioru N należy liczba 1 i tylko te liczby, które otrzymamy przez kolejne dodawanie 1. Zbiór N jest więc najuboższym zbiorem o własnościach (1^N) i (2^N). Poprawnie precyzujemy to mówiąc, że zbiór liczb naturalnych N zawiera te i tylko te liczby, które należą do wszystkich zbiorów Z o własnościach (1^N) i (2^N). Tak zdefiniowany zbiór N ma również własności (1^N) i (2^N). Istotnie, liczba 1 należy do N, bo należy do wszystkich zbiorów Z. Ponadto, jeżeli liczba p należy do N, to należy do wszystkich Z; wobec tego $p+1$ należy również do wszystkich Z i w konsekwencji także do N.

Zbiór N nazywamy *zbiorem liczb naturalnych*, a liczby do niego należące *liczbami naturalnymi*.

Jeżeli jakiś zbiór Z ma własności (1^N) i (2^N), to zawiera wszystkie liczby naturalne; na ogół nie wyklucza to możliwości, że inne liczby też należą do Z.

Wobec (1^N) liczba 1 jest naturalna. Liczby 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 również są naturalne, co wynika z (2^N) i (1^c).

TWIERDZENIE 14.1. *Jeżeli n jest liczbą naturalną różną od 1, to $n-1$ jest również liczbą naturalną.*

Dowód. Niech Z_0 będzie zbiorem zawierającym liczbę 1 i wszystkie takie liczby naturalne n, że $n-1$ jest liczbą naturalną; poza tym niech Z_0 nie zawiera żądnych innych liczb. Łatwo pokazać, że zbiór Z_0 ma własności (1^N) i (2^N). Istotnie, własność (1^N) jest spełniona z założenia. Jeżeli teraz Z_0 zawiera liczbę p, to jest ona naturalną; tym samym różnica $(p+1)-1$ jest liczbą naturalną (bo jest równa p). Wobec tego $p+1$ należy do Z_0.

Ponieważ zbiór Z_0 ma własności (1^N) i (2^N), więc zawiera wszystkie liczby naturalne. Wobec tego dla każdej liczby naturalnej n różnej od 1 różnica $n-1$ jest liczbą naturalną.

TWIERDZENIE 14.2. *Suma liczb naturalnych jest liczbą naturalną.*

Dowód. Niech m będzie dowolną liczbą naturalną. Oznaczmy przez Z_m zbiór wszystkich liczb n, dla których suma $m+n$ jest liczbą naturalną. Liczba 1 należy do Z_m, gdyż z własności (2^N) i założenia, że m jest naturalne, wynika, że $m+1$ jest liczbą naturalną. Zatem zbiór Z_m ma własność (1^N). Pokażemy, że ma też własność (2^N). Istotnie, jeżeli p należy do zbioru Z_m, to liczba $m+p$ jest naturalna; wobec tego liczba $(m+p)+1$, czyli liczba $m+(p+1)$ też jest naturalna. Ale to właśnie oznacza, że $p+1$ należy do Z_m.

Ponieważ zbiór Z_m ma własności (1^N) i (2^N), więc zawiera wszystkie liczby naturalne. Zatem $m+n$ jest liczbą naturalną, jakiekolwiek weźmiemy n naturalne. Ponieważ m jest także dowolną liczbą naturalną, więc twierdzenie jest udowodnione.

§ 15. Zasada indukcji matematycznej

W powyższych dwóch dowodach jest wykorzystana ogólna metoda dowodzenia, którą nazywamy *zasadą indukcji matematycznej*.

Przypuśćmy, że chcemy pewne twierdzenie, w którym występuje litera n, udowodnić dla wszystkich naturalnych wartości n. Chcemy

więc wykazać, że jakąkolwiek liczbę naturalną podstawimy za n, twierdzenie jest prawdziwe. Dowodzimy wówczas, że

(I) Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$;

(II) Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla liczby naturalnej $n = p$, to jest też prawdziwe dla $n = p+1$.

Skoro uda się nam udowodnić (I) i (II), to stąd już wyniknie, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich naturalnych n.

Istotnie, niech Z_0 będzie zbiorem wszystkich takich liczb naturalnych, które podstawione za n sprawdzają twierdzenie. Wówczas udowodnienie (I) i (II) jest równoważne z udowodnieniem, że zbiór Z_0 ma własności (1^N) i (2^N). Wtedy Z_0 zawiera wszystkie liczby naturalne i tym samym twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich naturalnych n.

Zasadę indukcji można zilustrować następującym przykładem.

Przypuśćmy, że mamy nieskończenie wiele kamieni do gry w domino i ustawiliśmy je w szereg tak, że upadek jednego kamienia pociąga za sobą upadek następnego. Jeśli więc upadnie pierwszy kamień, to upadną po kolei wszystkie kamienie ([1]).

Dowód twierdzenia 14.2 sprowadza się dzięki zasadzie indukcji do udowodnienia (przy dowolnej liczbie m), że

(I) $m+1$ jest liczbą naturalną;

(II) Jeżeli $m+p$ jest liczbą naturalną, to $m+(p+1)$ jest również liczbą naturalną.

Za pomocą zasady indukcji udowodnimy też następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 15.1. *Iloczyn liczb naturalnych jest liczbą naturalną.*

Dowód. Niech m będzie dowolną liczbą naturalną. Dowodzimy, że

(I′) $m1$ jest liczbą naturalną;

(II′) Jeżeli mp jest liczbą naturalną, to $m(p+1)$ jest również liczbą naturalną.

Pierwsze zdanie jest oczywiste, gdyż $m1 = m$, a m jest z założenia liczbą naturalną. Jeżeli teraz mp jest liczbą naturalną, to $mp+m$ jest

([1]) Przekład z książki: H. Steinhaus, *Kalejdoskop Matematyczny*, Warszawa 1956, str. 42.

również liczbą naturalną jako suma liczb naturalnych (tw. 14.2). Ale $mp+m = m(p+1)$, wobec czego $m(p+1)$ jest liczbą naturalną. Udowodniliśmy więc (I') i (II'). Stąd wynika na zasadzie indukcji, że iloczyn mn jest liczbą naturalną dla każdej liczby naturalnej n. Ponieważ liczba naturalna m jest także dowolna, więc twierdzenie jest dowiedzione.

§ 16. Liczby całkowite

Każdą liczbę, która daje się przedstawić jako różnica liczb naturalnych, nazywamy *liczbą całkowitą.*

Każda liczba naturalna n jest całkowita, bo daje się przedstawić w postaci $(n+1)-1$.

Liczba 0 *jest całkowita,* bo $0 = 1-1$.

Liczba przeciwna do liczby naturalnej n jest całkowita, bo $-n = 1-(n+1)$.

Z uwag tych wynika, że na przykład każda z liczb

$$-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

jest całkowita.

TWIERDZENIE 16.1. *Suma, różnica i iloczyn liczb całkowitych są liczbami całkowitymi.*

Dowód. Mając dwie liczby całkowite możemy przedstawić je w postaci m_1-n_1 i m_2-n_2, gdzie m_1, n_1, m_2 i n_2 są liczbami naturalnymi. Wtedy

$$(m_1-n_1)+(m_2-n_2) = (m_1+m_2)-(n_1+n_2);$$

$$(m_1-n_1)-(m_2-n_2) = (m_1+n_2)-(n_1+m_2);$$

$$(m_1-n_1)(m_2-n_2) = (m_1m_2+n_1n_2)-(m_1n_2+m_2n_1).$$

Wyrażenia po prawej stronie tych równości są liczbami całkowitymi, gdyż są różnicami liczb naturalnych, co wynika z twierdzeń 14.2 i 15.1.

Szczegóły rachunków w powyższym dowodzie zostały pominięte. Obecnie będziemy już stale pomijali szczegóły przy dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu przyjmując, że czytelnik potrafi już wszelkie kroki w wykonywanych rachunkach uzasadnić.

§ 17. Liczby wymierne

Każdą liczbę, która daje się przedstawić jako iloraz liczby całkowitej przez liczbę całkowitą różną od zera, nazywamy *liczbą wymierną.*

Każda liczba całkowita jest wymierna, bo ją można przedstawić w postaci $\frac{c}{1}$.

Dla przykładu podajemy kilka liczb wymiernych:

$$0, 1, 2, -7, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{4}, \tfrac{8}{5}.$$

TWIERDZENIE 17.1. *Suma, różnica i iloczyn liczb wymiernych jak również iloraz liczby wymiernej przez liczbę wymierną różną od zera są liczbami wymiernymi.*

Dowód. Niech p_1, p_2, q_1 i q_2 będą liczbami całkowitymi, przy czym $q_1 \neq 0$ i $q_2 \neq 0$. Z równości

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2},$$

$$\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2-p_2q_1}{q_1q_2},$$

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$$

wynika twierdzenie o sumie, różnicy i iloczynie liczb wymiernych, gdyż po prawej stronie występują ułamki, których liczniki i mianowniki są liczbami całkowitymi (tw. 16.1), przy czym mianowniki są różne od zera (tw. 9.5, str. 21).

Jeżeli $\frac{p_2}{q_2} \neq 0$, to nie tylko $q_2 \neq 0$, ale również $p_2 \neq 0$. Z równości

$$\frac{\left(\frac{p_1}{q_1}\right)}{\left(\frac{p_2}{q_2}\right)} = \frac{p_1q_2}{p_2q_1}$$

wynika twierdzenie o ilorazie liczb wymiernych, ponieważ p_1q_2 i p_2q_1 są liczbami całkowitymi (tw. 16.1), przy czym $p_2q_1 \neq 0$ (tw. 9.5).

§ 18. Liczby dodatnie

Wszystkie omawiane dotąd własności liczb można nazwać algebraicznymi. Obecnie włączamy do naszych rozważań nową, niealgebraiczną własność liczb: *dodatniość*. Liczby a, które mają tę własność nazywamy *dodatnimi*, co zapisujemy symbolem $0 < a$.

Dodatniością rządzą następujące podstawowe prawa:

($1^<$) Dla każdej liczby a jest prawdziwa jedna i tylko jedna z relacyj

$$a = 0 \quad \text{albo} \quad 0 < a, \quad \text{albo} \quad 0 < -a.$$

($2^<$) Jeżeli $0 < a$ i $0 < b$, to $0 < a+b$ i $0 < ab$.

Liczby a, takie że $0 < -a$, nazywamy *ujemnymi*. Własność ($1^<$) mówi, że każda liczba jest albo zerem, albo jest dodatnia, albo ujemna. Własność ($2^<$) mówi, że suma i iloczyn liczb dodatnich są liczbami dodatnimi. Własności ($1^<$) i ($2^<$) nie dadzą się wyprowadzić z własności i twierdzeń omawianych dotychczas.

TWIERDZENIE 18.1. *Jeżeli* $0 < a$ *i* $0 < b$, *to* $0 < \frac{b}{a}$.

(Słowami: *Iloraz liczb dodatnich jest liczbą dodatnią*).

Dowód. Gdyby było $\frac{b}{a} = 0$, to mnożąc tę równość przez a otrzymalibyśmy $b = 0$, wbrew założeniu. Gdyby było $0 < -\frac{b}{a}$, to na podstawie ($2^<$) mielibyśmy $0a < \left(-\frac{b}{a}\right)a$, czyli $0 < -b$, wbrew założeniu. Wobec ($1^<$) pozostaje jedyną możliwość $0 < \frac{b}{a}$.

TWIERDZENIE 18.2. *Jeżeli* $a \neq 0$, *to* $0 < aa$.

Dowód. Jeżeli $a \neq 0$, to $0 < a$ albo $0 < -a$ na podstawie ($1^<$). Gdy $0 < a$, to $0 < aa$ na podstawie ($2^<$); gdy zaś $0 < -a$, to $0 < (-a)(-a)$ na podstawie ($2^<$), czyli $0 < aa$.

TWIERDZENIE 18.3. *Każda liczba naturalna jest dodatnia.*

Uwaga. W dowodzie tego twierdzenia będziemy musieli skorzystać z założenia, że istnieją co najmniej dwie liczby różne. (Założenie to przyjmowaliśmy dotąd milcząco, ale w dotychczasowych dowodach nie grało ono istotniejszej roli). Wynika stąd, że

$$1 \neq 0.$$

Gdyby bowiem było $1 = 0$, to mielibyśmy $a-b = (a-b)1 = (a-b)0 = 0$, czyli $a = b$ dla każdej pary liczb a i b.

Dowód. Na podstawie zasady indukcji matematycznej wystarczy udowodnić, że

(I) $0 < 1$;

(II) Jeżeli $0 < p$, to $0 < p+1$.

Ponieważ $1 \neq 0$, więc na podstawie twierdzenia 18.2 jest $0 < 1 \cdot 1$, czyli $0 < 1$. Z drugiej strony, jeżeli $0 < p$, to na podstawie ($2^<$) jest $0 < p+1$.

Z twierdzenia 18.3 wynika w szczególności, że liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 są dodatnie. Wobec twierdzenia 18.1 również ilorazy liczb naturalnych, na przykład $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$, są dodatnie.

§ 19. Nierówności

Jeżeli $0 < b-a$, to mówimy, że „liczba a jest mniejsza od b“ i piszemy

$$a < b;$$

można też mówić, że „liczba b jest większa od a“ i pisać $b > a$.

Uwaga. Przy tej umowie symbol $0 < b$ można odczytać dwoma sposobami: „liczba b jest dodatnia“ lub „liczba b jest większa od zera“. Nie ma w tym sprzeczności, bo obydwa zdania oznaczają dokładnie to samo, gdyż z $0 < b$ wynika $0 < b-0$ i odwrotnie.

TWIERDZENIE 19.1. *Dla każdej pary liczb a i b jest prawdziwa jedna i tylko jedna z relacyj*

$$a = b \quad \textit{albo} \quad a < b, \quad \textit{albo} \quad b < a.$$

Dowód. Dla liczby $b-a$ jest prawdziwa, na podstawie $(1^<)$, jedna i tylko jedna z relacyj

$$b-a=0 \quad \text{albo} \quad 0<b-a, \quad \text{albo} \quad 0<-(b-a),$$

co dowodzi twierdzenia (ostatnia nierówność jest równoważna z $0<a-b$).

TWIERDZENIE 19.2. *Jeżeli $a<b$ i $b<c$, to $a<c$.*

Dowód. Nierówności $a<b$ i $b<c$ oznaczają, że $0<b-a$ i $0<c-b$; stąd na podstawie $(2^<)$ jest $0<(b-a)+(c-b)$, czyli $0<c-a$, a to oznacza, że $a<c$.

Zamiast pisać $a<b$ i $b<c$ piszemy często

$$a<b<c.$$

TWIERDZENIE 19.3. *Jeżeli $a<b$, to $a+c<b+c$.*

(Słowami: *Do obu stron nierówności wolno dodać tę samą liczbę*).

Dowód. Nierówność $a<b$ oznacza, że $0<b-a$. Ponieważ $b-a=(b+c)-(a+c)$, więc $0<(b+c)-(a+c)$, czyli $a+c<b+c$.

Na podstawie twierdzenia 18.3 jest $0<1$. Dodając do obu stron tej nierówności jedynkę otrzymamy nierówność $1<2$. Dodając znowu jedynkę mamy $2<3$ i dalej kolejno $3<4$, $4<5$, $5<6$, $6<7$, $7<8$, $8<9$ i $9<10$. Wszystkie te nierówności można zapisać razem

$$0<1<2<3<4<5<6<7<8<9<10.$$

W tym łańcuchu nierówności każda liczba wcześniejsza jest mniejsza od późniejszej.

TWIERDZENIE 19.4. *Jeżeli $a<b$ i $c<d$, to $a+c<b+d$.*

(Słowami: *Nierówności wolno dodawać do siebie stronami*).

Dowód. Jeżeli $a<b$ i $c<d$, to $0<b-a$ i $0<d-c$. Stąd $0<(b-a)+(d-c)$ na podstawie $(2^<)$, czyli $0<(b+d)-(a+c)$, czyli $a+c<b+d$.

TWIERDZENIE 19.5. *Jeżeli $a<b$ i $0<c$, to $ac<bc$.*

(Słowami: *Nierówność można pomnożyć przez liczbę dodatnią*).

Dowód. Jeżeli $a<b$, to $0<b-a$ i $0<(b-a)c$ na podstawie $(2^<)$. Stąd $0<bc-ac$, czyli $ac<bc$.

TWIERDZENIE 19.6. *Jeżeli $a<b$, $c<d$ i $0<b$, $0<c$, to $ac<bd$.*

(Słowami: *Dwie nierówności można pomnożyć przez siebie stronami, jeżeli stwierdzimy, że lewa strona jednej z nich i prawa strona w drugiej z nich są dodatnie*).

Dowód. Z twierdzenia 19.5 wynika, że $ac<bc$ i $bc<bd$, a stąd $ac<bd$ na podstawie twierdzenia 19.2.

TWIERDZENIE 19.7. *Jeżeli m i n są liczbami naturalnymi i $0<m-n$, to $m-n$ jest liczbą naturalną.*

(Innymi słowy: *Każda liczba całkowita dodatnia jest naturalna*).

Dowód. Udowodnimy, że:

(I) Z nierówności $1<m$ (m liczba naturalna) wynika, że $m-1$ jest liczbą naturalną;

(II) Jeżeli każda liczba naturalna większa od liczby naturalnej p daje liczbę naturalną po odjęciu p, to każda liczba naturalna większa od $p+1$ daje liczbę naturalną po odjęciu $p+1$.

Istotnie, jeżeli $0<m-1$, to $m\neq 1$ na podstawie $(1^<)$ i wobec tego $m-1$ jest liczbą naturalną (tw. 14.1, str. 32), co dowodzi (I).

Jeżeli teraz m jest liczbą naturalną większą od $p+1$, to $0<m-(p+1)$, czyli $0<(m-1)-p$; zatem $m-1$ jest liczbą naturalną (bo $1<m$) większą od p. Wobec tego, o ile przyjmiemy pierwszą przesłankę w (II) za prawdziwą, to liczba $(m-1)-p$, czyli liczba $m-(p+1)$ musi być naturalna. Tym samym własność (II) jest udowodniona.

Z (I) i (II) wynika na podstawie indukcji matematycznej, że jeżeli m jest liczbą naturalną, większą od liczby naturalnej n, to $m-n$ jest również liczbą naturalną. A to mieliśmy udowodnić.

TWIERDZENIE 19.8. *Między liczbami całkowitymi c i $c+1$ nie ma liczby całkowitej.*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje liczba całkowita x, spełniająca nierówności $c<x<c+1$. Wtedy

$$0<x-c<1. \tag{19.1}$$

Ponieważ $x-c$ jest liczbą całkowitą (tw. 16.1. str. 34), więc z (19.1) wynika kolejno, że $x-c$ jest liczbą naturalną (tw. 19.7) mniejszą od 1,

a więc różną od 1; $x-c-1$ jest liczbą naturalną (tw. 14.1, str. 32); $0 < x-c-1$ (tw. 18.3). Stąd $1 < x-c$, co jest sprzeczne z (19.1).

Ćwiczenie. Udowodnić, że
(α) Jeżeli $-a < x < a$, to $-a < -x < a$.

(β) Dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $0 < \frac{1}{n} < 2$.

§ 20. Słabe nierówności

Słabą nierównością nazywamy wyrażenie

$$a \leqslant b;$$

oznacza ono, że $a = b$ lub $a < b$. Nierówność $a \leqslant b$ jest więc prawdziwa, gdy równość $a = b$ jest prawdziwa lub gdy nierówność $a < b$ jest prawdziwa. Na przykład nierówności słabe $0 \leqslant 0$ i $0 \leqslant 1$ są prawdziwe, bo $0 = 0$ i $0 < 1$; natomiast nierówność $1 \leqslant 0$ jest fałszywa, bo nie jest $1 = 0$ ani też $1 < 0$.

Symbol $a \leqslant b$ odczytujemy „a jest nie większe niż b"; możemy też pisać $b \geqslant a$ i mówić „b jest nie mniejsze niż a", co znaczy to samo.

Z określenia słabej nierówności wynika, że w każdej równości $a = b$ wolno znak $=$ zastąpić przez $\leqslant$ (ale nie odwrotnie) i podobnie w każdej nierówności $a < b$ wolno znak $<$ zastąpić przez $\leqslant$ (ale nie odwrotnie).

Zamiast pisać $a \leqslant b$ i $b \leqslant c$, często piszemy $a \leqslant b \leqslant c$.

TWIERDZENIE 20.1. *Dla każdej pary liczb a i b zachodzi jedna i tylko jedna z relacyj*

$$a \leqslant b \quad albo \quad b < a.$$

Twierdzenie to jest konsekwencją twierdzenia 19.1.

TWIERDZENIE 20.2. *Jeżeli* $a \leqslant b \leqslant a$, *to* $a = b$.

Dowód. Nierówność $a \leqslant b$ oznacza, że $a = b$ lub $a < b$; nierówność $b \leqslant a$ oznacza, że $b = a$ (czyli $a = b$) lub $b < a$. Ponieważ nierówności $a < b$ i $b < a$ wzajemnie się wykluczają na podstawie twierdzenia 19.1, więc pozostaje jedyna możliwość $a = b$.

TWIERDZENIE 20.3. *Wszystkie twierdzenia od* 19.3 *do* 19.6 *pozostają prawdziwe, jeżeli w nich znak* $<$ *zastąpimy wszędzie przez* $\leqslant$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że

($2^{\leqslant}$) Jeżeli $0 \leqslant a$ i $0 \leqslant b$, to $0 \leqslant a+b$ i $0 \leqslant ab$.

Istotnie, jeżeli $0 = a$ i $0 = b$, to $0 = a+b$ i $0 = ab$; można wtedy napisać $0 \leqslant a+b$ i $0 \leqslant ab$. Jeżeli $0 < a$ i $0 < b$, to $0 < a+b$ i $0 < ab$ na podstawie ($2^{<}$); można więc znowu napisać $0 \leqslant a+b$ i $0 \leqslant ab$. Jeżeli wreszcie $0 = a$ i $0 < b$ lub $0 < a$ i $0 = b$, to $0 < a+b$ i $0 = ab$; stąd $0 \leqslant a+b$ i $0 \leqslant ab$.

Własność ($2^{\leqslant}$) jest więc udowodniona. Jest ona zupełnie analogiczna do własności ($2^{<}$), to znaczy może być z niej formalnie otrzymana, gdy zastąpimy wszędzie znak $<$ przez $\leqslant$.

Zauważmy teraz, że w dowodach twierdzeń 19.3 do 19.6 nie korzystaliśmy nigdzie z własności ($1^{<}$), lecz wyłącznie z własności ($2^{<}$). Stąd wynika, że gdy w tych dowodach zastąpimy wszędzie znak $<$ przez $\leqslant$, to zamienią się one na dowody analogicznych twierdzeń ze znakiem $\leqslant$.

TWIERDZENIE 20.4. *Jeżeli* $a < b$ *i* $c \leqslant d$, *to* $a+c < b+d$.

(Słowami: *Dodając stronami nierówność słabą i zwykłą otrzymujemy nierówność zwykłą*).

Wynika to od razu z twierdzenia 19.3 (w przypadku $c = d$) i z twierdzenia 19.4 (w przypadku $c < d$).

Ćwiczenie. Udowodnić, że
(α) Jeżeli $a < b$, $c \leqslant d$ i $0 \leqslant b$, $0 < c$, to $ac < bd$.

(β) Dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$.

§ 21. Zbiory skończone i zbiory ograniczone

Zbiór dowolnych elementów nazywamy *skończonym*, jeżeli istnieje taka liczba naturalna n, że między elementami tego zbioru a liczbami naturalnymi niewiększymi od n daje się ustalić odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna. Ustalenie takiej odpowiedniości będziemy nazywali *ponumerowaniem* elementów zbioru. Na przykład zbiór złożony

z liczb 7, 0 i $\frac{1}{2}$ jest skończony, bo można go ponumerować: 7_1, 0_2, $(\frac{1}{2})_3$ lub 0_1, $(\frac{1}{2})_2$, 7_3, lub w inny jeszcze sposób.

Ogólnie, zbiór ponumerowany od 1 do n zapisujemy w postaci

$$a_1, \ldots, a_n.$$

Zbiór, który nie jest skończony, nazywamy *nieskończonym*. Przykładem zbioru nieskończonego jest zbiór wszystkich liczb naturalnych. Innym przykładem jest zbiór ułamków $1/n$, których mianowniki n są liczbami naturalnymi.

Zbiór liczbowy (to znaczy złożony z liczb) nazywamy *ograniczonym z góry*, gdy wszystkie liczby doń należące są niewiększe od pewnej ustalonej liczby. Na przykład zbiór ułamków $1/n$ jest ograniczony z góry liczbą 1.

Podobnie zbiór liczbowy nazywamy *ograniczonym z dołu*, gdy wszystkie liczby doń należące są niemniejsze od pewnej ustalonej liczby. Na przykład zbiór ułamków $1/n$ jest ograniczony z dołu liczbą 0. Zbiór wszystkich liczb dodatnich jest ograniczony z dołu, ale nie jest ograniczony z góry.

Gdy zbiór jest jednocześnie ograniczony z dołu i z góry, nazywamy go krótko *ograniczonym*. Zbiór ułamków $1/n$ jest ograniczony (mimo że nieskończony); elementy jego spełniają nierówności $0 \leqslant 1/n \leqslant 1$.

Wszystkie liczby tego zbioru spełniają też nierówności $-5 \leqslant 1/n \leqslant 2$. Fakt ten świadczy również o ograniczoności zbioru. Ogólnie biorąc liczby ograniczające dany zbiór nie są określone jednoznacznie.

TWIERDZENIE 21.1. *Jeżeli zbiór P jest ograniczony z góry, to zbiór Q liczb przeciwnych do liczb zbioru P jest ograniczony z dołu. Podobnie, gdy P jest ograniczony z dołu, to Q jest ograniczony z góry.*

Dowód. Oznaczmy przez β dowolną liczbę, którą zbiór P jest ograniczony z góry. Gdy x należy do Q, to $-x$ należy do P i jest $-x \leqslant \beta$. Stąd $-\beta \leqslant x$, co dowodzi ograniczoności Q z dołu przez liczbę $-\beta$. Jeżeli P jest ograniczony z dołu, powiedzmy liczbą α, to $\alpha \leqslant -x$, skąd $x \leqslant -\alpha$, co dowodzi ograniczoności Q z góry.

Przez *największą liczbę zbioru* rozumiemy taką liczbę, która należy do tego zbioru i jest większa od wszystkich innych liczb doń należących; podobnie przez *najmniejszą liczbę zbioru* rozumiemy taką liczbę, która należy do tego zbioru i jest mniejsza od wszystkich innych liczb doń należących. Gdy zbiór jest złożony z jednego tylko elementu, to ów element uważamy za największy i jednocześnie najmniejszy element zbioru (co jest zgodne z intuicją).

W matematyce często mówi się też o zbiorze, który nie zawiera żadnego elementu; taki zbiór nazywamy *pustym*. Trudność w przyswojeniu tego dość abstrakcyjnego pojęcia jest mniej więcej taka sama, jak nazwanie zera liczbą, gdy zna się tylko liczby naturalne. Mówiąc o zbiorze skończonym lub nieskończonym, będziemy mieli na myśli zawsze zbiory nie puste, a więc zawierające pewne elementy.

TWIERDZENIE 21.2. *W każdym skończonym zbiorze liczbowym istnieje liczba najmniejsza i liczba największa.*

Dowód. Zbiór skończony możemy ponumerować: $a_1, \ldots, a_n$.

(I) Gdy $n = 1$, zbiór ma tylko jeden element, będący zarazem najmniejszą i największą liczbą zbioru.

(II) Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla $n = p$, to wśród liczb $a_1, \ldots, a_p$ istnieje liczba najmniejsza i największa; oznaczmy je odpowiednio przez b i c. Gdy $a_{p+1} < b$, to a_{p+1} jest najmniejszą a c największą z liczb

$$a_1, \ldots, a_{p+1}; \tag{21.1}$$

gdy $b < a_{p+1} < c$, to b i c pozostają najmniejszą i największą z liczb; gdy wreszcie $c < a_{p+1}$, to b jest najmniejszą, a a_{p+1} największą z rozważanych $p+1$ liczb. W każdym więc przypadku wśród liczb (21.1) istnieje największa i najmniejsza.

Przez indukcję wynika z (I) i (II), że w każdym zbiorze skończonym $a_1, \ldots, a_n$ istnieje liczba najmniejsza i największa.

TWIERDZENIE 21.3. *Każdy skończony zbiór liczbowy jest ograniczony.*

Dowód. Jeżeli przez b oznaczymy najmniejszą a przez c największą liczbę zbioru, to $b \leqslant x \leqslant c$ dla wszystkich x tego zbioru. A to oznacza ograniczoność zbioru.

§ 22. Kres górny i zasada Dedekinda

Gdy zbiór jest ograniczony z góry, to istnieje nieskończenie wiele liczb ograniczających go z góry. Na przykład zbiór ułamków $1/n$ o mianownikach naturalnych jest ograniczony z góry przez liczbę 1 i przez każdą liczbę większą od 1.

Najmniejszą liczbę ograniczającą z góry dany zbiór nazywamy *kresem górnym* tego zbioru. Chcąc więc sprawdzić, że pewna liczba K jest kresem górnym danego zbioru P, musimy pokazać, że

$(\bar{1})$ $x \leqslant K$ dla wszystkich x należących do P;

$(\bar{2})$ K jest najmniejszą z liczb o własności $(\bar{1})$, to znaczy gdy $K_1 < K$, to dla jakiegoś elementu x zbioru P jest $K_1 < x$.

Dla zbioru ułamków $1/n$ liczba 1 jest kresem górnym, bo $1/n < 1$ dla wszystkich n naturalnych, gdy zaś $K_1 < 1$, to $K_1 < 1/n$ dla $n = 1$. Ogólnie, jeżeli jakaś liczba spełnia warunek $(\bar{1})$ i należy do P, to jest już kresem górnym, gdyż warunek $(\bar{2})$ jest wtedy automatycznie spełniony. Istotnie, jeżeli $K_1 < K$, to $K_1 < x$ dla $x = K$. Natomiast gdy K nie należy do P, warunek $(\bar{2})$ staje się istotny. Na przykład kresem górnym zbioru U liczb ujemnych jest liczba 0. Istotnie, warunek $(\bar{1})$ jest spełniony, bo nierówność $x \leqslant 0$ zachodzi dla każdej liczby ujemnej x. Liczba 0 nie należy do U, ale spełnia warunek $(\bar{2})$; gdy bowiem $K_1 < 0$, to liczba K_1 jest ujemna i jest $K_1 < x$ np. dla $x = \frac{1}{2}K_1$.

Czy dla każdego zbioru ograniczonego z góry istnieje kres górny?

Tak; ale nie da się to udowodnić na podstawie dotąd przyjętych przez nas dziewięciu podstawowych własności liczb (1^+), (2^+), (3^+), $(1')$, $(2')$, $(3')$, $(\dot{+})$, $(1^<)$ i $(2^<)$. *Istnienie kresu górnego zbioru ograniczonego z góry* przyjmujemy jako dziesiątą i ostatnią podstawową własność liczb; nazywamy ją *zasadą Dedekinda* lub *zasadą ciągłości*.

Zbierzmy jeszcze wszystkie wiadomości o liczbach, które przyjęliśmy w tej książce bez dowodu.

Zbiór liczb zawiera więcej niż jeden element, jest w nim określone dodawanie, mnożenie i relacja dodatniości; mają one następujące własności:

(1^+) $a+b = b+a$; $(1')$ $ab = ba$;

(2^+) $(a+b)+c = a+(b+c)$; $(2')$ $(ab)c = a(bc)$;

(3^+) *Równanie* $a+x = b$ *jest rozwiązalne*; $(3')$ *Równanie* $ax = b$ *jest rozwiązalne dla* $a \neq 0$;

$(\dot{+})$ $a(b+c) = ab+ac$;

$(1^<)$ $a = 0$ albo $0 < a$, albo $0 > a$;

$(2^<)$ *Jeżeli* $0 < a$ *i* $0 < b$, *to* $0 < a+b$ *i* $0 < ab$;

(D) *Zbiór liczbowy ograniczony z góry ma kres górny.*

Dotychczas udowodnione twierdzenia opierały się wyłącznie na pierwszych dziewięciu własnościach. Własność dziesiąta (D), czyli zasada Dedekinda odgrywa dominującą rolę w matematyce wyższej. Dedekind sformułował ją w nieco odmienny, lecz najzupełniej równoważny sposób, wprowadzając pojęcie *przekrojów liczb*; pojęcie to nie jest istotne dla matematyki i dlatego bliżej go omawiać nie będziemy, odsyłając zainteresowanego czytelnika do podręczników arytmetyki teoretycznej.

Problem prawdziwości zasady Dedekinda zajmuje się arytmetyka teoretyczna. Nie chodzi tu jednak o udowodnienie, że nie stoi ona w sprzeczności z omawianymi wcześniej własnościami liczb. Gwarantuje to, że teoria zbudowana w oparciu o tę zasadę będzie logicznie poprawna i że wyprowadzone z niej w sposób dedukcyjny twierdzenia nigdy nie będą z sobą sprzeczne. Sprawa przyjęcia lub odrzucenia tej zasady stoi poza matematyką. Przyjmujemy ją, bo jest zgodna z naszą intuicją, a teoria na niej zbudowana dobrze nadaje się do opisania rzeczywistości. Tutaj logika decyduje o poprawności teorii, a otaczający nas świat o jej przydatności.

§ 23. Kres dolny

Gdy zbiór jest ograniczony z dołu, to istnieje nieskończenie wiele liczb ograniczających go z dołu. Największą z tych liczb nazywamy *kresem dolnym* zbioru. Liczba k jest więc kresem dolnym zbioru P, gdy

(1) $k \leqslant x$ dla wszystkich x należących do P;

(2) k jest największą z liczb o własności (2), to znaczy gdy $k < k_1$, to dla jakiegoś elementu x zbioru P jest $x < k_1$.

TWIERDZENIE 23.1. *Każdy zbiór ograniczony z dołu ma kres dolny.*

Dowód. Niech P będzie danym zbiorem ograniczonym z dołu. Wobec twierdzenia 21.1 zbiór P_1, złożony z liczb przeciwnych do liczb zbioru P, jest ograniczony z góry. Zbiór P_1 ma więc kres górny k zgodnie z (D). Pokażemy, że $-k$ jest kresem dolnym zbioru P. Istotnie, jeżeli x należy do P, to $-x$ należy do P_1 i jest $-x \leqslant k$ zgodnie z ($\bar{1}$): stąd $-k \leqslant x$. Zatem liczba $-k$ ma własność (1). Aby pokazać, że ma też własność (2), przypuśćmy, że $-k < k_1$. Wtedy $-k_1 < k$, skąd wynika wobec ($\bar{2}$), że istnieje w zbiorze P_1 taka liczba x, że $-k_1 < x$. Ale wówczas liczba $-x$ należy do P i spełnia nierówność $-x < k_1$. Zatem własność (2) jest spełniona.

Własność (D) i twierdzenie 23.1 mają postać zupełnie symetryczną. Można by to twierdzenie przyjąć jako zasadę Dedekinda, a własność (D) wyprowadzić z niej jako twierdzenie.

§ 24. Zasada minimum i zasada Archimedesa

Udowodnimy jeszcze pewne twierdzenia o liczbach całkowitych i o liczbach naturalnych.

TWIERDZENIE 24.1. *W zbiorze liczb całkowitych ograniczonym z góry istnieje liczba największa. Podobnie, w zbiorze liczb całkowitych ograniczonym z dołu istnieje liczba najmniejsza.*

Dowód. Jeżeli zbiór jest ograniczony z góry, to zgodnie z (D) ma kres górny K. Wobec ($\bar{2}$) istnieje w nim liczba c spełniająca nierówność $K-1 < c$. Gdyby w rozważanym zbiorze istniała liczba x (całkowita) większa od c, to byłoby $c < x \leqslant K$ na podstawie ($\bar{1}$) i w konsekwencji $c < x < c+1$ (bo $K < c+1$). A to jest niemożliwe wobec twierdzenia 19.8 (str. 39). Zatem c jest największą liczbą rozważanego zbioru.

Jeżeli dany zbiór P jest ograniczony z dołu, to zbiór Q złożony z liczb przeciwnych do liczb zbioru P jest ograniczony z góry. Wobec tego w zbiorze Q istnieje liczba największa c. Gdy x jest elementem zbioru P, to $-x$ należy do Q i jest $-x < c$. Stąd $-c < x$. Zatem $-c$ jest najmniejszym elementem zbioru P.

Prostym wnioskiem z twierdzenia 24.1 jest tak zwana

ZASADA MINIMUM. *W każdym zbiorze złożonym z liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza.*

Dowód wynika z uwagi, że każdy taki zbiór jest ograniczony z dołu liczbą 0.

TWIERDZENIE 24.2. *Dla każdej liczby nieujemnej a istnieje liczba naturalna n spełniająca nierówności $a < n \leqslant a+1$.*

Dowód. Na podstawie twierdzenia 24.1 w zbiorze liczb naturalnych niewiększych od $a+1$ istnieje liczba największa; oznaczmy ją przez n. Jest więc $n \leqslant a+1$. Liczba $n+1$ nie należy już do zbioru, więc $a+1 < n+1$. Stąd $a < n \leqslant a+1$.

Z twierdzenia 24.2 wynika od razu tak zwana.

ZASADA ARCHIMEDESA. *Dla każdej liczby istnieje liczba naturalna od niej większa.*

Korzystając z zasady Archimedesa możemy łatwo udowodnić, że kresem dolnym zbioru ułamków $1/n$ o mianownikach naturalnych jest liczba 0. Istotnie, warunek (1) jest spełniony, bo $1/n > 0$. Warunek (2) jest również spełniony, gdyż dla każdej liczby dodatniej k_1 istnieje liczba naturalna n większa od $1/k_1$. Stąd $1/n < k_1$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że liczba naturalna n, spełniająca przy danym $a > 0$ nierówności $a < n \leqslant a+1$, istnieje tylko jedna.

Rozdział II

FUNKCJE

§ 1. Pojęcie funkcji

Pojęcie funkcji jest bardzo ważnym narzędziem w opisywaniu zjawisk przyrody, w których istnieje pewna *zależność* między wielkościami, jak na przykład zależność drogi przebytej od czasu lub zależność prężności gazu od temperatury. Wraz ze zmianą czasu zmienia się droga przebyta, wraz ze zmianą temperatury zmienia się prężność gazu. Takie i podobne interpretacje spowodowały, że pojęcie funkcji opierano pierwotnie na pojęciu wielkości zmiennych, zwanych krótko *zmiennymi*. Jednakże pojęcie zmiennej jest trudne do sprecyzowania i próby idące w tym kierunku raczej zaciemniały pojęcie funkcji zamiast je wyjaśniać. Nowoczesne pojęcie funkcji opiera się na pojęciu *przyporządkowania*.

Mówimy, że *w zbiorze liczbowym X jest określona pewna funkcja, jeżeli każdej liczbie x tego zbioru jest przyporządkowana jednoznacznie pewna liczba y*.

Przyporządkowanie to może być określone jakimś wzorem; na przykład wzór

$$y = x^2$$

przyporządkowuje liczbie 2 liczbę 4, liczbie $\frac{3}{2}$ liczbę $\frac{9}{4}$. We wzorze tym można podstawić za x dowolną liczbę, wzór określa więc funkcję w zbiorze X, złożonym ze wszystkich liczb.

Natomiast wzór

$$y = \frac{1}{x}$$

określa funkcję w zbiorze X zawierającym wszystkie liczby z wyjątkiem 0 (bo symbol $\frac{1}{0}$ nie ma znaczenia).

Weźmy inny przykład funkcji. Przyporządkujmy każdej liczbi x największą liczbę całkowitą y niewiększą niż x. Na przykład liczbi 2 jest w ten sposób przyporządkowana liczba 2, liczbie zaś $\frac{3}{2}$ liczba 1 Funkcję tę nazywamy *całością*.

Funkcję można też określić przez wypisanie pewnych liczb zbioru X i odpowiadających im liczb y, na przykład

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Tabelka ta pozwala wprost odczytać liczbę y, gdy podana jest liczba x. Na przykład widzimy z niej, że liczbie $-\frac{1}{2}$ jest przyporządkowana liczba $\frac{1}{4}$. Przedstawienie tabelkowe ma tę wadę, że na ogół nie da się tym sposobem określić funkcji w zupełności. Na przykład tablice logarytmiczne określają funkcję w pewnych odstępach wartości x. Funkcja może być całkowicie określona przez tabelkę tylko wtedy, gdy zbiór X jest skończony.

Tabelka uwypukla fakt, że istotą funkcji jest powiązanie liczb w pary. Na przykład w podanej wyżej tabelce występuje para $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$ i para $\left[\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right]$. Skoro znamy zbiór wszystkich par, w których na pierwszym miejscu znajduje się liczba x ze zbioru X, na drugim przyporządkowana jej liczba y, to znamy funkcję. I na odwrót, mając określoną funkcję, znamy wszystkie pary do niej należące (chociaż nie zawsze możemy je wszystkie wypisać).

Z punktu widzenia formalnego można funkcję uważać wprost za *zbiór par*. Chodzi tu o pary uporządkowane, to znaczy takie, w których inna jest rola elementu pierwszego, inna zaś elementu drugiego. Liczby x będące pierwszymi elementami tworzą zbiór X, liczby zaś y będące drugimi elementami tworzą inny na ogół zbiór Y. Na przykład dla funkcji określonej wzorem $y = x^2$ zbiór X zawiera wszystkie liczby, zbiór zaś Y tylko liczby nieujemne. Zbiór X nazywamy *zbiorem określoności*, a zbiór Y *zbiorem wartości* danej funkcji.

Zbiór par określający funkcję nie może być dowolny, żądamy bowiem, żeby każdej liczbie x była przyporządkowana *jednoznacznie* liczba y. Oznacza to, że każda liczba zbioru X należy jako pierwszy

element tylko do jednej pary. Natomiast liczby zbioru Y mogą się powtarzać w różnych parach (jako drugie elementy). Na przykład w podanej poprzednio tabelce występują pary $[^{-1}_{1}]$ i $[^{1}_{1}]$, których drugie elementy są tą samą liczbą.

Wobec tych uwag można powiedzieć:

Funkcja jest zbiorem par (uporządkowanych), takich że różne pary mają różne elementy pierwsze.

Definicja ta jest o tyle przyjemniejsza od poprzedniej, opartej na pojęciu przyporządkowania, że opiera się na matematycznych pojęciach zbioru i pary, zastępujących logiczne pojęcie przyporządkowania. Obie definicje są zresztą zupełnie równoważne.

Pojęcie funkcji jako zbioru par daleko odbiega od intuicyjnego pojmowania zmienności zjawisk w przyrodzie. Stanowi jednak precyzyjny model matematyczny do badania tych zjawisk. Weźmy na przykład zjawisko spadania ciał. Każdemu momentowi w czasie przyporządkujmy liczbę sekund, które upłynęły od chwili upuszczenia danego ciała. Zbiór tych liczb to zbiór X. Podobnie, każdemu położeniu ciała przypisujemy liczbę centymetrów, która dzieli obecne położenie ciała od położenia w chwili początkowej. Zbiór tych liczb to zbiór Y. Każdej chwili w czasie odpowiada pewne położenie ciała; tym samym z każdą liczbą zbioru X jest związana pewna liczba zbioru Y. Mamy więc do czynienia z funkcją. Doświadczalnie sprawdzono, że funkcja ta daje się określić wzorem $y = \frac{1}{2}gx^2$, gdzie g jest pewną liczbą odpowiadającą przyciąganiu ziemskiemu. W fizyce używa się zwykle innych oznaczeń pisząc $s = \frac{1}{2}gt^2$, ale jest oczywiście zupełnie obojętne, jakimi literami oznaczymy elementy zbiorów X, Y i nie wpływa to wcale na istotę funkcji.

§ 2. Zapisywanie funkcji

Zamiast mówić „funkcja dana wzorem $y = x^2$" mówi się często krócej: „funkcja $y = x^2$" lub „funkcja x^2". Ostatni skrót niezupełnie jest poprawny, gdyż x^2 nie oznacza funkcji, lecz liczbę przyporządkowaną liczbie x, czyli drugi element pary, której pierwszym elementem jest x. Dlatego w przypadkach mogących budzić wątpliwość

lepiej jest używać innego symbolu dla oznaczenia funkcji, np. $\{x^2\}$. Podobnie funkcję określoną wzorem $y = 1/x$ oznaczylibyśmy symbolem $\{1/x\}$. Może się zdarzyć, że nie znamy wzoru ogólnego określającego funkcję albo też z jakichś powodów nie chcemy go użyć. Wtedy liczbę przyporządkowaną przez tę funkcję liczbie x oznaczamy przez $f(x)$, samą zaś funkcję przez $\{f(x)\}$ lub krócej przez f. Mając jednocześnie do czynienia z innymi jeszcze funkcjami, możemy dla ich odróżnienia użyć innych liter, np. g lub h.

Systematyczne wypisywanie wąsów { } dla odróżnienia funkcji od jej wartości jest w praktyce uciążliwe. Dlatego w dalszym ciągu, gdzie nie będzie obawy nieporozumienia, będziemy te wąsy opuszczali, zgodnie ze zwyczajem uświęconym tradycją.

Dla oznaczenia pewnych specjalnych funkcji może być zarezerwowana specjalna litera. Na przykład dla oznaczenia funkcji całość, omówionej w poprzednim paragrafie, bywa używana litera E. Wtedy symbol $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą, która nie przekracza liczby x. Wynika stąd w szczególności nierówność

$$x - 1 < E(x) \leqslant x.$$

W nowszej literaturze zamiast $E(x)$ częściej spotyka się symbol $[x]$, którego i my będziemy używali w dalszym ciągu. Ostatnią więc nierówność napiszemy

$$x - 1 < [x] \leqslant x.$$

f. Dirichleta $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z}$

$f(x) = [x]$ największa liczba całkowita $\leq x$

§ 3. Geometryczna interpretacja liczb i funkcyj

Dawniej opierano analizę matematyczną w dużej mierze na dowodach geometrycznych. Cechą nowoczesnego ujęcia analizy jest zupełne wyeliminowanie geometrii jako środka dowodowego. Mimo to powiązanie analizy z geometrią jest bardzo ważne, gdyż ułatwia intuicyjne uchwycenie wielu pojęć i twierdzeń, co może być cennym drogowskazem w różnych badaniach (nie mówiąc już o znaczeniu analizy dla samej geometrii.

W tej książce strona geometryczna wykładu będzie potraktowana obszernie, ale raczej intuicyjnie, bez przestrzegania ścisłości matematycznej. Geometria będzie raczej ilustracją wykładu.

Liczby interpretujemy geometrycznie jako punkty na prostej. Każdej liczbie odpowiada jeden punkt na prostej i każdemu punktowi

element tylko do jednej pary. Natomiast liczby zbioru Y mogą się powtarzać w różnych parach (jako drugie elementy). Na przykład w podanej poprzednio tabelce występują pary $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, których drugie elementy są tą samą liczbą.

Wobec tych uwag można powiedzieć:

Funkcja jest zbiorem par (uporządkowanych), takich że różne pary mają różne elementy pierwsze.

Definicja ta jest o tyle przyjemniejsza od poprzedniej, opartej na pojęciu przyporządkowania, że opiera się na matematycznych pojęciach zbioru i pary, zastępujących logiczne pojęcie przyporządkowania. Obie definicje są zresztą zupełnie równoważne.

Pojęcie funkcji jako zbioru par daleko odbiega od intuicyjnego pojmowania zmienności zjawisk w przyrodzie. Stanowi jednak precyzyjny model matematyczny do badania tych zjawisk. Weźmy na przykład zjawisko spadania ciał. Każdemu momentowi w czasie przyporządkujmy liczbę sekund, które upłynęły od chwili upuszczenia danego ciała. Zbiór tych liczb to zbiór X. Podobnie, każdemu położeniu ciała przypisujemy liczbę centymetrów, która dzieli obecne położenie ciała od położenia w chwili początkowej. Zbiór tych liczb to zbiór Y. Każdej chwili w czasie odpowiada pewne położenie ciała; tym samym z każdą liczbą zbioru X jest związana pewna liczba zbioru Y. Mamy więc do czynienia z funkcją. Doświadczalnie sprawdzono, że funkcja ta daje się określić wzorem $y = \frac{1}{2}gx^2$, gdzie g jest pewną liczbą odpowiadającą przyciąganiu ziemskiemu. W fizyce używa się zwykle innych oznaczeń pisząc $s = \frac{1}{2}gt^2$, ale jest oczywiście zupełnie obojętne, jakimi literami oznaczymy elementy zbiorów X, Y i nie wpływa to wcale na istotę funkcji.

§ 2. Zapisywanie funkcji

Zamiast mówić „funkcja dana wzorem $y = x^2$" mówi się często krócej: „funkcja $y = x^2$" lub „funkcja x^2". Ostatni skrót niezupełnie jest poprawny, gdyż x^2 nie oznacza funkcji, lecz liczbę przyporządkowaną liczbie x, czyli drugi element pary, której pierwszym elementem jest x. Dlatego w przypadkach mogących budzić wątpliwość

lepiej jest używać innego symbolu dla oznaczenia funkcji, np. $\{x^2\}$. Podobnie funkcję określoną wzorem $y = 1/x$ oznaczylibyśmy symbolem $\{1/x\}$. Może się zdarzyć, że nie znamy wzoru ogólnego określającego funkcję albo też z jakichś powodów nie chcemy go użyć. Wtedy liczbę przyporządkowaną przez tę funkcję liczbie x oznaczamy przez $f(x)$, samą zaś funkcję przez $\{f(x)\}$ lub krócej przez f. Mając jednocześnie do czynienia z innymi jeszcze funkcjami, możemy dla ich odróżnienia użyć innych liter, np. g lub h.

Systematyczne wypisywanie wąsów $\{\ \}$ dla odróżnienia funkcji od jej wartości jest w praktyce uciążliwe. Dlatego w dalszym ciągu, gdzie nie będzie obawy nieporozumienia, będziemy te wąsy opuszczali, zgodnie ze zwyczajem uświęconym tradycją.

Dla oznaczenia pewnych specjalnych funkcji może być zarezerwowana specjalna litera. Na przykład dla oznaczenia funkcji całość, omówionej w poprzednim paragrafie, bywa używana litera E. Wtedy symbol $E(x)$ oznacza największą liczbę całkowitą, która nie przekracza liczby x. Wynika stąd w szczególności nierówność

$$x - 1 < E(x) \leqslant x.$$

W nowszej literaturze zamiast $E(x)$ częściej spotyka się symbol $[x]$, którego i my będziemy używali w dalszym ciągu. Ostatnią więc nierówność napiszemy

$$x - 1 < [x] \leqslant x.$$

f. Dirichleta $x \in \mathbb{W} \to 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{W} \to 0$

$f(x) = [x]$ największa liczba całkowita $\leq x$

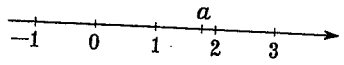
§ 3. Geometryczna interpretacja liczb i funkcyj

Dawniej opierano analizę matematyczną w dużej mierze na dowodach geometrycznych. Cechą nowoczesnego ujęcia analizy jest zupełne wyeliminowanie geometrii jako środka dowodowego. Mimo to powiązanie analizy z geometrią jest bardzo ważne, gdyż ułatwia intuicyjne uchwycenie wielu pojęć i twierdzeń, co może być cennym drogowskazem w różnych badaniach (nie mówiąc już o znaczeniu analizy dla samej geometrii.

W tej książce strona geometryczna wykładu będzie potraktowana obszernie, ale raczej intuicyjnie, bez przestrzegania ścisłości matematycznej. Geometria będzie raczej ilustracją wykładu.

Liczby interpretujemy geometrycznie jako punkty na prostej. Każdej liczbie odpowiada jeden punkt na prostej i każdemu punktowi

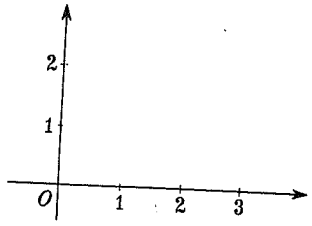
na prostej odpowiada jedna liczba. Odpowiadające sobie liczby i punkty oznaczamy tymi znakami. Obrazem zbioru wszystkich liczb jest cała prosta, zwana też *osią liczbową* (rys. 1).



Rys. 1

W związku z geometryczną interpretacją liczb często używamy geometrycznego sposobu wyrażania się. Mówimy na przykład *wartości funkcji f w punkcie x*; ma to oznaczać liczbę $f(x)$, którą funkcja f przyporządkowuje liczbie x.

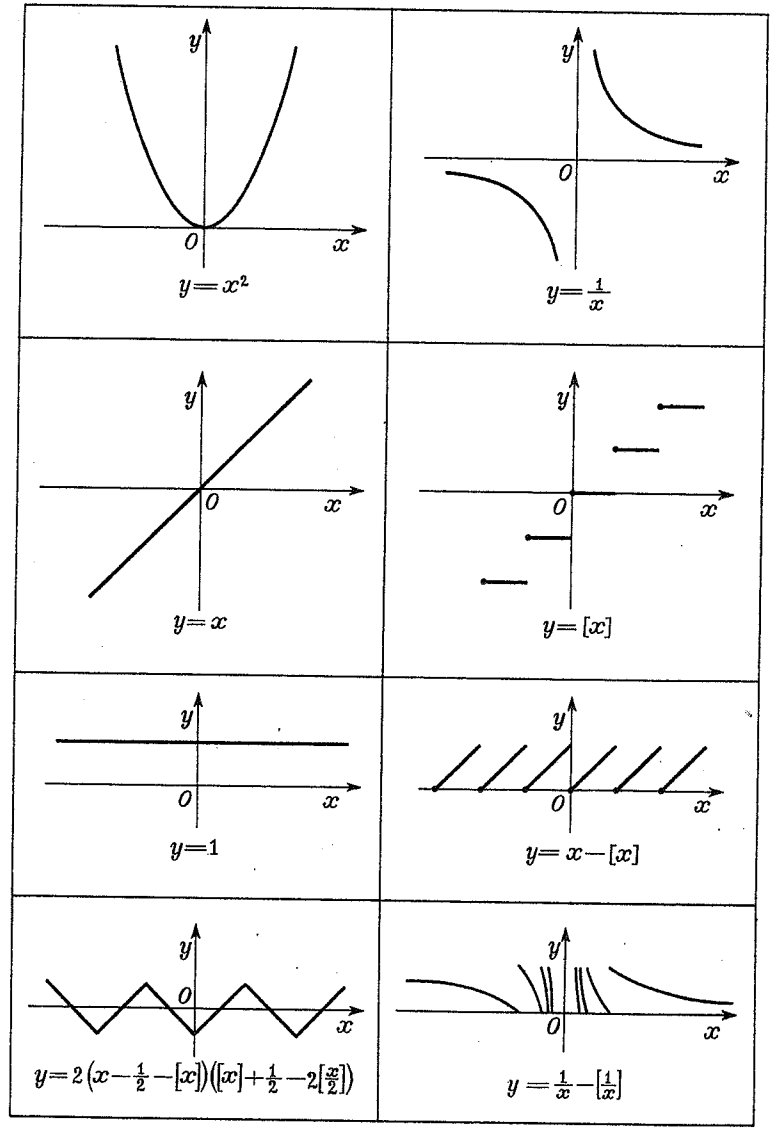
Mając dwie osie liczbowe nierównoległe, możemy każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkować dwa punkty na osiach będące jego rzutami. Tym samym każdemu punktowi płaszczyzny zostają przyporządkowane dwie liczby i, odwrotnie, każdej parze liczb jest przyporządkowany pewien punkt płaszczyzny. Zwykle przyjmujemy, że osie są prostopadłe do siebie i mają zerowy punkt wspólny (rys. 2).



Rys. 2

Jeżeli funkcję traktujemy jako zbiór par liczb, to jej geometryczną interpretacją będzie zbiór punktów; ten zbiór nazywamy *wykresem* funkcji. Wykres można wykonać, ustawiając najpierw poszczególne pary w tabelkę i zaznaczając następnie na płaszczyźnie odpowiadające im punkty. Gdy punktów mamy już tyle, że możemy zorientować się w graficznym przebiegu funkcji, to rysunek wykańczamy już zwykle na oko. Technicy w takich przypadkach często używają tak zwanych krzywek. Krzywki nie polepszają dokładności rysunku, jedynie nadają mu ładniejszy wygląd zewnętrzny.

W załączonej tabelce (rys. 3) podajemy dla przykładu wykresy kilku funkcyj.



Rys. 3

Ćwiczenie. Podać wykresy funkcyj określonych wzorami:
(α) $y=\frac{1}{x^2}$; (β) $y=[x]-2[\frac{1}{2}x]$.

§ 4. Moduł

Przez *moduł* $|a|$ (czyli *bezwzględną wartość*) rozumiemy liczbę a, gdy $0 \leqslant a$, liczbę zaś $-a$, gdy $a<0$. Na przykład

$$|5|=5, \quad |0|=0, \quad |-7|=7.$$

Ogólnie mamy równości

(4.1) $$|a|=a \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant a,$$

(4.2) $$|a|=-a \quad \text{dla} \quad a<0.$$

TWIERDZENIE 4.1. *Gdy* $a \neq 0$, *to* $|a|>0$.

(Słowami: *Moduł liczby różnej od zera jest liczbą dodatnią*).

Dowód. Wobec (4.1) twierdzenie jest oczywiste dla $0<a$. Gdy zaś $a<0$, to $0<-a$ i wobec (4.2) jest $0<|a|$.

TWIERDZENIE 4.2. $|a|=|-a|$.

(Słowami: *Pod znakiem modułu wolno zmienić znak*).

Dowód. Twierdzenie jest oczywiste, gdy $a=0$. Gdy zaś $0<a$, to $|a|=a$ i $|-a|=-(-a)=a$, co dowodzi twierdzenia. Gdy wreszcie $a<0$, to $|a|=-a$ i $|-a|=-a$, co dowodzi twierdzenia.

TWIERDZENIE 4.3. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

Dowód. Gdy $0 \leqslant a$, to $-a \leqslant a$, skąd wobec (4.1) wynika, że $-|a| \leqslant a=|a|$ i tym samym że twierdzenie jest prawdziwe. Gdy zaś $a<0$, to $a \leqslant -a$, skąd wobec (4.2) wynika, że $-|a|=a \leqslant |a|$ i tym samym że twierdzenie jest prawdziwe.

TWIERDZENIE 4.4. *Z nierówności*

(4.3) $$-c \leqslant a \leqslant c$$

wynika nierówność

(4.4) $$|a| \leqslant c$$

i na odwrót z (4.4) *wynika* (4.3).

Dowód. Załóżmy najpierw, że zachodzą nierówności (4.3). Gdy $0 \leqslant a$, to druga z nierówności (4.3) daje $|a| \leqslant c$; gdy zaś $a<0$, to pierwsza z nierówności (4.3) daje $-c \leqslant -|a|$, czyli znowu $|a| \leqslant c$. Zatem z (4.3) wynika (4.4).

Załóżmy teraz, że zachodzi nierówność (4.4). Wtedy jest $-c \leqslant -|a|$, co łącznie z nierównością (4.4) i z nierównościami w twierdzeniu 4.3 prowadzi do nierówności (4.3). Zatem z (4.4) wynika (4.3).

TWIERDZENIE 4.5. *Mamy nierówności*

(4.5) $$|a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

(4.6) $$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|.$$

(Słowami: *Moduł sumy lub różnicy jest nie mniejszy niż różnica modułów i nie większy niż suma modułów*).

Dowód. Dodając nierówność $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ do nierówności $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$, mamy $-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$, skąd wynika

(4.7) $$|a+b| \leqslant |a|+|b|$$

na podstawie twierdzenia 4.4. Zastępując teraz w (4.7) b przez $-b$, mamy

(4.8) $$|a-b| \leqslant |a|+|b|.$$

Wobec (4.8) możemy napisać $|(a+b)-b| \leqslant |a+b|+|b|$, skąd

(4.9) $$|a|-|b| \leqslant |a+b|.$$

Wreszcie zastępując w (4.9) b przez $-b$ mamy

(4.10) $$|a|-|b| \leqslant |a-b|.$$

Nierówności (4.5) i (4.6) są skróconym sposobem zapisania nierówności (4.7), (4.8), (4.9) i (4.10).

TWIERDZENIE 4.6. *Mamy równości*

(4.11) $$|ab|=|a||b|,$$

(4.12) $$\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

(Słowami: *Moduł iloczynu jest równy iloczynowi modułów. Moduł ilorazu jest równy ilorazowi modułów*).

Dowód. Wobec (4.1) równość (4.11) jest oczywista, gdy $0 \leqslant a$ i $0 \leqslant b$. Stąd wynika, że

$$|a(-b)| = |a||-b| \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant a \text{ i } b < 0,$$
$$|(-a)b| = |-a||b| \quad \text{dla} \quad a < 0 \text{ i } 0 \leqslant b,$$
$$|(-a)(-b)| = |-a||-b| \quad \text{dla} \quad a < 0 \text{ i } b < 0,$$

gdyż wszystkie liczby pod znakami modułów są nieujemne. Ale wobec twierdzenia 4.2 z każdej z ostatnich trzech równości wynika (4.11). Zatem równość (4.11) zachodzi dla wszelkich liczb a i b.

Z udowodnionej równości (4.11) wynika dla $a \neq 0$

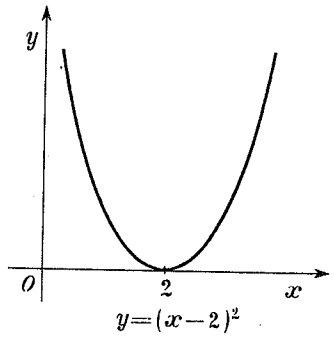
$$\left|a\frac{b}{a}\right| = |a|\left|\frac{b}{a}\right|,$$

czyli $|b| = |a|\left|\frac{b}{a}\right|$. A stąd wynika równość (4.12), gdyż $|a| \neq 0$ na podstawie twierdzenia 4.1.

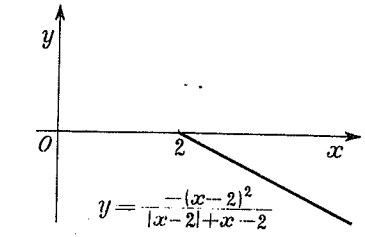
Ćwiczenie. Podać wykresy funkcji określonych wzorami:
(α) $y = |x|$; (β) $y = \frac{|x|}{x}$.

§ 5. Funkcje nieskończenie małe

Funkcja $(x-2)^2$ podana na rysunku 4 przyjmuje wartość równą zeru dla $x = 2$. Gdy x jest nie wiele większa od 2, to wartość funkcji niewiele różni się od zera. Weźmy jeszcze pod uwagę funkcję $-(x-2)^2/(|x-2|+x-2)$ (rys. 5). Gdyby $x \leqslant 2$, to $|x-2| = -(x-2)$ i mianownik jest równy zeru; wobec tego funkcja jest nie określona dla $x \leqslant 2$. Gdy $x > 2$, to $|x-2| = x-2$; mianownik jest teraz dodatni i wartość funkcji jest równa $-\frac{1}{2}(x-2)$. Gdy więc x jest niewiele większa od 2, to wartość funkcji niewiele różni się od zera.



Rys. 4



Rys. 5

Omówiona wspólna własność obydwu funkcyj nie jest związana bezpośrednio z punktem 2, lecz z punktami leżącymi z prawej strony tego punktu. Gdy x jest bliskie 2, to wartość funkcji jest bliska zera. Można powiedzieć, że obydwie funkcje są nieskończenie małe na prawo od 2; wymaga to jednak starannego sprecyzowania.

Ogólnie będziemy mówili, że *funkcja f jest nieskończenie mała na prawo od a*(1), *gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba dodatnia δ, że dla $a < x < a+\delta$ zachodzi nierówność $|f(x)| < \varepsilon$.*

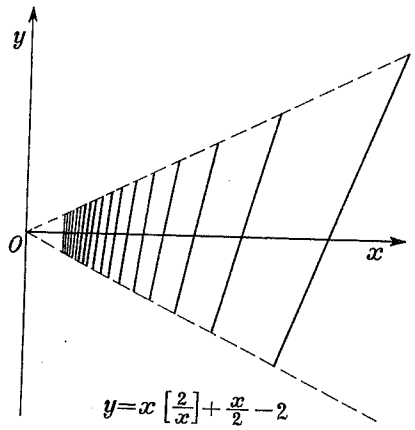
Sprawdźmy to na przykładzie funkcji $(x-2)^2$, przyjmując $a = 2$. Za ε możemy przyjąć każdą liczbę dodatnią; przyjmijmy $\varepsilon = 10$. Przyjmując $\delta = 3$ możemy łatwo sprawdzić, że dla $2 < x < 2+3$ jest $|(x-2)^2| < 10$. Gdy przyjmiemy $\varepsilon = 1$, to nie wystarczy już przyjąć $\delta = 3$, bo na przykład dla $x = 4$, a więc spełniającego nierówności $2 < x < 2+3$, wcale nie zachodzi nierówność $|(x-2)^2| < 1$. Dla $\varepsilon = 1$ można natomiast przyjąć $\delta = 1$, bo z nierówności $2 < x < 2+1$ wynika $|(x-2)^2| < 1$. Podobnie, gdy $\varepsilon = \frac{1}{10}$, to δ musimy jeszcze zmniejszyć, przyjmując na przykład $\delta = \frac{1}{4}$. Na ogół, im mniejsze ε, tym mniejsze musi być δ. Istotny sens przyjętej definicji uwydatnia się właśnie przy małych liczbach ε.

Uwaga. Subtelność definicji leży w tym, że litery ε i δ grają w niej zupełnie odmienną rolę. Za ε możemy podstawiać każdą liczbę

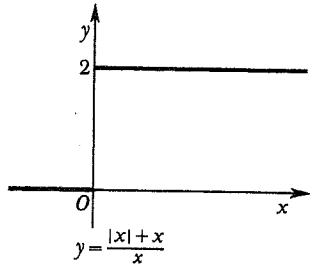
(1) Tutaj oraz w definicji funkcji ograniczonej na prawo od a zakładamy, że funkcja f jest określona dla $a < x < a+\delta_0$, gdzie $\delta_0 > 0$. (Przyp. red.)

(dodatnią), wybór zaś δ nie jest już dowolny; wiemy tylko, że istnieje odpowiednia liczba δ. Wyraz każdy nazywa się *kwantyfikatorem dużym*, wyraz istnieje nazywa się *kwantyfikatorem małym*. W trudniejszych definicjach ważne jest zdanie sobie sprawy, jakie kwantyfikatory w nich występują. Można powiedzieć, że u początkujących matematyków większość błędów polega na niewłaściwym formułowaniu kwantyfikatorów. Często na oznaczenie kwantyfikatorów używa się innych wyrazów, na przykład wszystkie, jakiekolwiek, pewien. Czasem zaś kwantyfikator jest w ogóle pominięty w tekście, a tylko z sensu należy się go domyślić. Na przykład w podanej definicji jest powiedziane, że „dla $a<x<a+\delta$ zachodzi nierówność $|f(x)|<\varepsilon$". Jaki kwantyfikator odnosi się do litery x? — Oczywiście duży. Dokładniej powiedzielibyśmy „ dla każdego x spełniającego nierówności $a<x<a+\delta$ zachodzi nierówność $|f(x)|<\varepsilon$".

Funkcja nieskończenie mała na prawo od pewnego punktu może mieć przebieg bardziej skomplikowamy niż w podanych na początku przykładach. Na przykład funkcja $x\left[\frac{2}{x}\right]+\frac{x}{2}-2$ jest nieskończenie mała na prawo od 0 (udowodnimy to w §8); jest przy tym tak skonstruowana, że w pobliżu zera przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne (rys. 6).



Rys. 6



Rys. 7

Analogicznie przyjmujemy definicję: *Funkcja f jest nieskończenie mała na lewo od a*[1]*, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba dodatnia δ, że dla $a-\delta<x<a$ zachodzi nierówność $|f(x)|<\varepsilon$.*

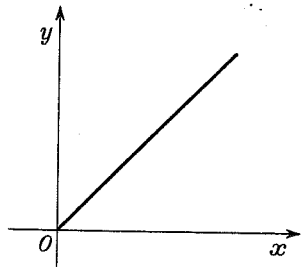
Funkcja $(x-2)^2$ jest nieskończenie mała zarówno na prawo, jak i na lewo od 2. Funkcja $(|x|+x)/x$ (rys. 7) jest nieskończenie mała na lewo od 0 (bo ma wartość 0 dla $-\delta<x<0$ przy jakimkolwiek $\delta>0$), a nie jest nieskończenie mała na prawo od 0 (bo ma wartość 2 dla $0<x<\delta$ przy jakimkolwiek $\delta>0$).

§6. Funkcje ograniczone w otoczeniu punktu

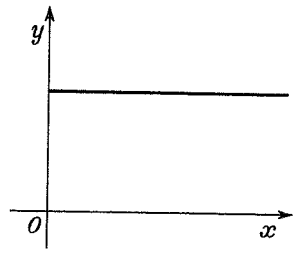
Mówimy, że *funkcja f jest ograniczona na prawo od a, gdy istnieją takie liczby dodatnie ε i δ, że dla $a<x<a+\delta$ zachodzi nierówność $|f(x)|<\varepsilon$.*

Formalna różnica między definicją funkcji nieskończenie małej a definicją funkcji ograniczonej (na prawo od a) polega tylko na tym, że w pierwszym przypadku przy ε stoi kwantyfikator duży, w drugim zaś mały. W pierwszym więc przypadku za ε możemy wziąć dowolną liczbę dodatnią, w drugim zaś tej dowolności nie ma. Wobec tego jest oczywiste

TWIERDZENIE 6.1. *Każda funkcja nieskończenie mała na prawo od a jest ograniczona na prawo od a.*



Rys. 8. Funkcja nieskończenie mała na prawo od 0

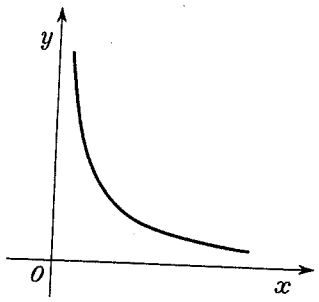


Rys. 9. Funkcja ograniczona na prawo od 0

[1]) Tutaj oraz w definicji funkcji ograniczonej na lewo od a zakładamy, że funkcja f jest określona dla $a-\delta_0<x<a$, gdzie $\delta_0>0$. (Przyp. red.)

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład funkcja $y = 1$ jest ograniczona na prawo od każdego punktu a, ale nie jest nieskończenie mała. Rysunki 8 i 9 przedstawiają funkcję ograniczoną na prawo od 0, a rysunek 10 funkcję nie ograniczoną na prawo od 0.

Analogicznie wprowadzamy definicję: *funkcja f jest ograniczona na lewo od a, gdy istnieją takie liczby dodatnie ε i δ, że dla $a-\delta < x < a$ zachodzi nierówność $|f(x)| < \varepsilon$.*



Rys. 10. Funkcja nie ograniczona na prawo od 0

§ 7. Symbole $o(1)$ i $O(1)$

Jeżeli jest ustalony punkt a i wiadomo, czy chodzi o punkty na prawo czy na lewo od a, to wygodnie jest używać symbolu

$$f(x) = o(1)$$

dla zaznaczenia, że funkcja f jest nieskończenie mała, a symbolu

$$f(x) = O(1)$$

dla zaznaczenia, że funkcja jest ograniczona. Symbole te są bardzo rozpowszechnione w nowszej literaturze matematycznej. Należy jednak pamiętać, że symboli tych nie możemy traktować jako zwykłych równości i nie możemy do nich stosować zwykłych prawideł rachunku. W szczególności, wiedząc, że $f(x) = o(1)$ i $g(x) = o(1)$, nie można stąd wyciągać wniosku, że $f(x) = g(x)$, gdyż z tego, że dwie funkcje są nieskończenie małe, nie wynika, że są sobie równe. Znaki $= o(1)$ lub $= O(1)$ określają pewną własność funkcji, ale nie charakteryzują jej

całkowicie; znaki te muszą być traktowane jako całość, a nie jako dwa symbole $=$ i $o(1)$ czy też $=$ i $O(1)$.

TWIERDZENIE 7.1. *Jest $x-a = o(1)$ na prawo i na lewo od a.*

Dowód. Mając dowolnie dane $\varepsilon > 0$, przyjmujemy $\delta = \varepsilon$. Wtedy dla $a < x < a+\delta$ i dla $a-\delta < x < a$ jest $|x-a| < \varepsilon$, co dowodzi twierdzenia.

TWIERDZENIE 7.2. *Jeżeli $|f(x)| \leqslant g(x)$, to*
1° *z $g(x) = o(1)$ wynika $f(x) = o(1)$;*
2° *z $g(x) = O(1)$ wynika $f(x) = O(1)$.*

Dowód. Gdy $|g(x)| < \varepsilon$, to wobec nierówności $|f(x)| \leqslant g(x)$ jest też $|f(x)| < \varepsilon$ i dowód jest zakończony.

Funkcję f nazywamy *stałą* dla $x_1 < x < x_2$, jeżeli każdej liczbie x spełniającej nierówności $x_1 < x < x_2$ przyporządkowuje stale tę samą liczbę. Na przykład funkcja $[x]$ jest stała dla $x_1 < x < x_2$, gdy x_1 i x_2 są liczbami całkowitymi różniącymi się o 1.

TWIERDZENIE 7.3. *Funkcja stała jest ograniczona.*
Dokładniej: *Jeżeli funkcja f jest stała dla $x_1 < x < x_2$, to $f(x) = O(1)$ na prawo i na lewo od a $(x_1 < a < x_2)$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(x) = c$ dla $x_1 < x < x_2$ i że $x_1 < a < x_2$. Przyjmijmy $\varepsilon = |c|+1$ i $\delta = a-x_1$. Wtedy dla $a-\delta < x < a$ zachodzi nierówność $|f(x)| < \varepsilon$, co oznacza ograniczoność f na lewo od a. Przyjmując zaś $\delta = x_2-a$, będziemy mieli $|f(x)| < \varepsilon$ dla $a < x < a+\delta$, co dowodzi ograniczoności na prawo od a.

TWIERDZENIE 7.4. *Funkcja stała i nieskończenie mała ma wartość 0.*
Dokładniej: *Jeżeli funkcja f jest stała dla $x_1 < x < x_2$ i $f(x) = o(1)$ (na prawo lub na lewo od pewnego punktu a $(x_1 < a < x_2)$), to $f(x) = 0$ dla $x_1 < x < x_2$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $f(x) = c$ dla $x_1 < x < x_2$ i że $x_1 < a < x_2$. Gdy $f(x) = o(1)$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ musi być $|c| < \varepsilon$, co jest możliwe tylko dla $|c| = 0$. Stąd $c = 0$.

§ 8. Algebra symboli $o(1)$ i $O(1)$

Przypuśćmy, że na lewo (lub na prawo) od pewnego punktu a jest

$$f(x) = o(1), \quad g(x) = o(1), \quad F(x) = O(1) \quad \text{i} \quad G(x) = O(1).$$

Wówczas mamy też na lewo (lub na prawo) od a

(8.1) $$f(x)+g(x) = o(1),\ f(x)-g(x) = o(1),\ f(x)g(x) = o(1);$$

(8.2) $$F(x)+G(x) = O(1),\ F(x)-G(x) = O(1),\ F(x)G(x) = O(1).$$

Wzory (8.1) wyrażają, że suma, różnica i iloczyn funkcyj nieskończenie małych są funkcjami nieskończenie małymi. Wzory (8.2) wyrażają, że suma, różnica i iloczyn funkcyj ograniczonych są funkcjami ograniczonymi.

Ponadto mamy wzory

(8.3) $$F(x)+g(x) = O(1),\ F(x)-g(x) = O(1),\ f(x)-G(x) = O(1);$$

(8.4) $$F(x)g(x) = o(1).$$

Z wzorów (8.3) wynika, że jeżeli jedna z funkcyj jest nieskończenie mała, a druga ograniczona, to ich suma i różnica są ograniczone, a iloczyn (8.4) — nieskończenie mały.

Pożyteczny jest jeszcze wzór

(8.5) $$\frac{1}{c+f(x)} = O(1) \quad \text{dla } c \neq 0.$$

Wzory (8.1)-(8.5) można napisać w następującej symbolicznej postaci:

$$o(1)+o(1) = o(1), \quad o(1)-o(1) = o(1), \quad o(1)o(1) = o(1);$$
$$O(1)+O(1) = O(1), \quad O(1)-O(1) = O(1), \quad O(1)O(1) = O(1);$$
$$O(1)+o(1) = O(1), \quad O(1)-o(1) = O(1), \quad o(1)-O(1) = O(1);$$
$$O(1)o(1) = o(1), \quad \frac{1}{c+o(1)} = O(1) \quad (c \neq 0).$$

Wszystkie te wzory udowodnimy najpierw dla prawostronnego otoczenia punktu a. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia $f(x) = o(1)$ wynika istnienie takiej liczby δ_1, że dla $a < x < a+\delta_1$ jest

(8.6) $$|f(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon;$$

podobnie z założenia $g(x) = o(1)$ wynika istnienie takiej liczby δ_2, że dla $a < x < a+\delta_2$ jest

(8.7) $$|g(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Oznaczmy przez δ mniejszą z liczb δ_1 i δ_2 (lub równą im, gdy obie są równe). Wtedy każda z nierówności (8.6) i (8.7) będzie prawdziwa dla $a < x < a+\delta$ i wobec tego na podstawie twierdzenia 4.5 będziemy mieli

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon+\tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{dla} \quad a < x < a+\delta.$$

A to dowodzi prawdziwości pierwszego ze wzorów (8.1).

Udowodnimy teraz pierwszy ze wzorów (8.2). Z założenia $F(x) = O(1)$ wynika istnienie takich liczb dodatnich ε_1 i δ_1, że dla $a < x < a+\delta_1$ jest

(8.8) $$|F(x)| < \varepsilon_1;$$

podobnie z założenia $G(x) = O(1)$ wynika istnienie takich liczb dodatnich ε_2 i δ_2, że dla $a < x < a+\delta_2$ jest

(8.9) $$|G(x)| < \varepsilon_2.$$

Jeżeli $\varepsilon = \varepsilon_1+\varepsilon_2$, a δ jest mniejszą z liczb δ_1 i δ_2, to

$$|F(x)+G(x)| \leqslant |F(x)|+|G(x)| < \varepsilon_1+\varepsilon_2 = \varepsilon \quad \text{dla} \quad a < x < a+\delta,$$

co dowodzi, że $F(x)+G(x) = O(1)$.

Udowodnimy teraz trzeci ze wzorów (8.2). Jeżeli $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2$, a δ jest mniejszą z liczb δ_1 i δ_2, to wobec (4.11), (8.8) i (8.9) mamy

$$|F(x)G(x)| = |F(x)||G(x)| < \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon \quad \text{dla} \quad a < x < a+\delta,$$

co dowodzi, że $F(x)G(x) = O(1)$.

Udowodnimy teraz wzór (8.4). Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z założenia $F(x) = O(1)$ wynika istnienie takich liczb dodatnich ε_1 i δ_1, że dla $a < x < a+\delta_1$ jest

$$|F(x)| < \varepsilon_1.$$

Z założenia $g(x) = o(1)$ wynika istnienie takiej liczby dodatniej δ_2, że

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \quad \text{dla} \quad a < x < a+\delta_2.$$

Oznaczając przez δ mniejszą z liczb δ_1 i δ_2, mamy

$$|F(x)g(x)| = |F(x)||g(x)| < \varepsilon_1 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \varepsilon \quad \text{dla} \quad a < x < a+\delta,$$

co dowodzi, że $F(x)g(x) = o(1)$.

Na podstawie udowodnionych już czterech wzorów udowodnimy pozostałe. Wobec twierdzenia 6.1 jest $f(x) = O(1)$. Wobec tego $f(x)g(x) = o(1)$ na podstawie (8.4). Tym samym trzeci ze wzorów (8.1) jest udowodniony. Ponieważ $-1 = O(1)$, więc $-g(x) = (-1)g(x) = o(1)$ i dalej $f(x)-g(x) = f(x)+(-g(x)) = o(1)$. Tym samym drugi ze wzorów (8.1) jest udowodniony. Podobnie jest $-G(x) = (-1)G(x) = O(1)$ i wobec tego $F(x)-G(x) = F(x)+(-G(x)) = O(1)$. Tym samym drugi ze wzorów (8.2) jest udowodniony. Są już zatem udowodnione wszystkie wzory (8.1) i (8.2). Ponieważ $g(x) = O(1)$ i $f(x) = O(1)$, więc z (8.2) wynikają wszystkie wzory (8.3).

Pozostaje jeszcze do udowodnienia wzór (8.5). Z $f(x) = o(1)$ wynika istnienie takiej liczby δ, że dla $a < x < a+\delta$ jest

$$|f(x)| < \tfrac{1}{2}|c|.$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia 4.5 jest

$$|c|-|f(x)| \leqslant |c+f(x)|,$$

więc dla $a < x < a+\delta$ musi być

$$\tfrac{1}{2}|c| \leqslant |c+f(x)|$$

i dalej, po pomnożeniu nierówności przez $\dfrac{2}{|c||c+f(x)|}$

$$\frac{1}{|c+f(x)|} \leqslant \frac{2}{|c|};$$

a to dowodzi wzoru (8.5).

Z powyższych dowodów otrzymamy od razu dowody dla otoczenia lewostronnego, zastępując w nich wszędzie nierówności $a < x < a+\delta$, $a < x < a+\delta_1$, $a < x < a+\delta_2$ odpowiednio przez $a-\delta < x < a$, $a-\delta_1 < x < a$, $a-\delta_2 < x < a$.

Możemy teraz łatwo udowodnić, że na prawo od 0 jest

$$f(x) = x\left[\frac{2}{x}\right]+\frac{x}{2}-2 = o(1)$$

(zob. str. 58). Istotnie, dla $x > 0$ jest $x\left(\frac{2}{x}-1\right) < x\left[\frac{2}{x}\right] \leqslant x\frac{2}{x}$, więc

$$-x < x\left[\frac{2}{x}\right]-2 \leqslant 0 < x$$

i na mocy twierdzeń 4.4, 7.2 i 7.1

$$x\left[\frac{2}{x}\right]-2 = o(1).$$

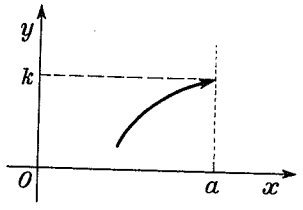
Zatem

$$f(x) = x\left[\frac{2}{x}\right]-2+\frac{1}{2}x = o(1)+O(1)o(1) = o(1)+o(1) = o(1).$$

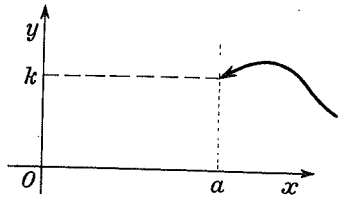
§ 9. Granica funkcji

Mówimy, że *funkcja f ma w punkcie a granicę lewostronną k, gdy $f(x)-k = o(1)$ na lewo od a* (rys. 11). Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to a-} f(x) = k \quad \text{lub krócej} \quad f(a-) = k.$$



Rys. 11. Geometryczna interpretacja granicy lewostronnej



Rys. 12. Geometryczna interpretacja granicy prawostronnej

Podobnie mówimy, że *funkcja f ma w punkcie a granicę prawostronną k, gdy $f(x)-k=o(1)$ na prawo od a* (rys. 12). Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to a+} f(x)=k \quad \text{lub krócej} \quad f(a+)=k.$$

Na przykład (rys. 13)

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=-1, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=1;$$

istotnie, dla $x<0$ jest

$$\frac{|x|}{x}-(-1)=0=o(1)$$

a dla $x>0$

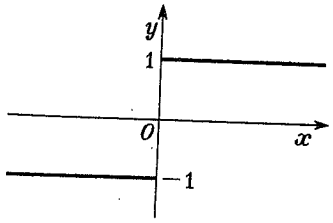
$$\frac{|x|}{x}-1=0=o(1).$$

Może się zdarzyć, że granica lewostronna jest równa prawostronnej; na przykład (rys. 14)

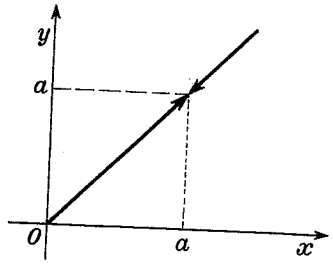
$$\lim_{x\to a-} x=a \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a+} x=a,$$

bo $x-a=o(1)$ na lewo i na prawo od a (tw. 7.1).

Jeżeli granice lewostronna i prawostronna funkcji f w punkcie a są obie równe tej samej liczbie k, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie a granicę k.



Rys. 13. Granica lewostronna i prawostronna funkcji $|x|/x$



Rys. 14. Granica lewostronna równa prawostronnej

Innymi słowy: *Funkcja f ma w punkcie a granicę k, gdy $f(x)-k=o(1)$ na lewo i na prawo od a.* Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to a} f(x)=k.$$

W szczególności jest więc

$$\lim_{x\to a} x=a.$$

Gdy $f(x)=c$ dla $x_1<x<x_2$, to

$$\lim_{x\to x_1+} f(x)=c, \qquad \lim_{x\to x_2-} f(x)=c \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} f(x)=c$$

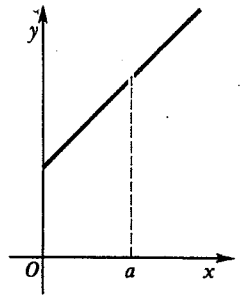
dla $x_1<a<x_2$

Innymi słowy (mniej dokładnie): *Funkcja stała o wartości c ma granicę c.*

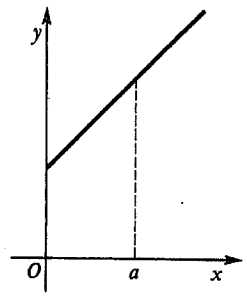
Wynika to z relacji $c-c=o(1)$.

Zwróćmy uwagę na to, że funkcja może wcale nie być określona w punkcie a, mimo że ma granicę w tym punkcie. Wypływa to z definicji funkcji nieskończenie małej na prawo lub na lewo od a, w której to definicji nie ma mowy o wartości funkcji w punkcie a. Wynika stąd również, że jeżeli dwie funkcje są identyczne poza punktem a i jeżeli choć jedna z nich ma granicę k w punkcie a, to druga ma również granicę k w punkcie a. Na przykład funkcje (rys. 15 i rys. 16)

$$y=\frac{x^2-a^2}{x-a} \quad \text{i} \quad y=x+a$$



Rys. 15. Wykres funkcji $(x^2-a^2)/(x-a)$



Rys. 16. Wykres funkcji $x+a$

są identyczne poza punktem a (w samym zaś punkcie a pierwsza z nich jest nie określona). Zamiast więc obliczać granicę pierwszej funkcji, można obliczać granicę drugiej, co wyjdzie na to samo. Łatwo zauważyć, że

$$\lim_{x\to a}(x+a) = 2a,$$

ponieważ $(x+a)-2a = x-a = o(1)$ na lewo i na prawo od a. Wobec tego jest też

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = 2a.$$

Ćwiczenie. Pokazać, że jeżeli a jest liczbą całkowitą, to $[a-] = a-1$ i $[a+] = a$.

§ 10. Działania arytmetyczne na granicach

W twierdzeniu, które teraz wypowiemy, znak lim będzie oznaczał którykolwiek z trzech symboli $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$ lub $\lim_{x\to a}$ (ale wszędzie ten sam).

TWIERDZENIE 10.1. *Jeżeli* $\lim f(x) = k$ *i* $\lim g(x) = l$, *to*

(I) $\lim\big(f(x)+g(x)\big) = k+l$,

(II) $\lim\big(f(x)-g(x)\big) = k-l$,

(III) $\lim\big(f(x)g(x)\big) = kl$;

jeżeli ponadto $l \neq 0$, *to*

(IV) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{k}{l}$.

(Słowami: *Granica sumy jest równa sumie granic; granica różnicy jest równa różnicy granic; granica iloczynu jest równa iloczynowi granic; granica ilorazu jest równa ilorazowi granic, gdy granica mianownika jest różna od zera*).

Dowód. Udowodnimy twierdzenie najpierw dla granicy prawostronnej. Wprowadzamy funkcje α i β określone wzorami

$$\alpha(x) = f(x)-k \quad \text{i} \quad \beta(x) = g(x)-l;$$

wtedy $\alpha(x) = o(1)$ i $\beta(x) = o(1)$ na prawo od a. Ponieważ $f(x) = k+\alpha(x)$ i $g(x) = l+\beta(x)$, więc korzystając z algebry symboli $o(1)$ i $O(1)$, znajdziemy

$$\big(f(x)+g(x)\big)-(k+l) = \alpha(x)+\beta(x) = o(1),$$

$$\big(f(x)-g(x)\big)-(k-l) = \alpha(x)-\beta(x) = o(1),$$

$$f(x)g(x)-kl = k\beta(x)+l\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x) = o(1),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{k}{l} = \left(\alpha(x)-\frac{k}{l}\beta(x)\right)\frac{1}{l+\beta(x)} = o(1) \qquad (l \neq 0),$$

co dowodzi twierdzenia.

W przypadku granicy lewostronnej dowód jest taki sam, należy tylko symbole $o(1)$ interpretować dla lewego otoczenia punktu a.

Ponieważ twierdzenie jest prawdziwe zarówno dla granicy lewostronnej, jak i prawostronnej, więc jest też prawdziwe w przypadku, gdy obie granice istnieją i są sobie równe. Twierdzenie jest więc udowodnione we wszystkich trzech przypadkach.

Twierdzenie to ma nie tylko teoretyczne, ale i praktyczne znaczenie, pozwala bowiem łatwo obliczać granice bardziej skomplikowanych funkcyj.

PRZYKŁAD 1. $\lim\dfrac{2x}{x^2+x-1} = 2.$

Istotnie, ponieważ $\lim x = 1$, więc $\lim x^2 = 1$ na podstawie (III), $\lim(x^2+x) = 2$ na podstawie (I), $\lim(x^2+x-1) = 1$ na podstawie (II); ponieważ $\lim 2 = 2$, więc na podstawie (III) jest $\lim 2x = 2$. Ostatecznie mamy $\lim\dfrac{2x}{x^2+x-1} = 2$ na podstawie (IV).

PRZYKŁAD 2. $\lim\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h} = -\dfrac{1}{x^2}.$

W tym przykładzie występuje litera h, która gra tę samą rolę, co litera x w poprzednim tekście, natomiast x jest dowolnie ustaloną liczbą różną od zera. Dla $h \neq 0$ jest

$$\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{-1}{x(x+h)}.$$

Stosując udowodnione twierdzenie, znajdujemy łatwo, że funkcja po prawej stronie znaku równości ma w punkcie $h=0$ granicę $-1/x^2$; wobec tego tę samą granicę ma funkcja po lewej stronie.

§ 11. Granice a nierówności

Poprzednio udowodnione twierdzenie mówiło o związkach granicy z czterema działaniami arytmetycznymi. Podamy teraz dwa twierdzenia, wiążące pojęcie granicy z nierównościami. W twierdzeniach tych również znak lim zastępuje którykolwiek z symboli $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$ lub $\lim_{x\to a}$.

TWIERDZENIE 11.1 (o zachowaniu nierówności). *Gdy* $f(x)\leqslant g(x)$ *i* $\lim f(x)=k$, $\lim g(x)=l$, *to* $k\leqslant l$.

Dowód. Gdyby było $l<k$, to mielibyśmy

$$|k-l|=k-l\leqslant g(x)-f(x)+k-l=\big(g(x)-l\big)-\big(f(x)-k\big)=o(1)$$

i wobec tego $k-l=o(1)$ (tw. 7.2, str. 61) i $k-l=0$ (tw. 7.4), co jest sprzeczne z $l<k$.

Należy szczególnie zwrócić uwagę na to, że w twierdzeniu 11.1 nie można nierówności słabych $\leqslant$ zastąpić ostrymi $<$. Na przykład gdy $f(x)=0$ i $g(x)=x$, to $f(x)<g(x)$ dla $x>0$, ale $k=0$ i $l=0$. Natomiast z nierówności ostrej $f(x)<g(x)$ możemy wnioskować zawsze, że $k\leqslant l$, bo wraz z tą nierównością jest zawsze spełniona nierówność słaba $f(x)\leqslant g(x)$.

TWIERDZENIE 11.2 (o trzech funkcjach). *Gdy* $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ *i* $\lim f(x)=k$, $\lim h(x)=k$, *to również* $\lim g(x)=k$.

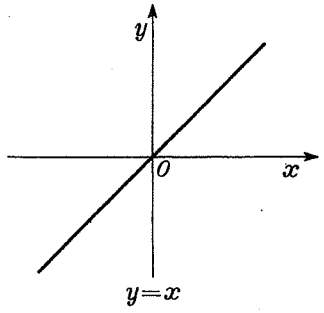
Dowód. Wobec $0\leqslant g(x)-f(x)\leqslant h(x)-f(x)=\big(h(x)-k\big)-\big(f(x)-k\big)=o(1)$ jest $g(x)-f(x)=o(1)$ (tw. 7.2), a stąd $g(x)-k=\big(g(x)-f(x)\big)+\big(f(x)-k\big)=o(1)$ i dowód zakończony.

§ 12. Ciągłość funkcji

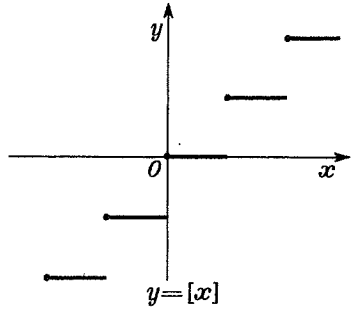
Funkcję f nazywamy *lewostronnie ciągłą w punkcie* x_0, gdy $f(x_0-)=f(x_0)$, czyli gdy granica lewostronna jest równa wartości funkcji w danym punkcie.

Podobnie, funkcję f nazywamy *prawostronnie ciągłą w punkcie* x_0, gdy $f(x_0+)=f(x_0)$, czyli gdy granica prawostronna jest równa wartości funkcji w danym punkcie.

Na przykład funkcja $y=x$ (rys. 17) jest lewostronnie i prawostronnie ciągła w każdym punkcie x_0, ponieważ $\lim_{x\to x_0-} x=x_0$ i $\lim_{x\to x_0+} x=x_0$. Funkcja $y=[x]$ (rys. 18) jest prawostronnie ciągła w każdym punkcie x_0 całkowitym, ale nie jest w nim lewostronnie ciągła, ponieważ $[x_0]=x_0$, $[x_0+]=x_0$ i $[x_0-]=x_0-1$. Pojęcie ciągłości lewostronnej (prawostronnej) w punkcie x_0 rozważamy tylko wtedy, gdy funkcja jest określona dla $x_0-\delta_0<x\leqslant x_0$ (dla $x_0\leqslant x\leqslant x_0+\delta_0$), gdzie

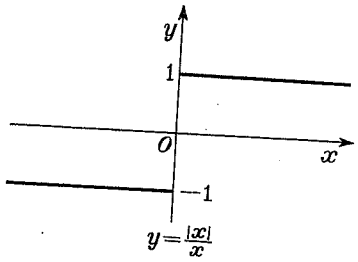


Rys. 17



Rys. 18

$\delta_0 > 0$. Jeśli funkcja nie jest określona w punkcie x_0, to mówienie o jej ciągłości względnie nieciągłości w tym punkcie nie ma sensu. Funkcja $y = x/|x|$ jest ciągła tam, gdzie jest określona, tzn. dla $x \neq 0$ (rys.19).



Rys. 19

Jeżeli rozszerzymy ją, przyjmując dla $x = 0$ wartość $y = 1$ (względnie rozszerzymy jej rozszerzenie określając $y = -1$ dla $x = 0$), to otrzymujemy funkcję prawostronnie (lewostronnie) ciągłą w punkcie zero. Jeżeli natomiast przyjmiemy dodatkowo wartość w punkcie zero różną od 1 i -1, to tak zdefiniowana nowa funkcja będzie nieciągła w punkcie 0.

Jeżeli funkcja f jest lewostronnie i prawostronnie ciągła w punkcie x_0, to nazywamy ją *ciągłą w punkcie* x_0.

A więc na przykład funkcje $y = x$ i $y = c$ (stałe) są ciągłe w każdym punkcie.

TWIERDZENIE 12.1. *Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to ich suma, różnica i iloczyn są są również funkcjami ciągłymi w punkcie x_0; jeżeli ponadto $g(x_0) \neq 0$, to iloraz f przez g jest również funkcją ciągłą w punkcie x_0.*

Twierdzenie to jest także prawdziwe w odniesieniu do lewostronnej ciągłości i prawostronnej ciągłości.

Dowód. Przypuśćmy, że f i g są prawostronnie ciągłe w x_0, to znaczy że $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$ i $\lim_{x\to x_0+} g(x) = g(x_0)$. Wtedy na podstawie twierdzenia 10.1 mamy

$$\lim_{x\to x_0+} (f(x)+g(x)) = f(x_0)+g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0+} (f(x)-g(x)) = f(x_0)-g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$$

oraz, gdy $g(x_0) \neq 0$,

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Twierdzenie jest więc udowodnione dla funkcyj prawostronnie ciągłych. W przypadku lewostronnej ciągłości dowód jest taki sam, należy tylko wszędzie zamiast x_0+ napisać x_0-. Gdy wreszcie funkcje f i g są ciągłe, czyli ciągłe lewostronnie i prawostronnie, to z tego co udowodniliśmy, wynika, że także ich suma, różnica, iloczyn i iloraz (przy wprowadzonym założeniu) są lewostronnie i prawostronnie ciągłe, czyli po prostu ciągłe.

PRZYKŁAD 1. Funkcja $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ jest ciągła dla $x \neq -\frac{2}{3}$.

PRZYKŁAD 2. Funkcja $f(h) = -\dfrac{1}{x(x+h)}$ $(x \neq 0)$ jest ciągła dla $h \neq -x$ (tutaj traktujemy h jako zmienną, a x jako ustaloną liczbę).

PRZYKŁAD 3. Funkcja $y = |x|$ jest ciągła w każdym punkcie, bo dla $x > 0$ jest równa funkcji ciągłej $y = x$, a dla $x < 0$ jest równa funkcji ciągłej $y = -x$. Ciągłość w punkcie $x = 0$ sprawdzamy bezpośrednio:

$$|0| = 0, \quad \lim_{x\to 0-} |x| = \lim_{x\to 0-} (-x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+} |x| = \lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Ćwiczenie. Podać w jakich punktach są ciągłe funkcje:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|}, \quad f(h) = \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{25}h, \quad f(h) = 2x+h.$$

§ 13. Potęgi

Potęgę a^n definiujemy (przy naturalnym wykładniku n) wzorami

$$a^1 = a, \quad a^{p+1} = a^p a \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, \ldots \tag{13.1}$$

Symbol $p = 1, 2, \ldots$ ma oznaczać, że w poprzednim wzorze za p można podstawić dowolne liczby naturalne.

W szczególności więc mamy

$$a^2 = a^1 a = aa, \quad a^3 = a^2 a = aaa, \quad a^4 = a^3 a = aaaa.$$

Wzory (13.1) przedstawiają tak zwaną *indukcyjną* (lub *rekurencyjną*) *definicję* potęgi a^n.

Definicji indukcyjnej używamy wtedy, gdy chcemy określić znaczenie symbolu zawierającego literę n, za którą można podstawić liczby naturalne. Ogólnie, jakiś symbol S_n definiujemy indukcyjnie w następujący sposób.

(I) Definiujemy symbol S_1.

(II) Definiujemy symbol S_{p+1} za pomocą symbolu S_p dla naturalnych liczb p.

TWIERDZENIE 13.1. *Funkcja* $y = x^n$ (n *naturalne*) *jest ciągła w każdym punkcie.*

Dowód. 1° Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$, gdyż funkcja $y = x^1$, czyli funkcja $y = x$, jest ciągła; 2° Jeżeli funkcja $y = x^p$ jest ciągła, to również funkcja $y = x^p x$, czyli $y = x^{p+1}$, jest ciągła (tw. 12.1).

Przez indukcję wynika, że funkcja $y = x^n$ jest ciągła dla każdego n naturalnego.

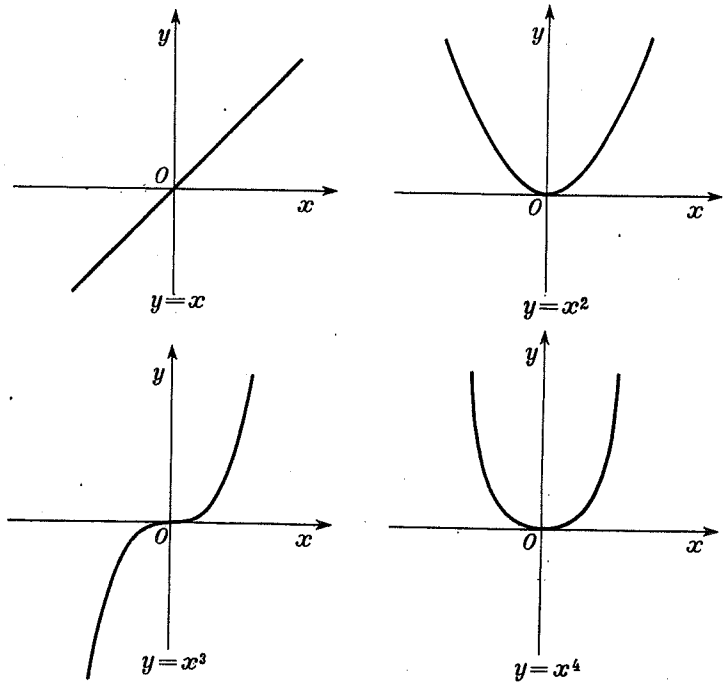
Funkcję $y = x^n$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ przedstawia rysunek 20.

Potęgę uogólniamy na dowolne wykładniki całkowite, przyjmując, że

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{dla } a \neq 0 \text{ i } n \text{ naturalnego.}$$

Założenie $a \neq 0$ jest konieczne w ostatnim wzorze, gdyż dla $a = 0$ mielibyśmy po prawej stronie $-\frac{1}{0}$. Podobne zastrzeżenie dla wzoru $a^0 = 1$ jest zbyteczne i niewygodne, zwłaszcza w teorii szeregów potęgowych (str. 128), w szczególności więc przyjmujemy, że $0^0 = 1$.



Rys. 20

Ćwiczenia. 1. Udowodnić wzory:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2.$$

2. Udowodnić, że gdy $a > 0$, to $a^n > 0$ dla każdego n całkowitego.

3. Udowodnić, że $|(-1)^n| = 1$ dla każdego n całkowitego.

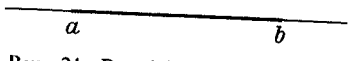
4. W jakich punktach jest ciągła funkcja $\frac{x^3-3x+2}{x-1}$?

§ 14. Przedziały otwarte i domknięte

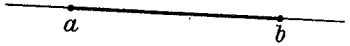
Przedziałem otwartym (a, b) nazywamy zbiór wszystkich liczb x spełniających nierówności $a < x < b$. Gdy do takiego przedziału dołączymy jeszcze liczby a i b, to otrzymamy *przedział domknięty* $[a, b]$.

Przedział domknięty $[a, b]$ jest więc zbiorem liczb x spełniających nierówności $a \leqslant x \leqslant b$. Liczby a i b nazywamy *końcami* przedziału $[a, b]$; liczby x, spełniające nierówności $a < x < b$ są *punktami wewnętrznymi* przedziału $[a, b]$.

Przedziały otwarte i domknięte mają prostą interpretację geometryczną. Są to odcinki zawarte między punktami a i b osi liczbowej; przedział otwarty jest to odcinek bez końców (rys. 21), a przedział domknięty jest to odcinek z końcami (rys. 22).



Rys. 21. Przedział otwarty (a, b)



Rys. 22. Przedział domknięty $[a, b]$

Do przedziałów otwartych zalicza się też *przedziały nieskończone* (a, ∞), $(-\infty, b)$ i $(-\infty, \infty)$. Pierwszy z nich oznacza zbiór liczb $x > a$, drugi zbiór liczb $x < b$, wreszcie trzeci zbiór wszystkich liczb.

W przedziale otwartym nie istnieje liczba najmniejsza ani liczba największa. W przedziale domkniętym $[a, b]$ liczba a jest liczbą najmniejszą, a b największą. Będziemy zawsze przyjmowali, że $a < b$ (to znaczy, że przedział nie redukuje się do punktu).

Oprócz przedziałów otwartych i domkniętych można też rozważać przedziały, które są z jednej strony otwarte, z drugiej zaś domknięte.

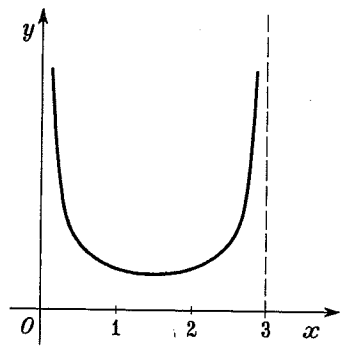
§ 15. Funkcje ciągłe w przedziale

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w przedziale otwartym* (a, b), gdy jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w przedziale domkniętym* $[a, b]$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału i jeżeli ponadto jest prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie w punkcie b.

Na przykład funkcja $1/(x(3-x))$ podana na rysunku 23 jest ciągła w przedziale $(0, 3)$, ale nie daje się jej rozszerzyć na przedział $[0, 3]$ z zachowaniem ciągłości. Jest natomiast oczywiście ciągła w przedziale $[1, 2]$.

Z definicji wynika, że *jeżeli funkcja jest ciągła w pewnym przedziale, to jest też ciągła w każdym przedziale w nim zawartym.*



$$y = \frac{1}{x(3-x)}$$

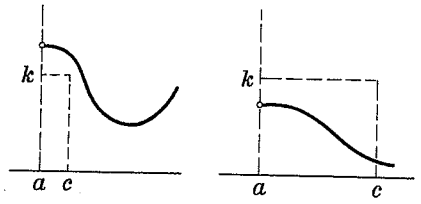
Rys. 23

Udowodnimy twierdzenie:

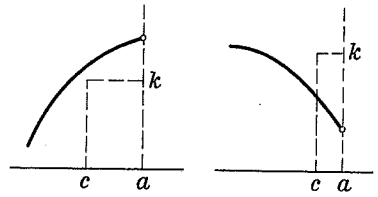
TWIERDZENIE 15.1. *Jeżeli funkcja jest prawostronnie ciągła w punkcie a i w tym punkcie zachodzi nierówność $f(x) > k$ lub $f(x) < k$, to ta sama nierówność zachodzi w pewnym przedziale $[a, c]$. Podobnie, jeżeli funkcja jest lewostronnie ciągła w punkcie a i w punkcie tym zachodzi nierówność $f(x) > k$ lub $f(x) < k$, to ta sama nierówność zachodzi w pewnym przedziale $[c, a]$.*

Własności te mają prostą interpretację geometryczną (rys. 24 i rys. 25).

Dowód. Jeżeli funkcja jest prawostronnie ciągła w a, to $f(a+) = f(a)$ i $f(x)-f(a) = o(1)$ na prawo od a. Gdy $f(a) > k$, to istnieje



Rys. 24. Funkcje prawostronnie ciągłe w punkcie a



Rys. 25. Funkcje lewostronnie ciągłe w punkcie a

takie $\delta > 0$, że dla $a < x < a+\delta$ jest $|f(x)-f(a)| < f(a)-k$, i w konsekwencji $f(x) > k$. Przyjmując za c jakąkolwiek liczbę między a i $a+\delta$, będziemy mieli $f(x) > k$ w całym przedziale $[a, c]$.

Gdy $f(a) < k$, to istnieje takie $\delta > 0$, że dla $a < x < a+\delta$ jest $|f(x)-f(a)| < k-f(a)$, i w konsekwencji $f(x) < k$. Przyjmując za c jakąkolwiek liczbę między a i $a+\delta$, będziemy mieli $f(x) < k$ w całym przedziale $[a, c]$.

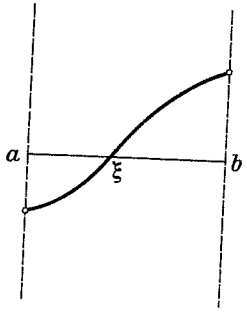
Jeżeli funkcja jest lewostronnie ciągła, to dowody są takie same; należy w nich tylko zastąpić nierówności $a < x < a+\delta$ przez $a-\delta < x < a$, liczbę $a+\delta$ przez $a-\delta$ i przedział $[a, c]$ przez $[c, a]$.

Jeżeli funkcja jest ciągła, to wykres jej możemy zrobić jednym pociągnięciem przez całą długość przedziału nie odgrywając ołówka od papieru. Takie intuicyjne pojmowanie ciągłości pozwala łatwo przewidzieć następującą własność funkcji ciągłej:

TWIERDZENIE 15.2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w $[a, b]$ i jeżeli $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, to istnieje wewnątrz $[a, b]$ taki punkt ξ, że $f(\xi) = 0$.*

Ścisły dowód nie jest łatwy i opiera się na zasadzie Dedekinda.

Dowód. Oznaczmy przez ξ kres górny zbioru Z, złożonego z liczb przedziału $[a, b]$, w których funkcja jest ujemna (rys. 26). Udowodnimy, że $f(\xi) = 0$. Gdyby było $f(\xi) < 0$, to mielibyśmy $\xi < b$, bo $f(b) > 0$. Z twierdzenia 15.1 wynikałoby, że $f(x) < 0$ w pewnym przedziale $[\xi, c]$ i punkt ξ nie byłby kresem górnym zbioru Z. Gdyby było $f(\xi) > 0$, to mielibyśmy $a < \xi$, bo $f(a) < 0$. Z twierdzenia 15.1 wynikałoby, że $f(x) > 0$ w pewnym przedziale $[c, \xi]$ i znowu punkt ξ nie byłby kresem zbioru Z. Pozostaje więc jedyna możliwość



Rys. 26

$f(\xi) = 0$. Ponieważ $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$, więc oczywiście punkt ξ musi leżeć wewnątrz $[a, b]$.

Na przykład funkcja x^5+x-1 jest ciągła w przedziale $[0, 1]$ i przyjmuje na jego końcach wartości -1 i 1. Wynika stąd istnienie wewnątrz przedziału $[0, 1]$ liczby ξ spełniającej równanie

$$\xi^5+\xi-1 = 0.$$

Twierdzenie 15.2 pozwala więc wnioskować o istnieniu rozwiązań pewnych równań, choćby efektywne rozwiązanie tego równania, to znaczy wskazanie liczby spełniającej to równanie, było trudne.

Łatwym wnioskiem z twierdzenia 15.2 jest następujące

TWIERDZENIE 15.3 (o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie). *Jeżeli funkcja f jest ciągła w $[a, b]$ i $f(a) \neq f(b)$, to dla każdej liczby μ zawartej między $f(a)$ i $f(b)$ istnieje wewnątrz $[a, b]$ taki punkt ξ, że $f(\xi) = \mu$.*

Dowód. Gdy $f(a) < \mu < f(b)$, to funkcja $f_1(x) = f(x)-\mu$ jest ujemna w punkcie a i dodatnia w punkcie b. Ponieważ jest ciągła, więc na podstawie twierdzenia 15.2 istnieje wewnątrz $[a, b]$ taki punkt ξ, że $f_1(\xi) = 0$, i w konsekwencji $f(\xi) = \mu$.

Gdy $f(a) > \mu > f(b)$, to wprowadzamy funkcję $f_1(x) = \mu-f(x)$ i dalszy dowód przeprowadzamy dokładnie tak, jak poprzednio.

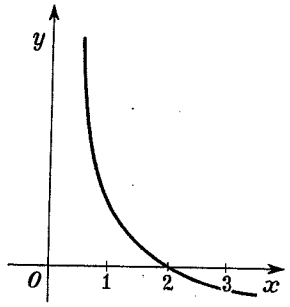
§ 16. Funkcje ograniczone

W § 6 mówiliśmy o ograniczoności funkcji na lewo lub na prawo od pewnego punktu. Jest to własność lokalna, charakteryzująca zachowanie się funkcji w pobliżu jakiegoś punktu. Wprowadzimy analogiczną własność integralną odnoszącą się do pewnego określonego przedziału.

Mówimy, że funkcja f jest *ograniczona* w pewnym przedziale, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia M, że dla wszystkich punktów tego przedziału zachodzi nierówność

$$|f(x)| < M.$$

Na przykład funkcja $f(x)=\frac{2}{x}-1$ jest ograniczona w przedziale (1, 3), ponieważ dla wszystkich punktów tego przedziału zachodzi nierówność $|f(x)|<1$. Nie jest natomiast ograniczona w przedziale (0, 3), gdyż jakąkolwiek weźmiemy liczbę $M>0$, to $f\left(\frac{2}{M+2}\right)=M+1$, przy czym punkt $\frac{1}{M+2}$ leży wewnątrz przedziału (rys. 27).



$y=\frac{2}{x}-1$

Rys. 27

TWIERDZENIE 16.1. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w nim ograniczona.*

Dowód. Ponieważ $f(a)-1<f(a)<f(a)+1$, więc z twierdzenia 15.1 wynika, że w pewnym przedziale $[a, c_1]$ jest $f(a)-1<f(x)<f(a)+1$ i $|f(x)|<|f(a)|+1$, co oznacza, że funkcja f jest ograniczona w $[a, c_1]$. Oczywiście funkcja f jest ograniczona także w każdym przedziale zawartym w $[a, c_1]$.

Oznaczmy przez ξ kres górny zbioru Z wszystkich liczb $c \leqslant b$ o tej własności, że f jest ograniczona w $[a, c]$. Jest oczywiście $a<\xi \leqslant b$. Ponieważ

$$f(\xi)-1<f(\xi)<f(\xi)+1, \tag{16.1}$$

więc w pewnym przedziale $[c, \xi]$ jest $f(\xi)-1<f(x)<f(\xi)+1$ i

$$|f(x)|<|f(\xi)|+1. \tag{16.2}$$

Ale w przedziale $[a, c]$ jest $|f(x)|<M_1$ przy odpowiednio dobranej liczbie M_1. Oznaczając przez M większą z liczb M_1 i $|f(\xi)|+1$ będziemy mieli w całym przedziale $[a, \xi]$

$$|f(x)|<M. \tag{16.3}$$

Gdyby było $\xi<b$, to wobec (16.1) nierówność (16.2) zachodziłaby jeszcze w pewnym przedziale $[\xi, c_2]$. W konsekwencji nierówność (16.3) zachodziłaby w całym przedziale $[a, c_2]$. Zatem funkcja f byłaby ograniczona w przedziale $[a, c_2]$ większym od $[a, \xi]$, co się sprzeciwia założeniu, że ξ jest kresem górnym zbioru Z. Musi więc być $\xi=b$.

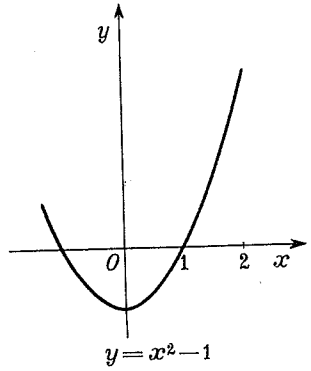
Wobec tego nierówność zachodzi w całym przedziale $[a, b]$, czyli funkcja jest w tym przedziale ograniczona.

§ 17. Najmniejsza i największa wartość funkcji

Najmniejsza wartość funkcji

$$y=x^2-1$$

w przedziale $[0, 2]$ wynosi -1, największa zaś 3 (rys. 28). Natomiast w przedziale otwartym $(0, 2)$ funkcja przyjmuje na podstawie twierdzenia 16.3 każdą wartość pośrednią między -1 a 3 i tylko te wartości, gdyż prosty rachunek wykazuje, że jest $-1<x^2-1<3$ dla $0<x<2$. Zatem zbiór wartości, które rozważana funkcja przyjmuje



$y=x^2-1$

Rys. 28

w przedziale otwartym $(0, 2)$, jest znowu przedziałem otwartym, mianowicie przedziałem $(-1, 3)$. Stąd wynika, że funkcja w przedziale $(0, 2)$ nie ma wartości najmniejszej ani największej.

TWIERDZENIE 17.1. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym przyjmuje w nim wartość najmniejszą i wartość największą.*

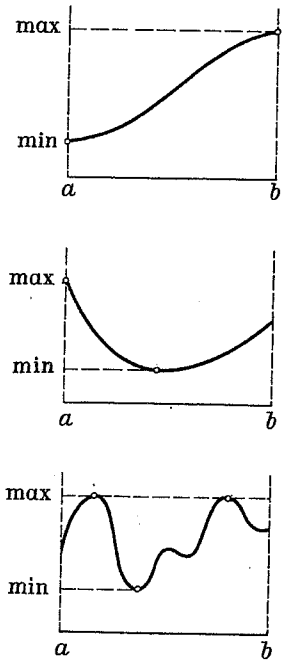
Dowód. Niech W oznacza zbiór wartości danej funkcji w przedziale $[a, b]$. Zbiór W jest ograniczony na podstawie twierdzenia 16.1. Oznaczmy jego kres górny przez K. Przypuśćmy, że $f(x) < K$ dla każdego x z przedziału $[a, b]$. Wtedy $K-f(x) > 0$ w $[a, b]$ i wobec tego też

$$\frac{1}{K-f(x)} > 0.$$

Funkcja $\frac{1}{K-f(x)}$ jest ciągła w $[a, b]$, a więc na podstawie twierdzenia 16.1 istnieje taka liczba dodatnia M, że $\frac{1}{K-f(x)} < M$ w $[a, b]$. Stąd $f(x) < K-\frac{1}{M}$ w $[a, b]$, co zaprzecza założeniu, że K jest kresem górnym. A więc funkcja przyjmuje w $[a, b]$ wartość największą K.

Oznaczmy teraz przez k kres dolny zbioru Z i przypuśćmy, że $f(x) > k$ w $[a, b]$. Wtedy funkcja $\frac{1}{f(x)-k}$ jest dodatnia i ciągła w $[a, b]$ i jest $\frac{1}{f(x)-k} < M$ dla odpowiednio dobranego $M > 0$. Stąd $f(x) > k+\frac{1}{M}$ w $[a, b]$, co zaprzecza założeniu, że k jest kresem dolnym. A więc funkcja przyjmuje w $[a, b]$ wartość najmniejszą k.

Najmniejsza wartość funkcji często jest nazywana *minimum*, a największa wartość *maksimum*. Maksimum i minimum obejmujemy też wspólną nazwę *ekstremum*. Przykłady podane na rysunku 29 wykazują, że funkcja może przyjmować swe ekstrema zarówno na końcach, jak i wewnątrz przedziału.



Rys. 29

§ 18. Bezpośrednia definicja ciągłości funkcji

Podane poprzednio definicje ciągłości opierały się na pojęciu granicy. Czasem wygodnie jest korzystać z następujących bezpośrednich definicyj:

Funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie a, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jest $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ dla $a < x < a+\delta$.

Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie a, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jest $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ dla $a-\delta < x < a$.

Funkcja f jest ciągła w punkcie a, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jest $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ dla $|x-a| < \delta$.

Udowodnimy równoważność tych definicyj z podanymi poprzednio. Załóżmy najpierw, że funkcja jest prawostronnie ciągła według dawnej definicji, to znaczy $f(a+)=f(a)$ i wobec tego $f(x)-f(a)=o(1)$ na prawo od a. Wobec definicji symbolu $o(1)$ dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, że dla $a<x<a+\delta$ jest $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Zatem funkcja jest też ciągła prawostronnie według nowej definicji. Załóżmy teraz, że funkcja jest ciągła według nowej definicji. Wtedy jest $f(x)-f(a)=o(1)$ na prawo od a i wobec tego $f(a+)=f(a)$, co dowodzi ciągłości prawostronnej według dawnej definicji.

Dowód równoważności definicji dla ciągłości lewostronnej jest taki sam, należy tylko zastąpić symbol $a+$ przez $a-$, wyrazy „na prawo" wyrazami „na lewo" i nierówność $a<x<a+\delta$ przez $a-\delta<x<a$.

Jeżeli funkcja jest ciągła (obustronnie) według dawnej definicji, to jest też ciągła prawostronnie i lewostronnie. Wobec tego co udowodniliśmy, istnieją takie liczby δ_1 i δ_2, że $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ dla $a-\delta_1<x<a$ i dla $a<x<a+\delta_2$. Biorąc za δ mniejszą z liczb δ_1 i δ_2, będziemy mieli $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ dla $a-\delta<x<a+\delta$, czyli dla $|x-a|<\delta$. A to oznacza ciągłość według nowej definicji. Jeżeli wreszcie założymy, że funkcja jest ciągła według nowej definicji, to dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, że nierówność $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ zachodzi dla $|x-a|<\delta$, a zatem dla $a-\delta<x<a$ i $a<x<a+\delta$. Wobec tego funkcja jest ciągła lewostronnie i prawostronnie, a tym samym ciągła według dawnej definicji.

§ 19. Funkcje złożone

Gdy mamy dwie funkcje f i g, to można z nich utworzyć *funkcję złożoną* $f\circ g$, przyjmując $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. W tradycyjnym znakowaniu, gdy dane funkcje są określone wzorami $y=f(t)$ i $t=g(x)$, to funkcja złożona dana jest wzorem $y=f(g(x))$.

Na przykład, gdy $y=|t|$, $t=x^2-x$, to funkcję złożoną można napisać w postaci $y=|x^2-x|$, gdy zaś $y=t^2-t$, $t=|x|$, to funkcję złożoną można napisać w postaci $y=x^2-|x|$ (bo $|x|^2=x^2$).

TWIERDZENIE 19.1. *Jeżeli $y=f(t)$ jest funkcją ciągłą w punkcie t_0 i $\lim_{x\to a} g(x)=t_0$, to*

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(t_0). \tag{19.1}$$

Twierdzenie to jest również prawdziwe, gdy zastąpimy w nim symbol $x\to a$ przez $x\to a+$ lub przez $x\to a-$.

Dowód. Udowodnimy twierdzenie najpierw dla granicy prawostronnej. Z ciągłości funkcji f wynika, że dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\delta_0>0$, że z nierówności $|t-t_0|<\delta_0$ wynika $|f(t)-f(t_0)|<\varepsilon$. Z $\lim_{x\to a+} g(x)=t_0$ wynika, że do każdej liczby $\delta_0>0$ można dobrać taką liczbę $\delta>0$, że z nierówności $a<x<a+\delta$ wynika $|g(x)-t_0|<\delta_0$. Gdy więc dobierzemy δ_0 w zależności od ε, a δ w zależności od δ_0, to wtedy dla danego ε z nierówności $a<x<a+\delta$ będzie wynikało, że $|f(g(x))-f(t_0)|<\varepsilon$, co dowodzi, że $\lim_{x\to a+} f(g(x))=f(t_0)$.

Dowód dla granicy lewostronnej jest taki sam, należy w nim tylko zastąpić $a+$ przez $a-$, a nierówności $a<x<a+\delta$ przez $a-\delta<x<a$.

Ponieważ twierdzenie jest prawdziwe zarówno dla granicy prawostronnej, jak i dla granicy lewostronnej, to jest też prawdziwe dla granicy obustronnej i dowód jest zakończony.

Równość (19.1) można też napisać w postaci

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right);$$

podobnie dla granicy prawostronnej i lewostronnej. Sens więc twierdzenia jest taki, że znak lim można wciągnąć pod znak funkcji f, o ile tylko ta funkcja jest ciągła w punkcie $t_0=\lim_{x\to a} g(x)$. Dzięki temu można wygodnie obliczać granice funkcyj złożonych. Na przykład

$$\lim_{x\to a}|x^2-b|=\left|\lim_{x\to a}(x^2-b)\right|=|a^2-b|,$$

gdyż moduł jest wszędzie funkcją ciągłą.

Natomiast dla funkcji $[t]$ rachunek

$$\lim_{x\to 0}[-x^2] = [\lim_{x\to 0}(-x^2)] = [0] = 0$$

byłby błędny, bo $[-x^2] = -1$ dla $-1 < x < 0$ i dla $0 < x < 1$, wobec czego jest $\lim_{x\to 0}[-x^2] = -1$. Błędność pochodzi stąd, że funkcja $[x]$ nie jest ciągła w punkcie $\lim_{x\to 0}(-x^2)$, to znaczy w punkcie 0.

TWIERDZENIE 19.2. *Jeżeli funkcja g jest ciągła w punkcie a, funkcja zaś f jest ciągła w punkcie $t_0 = g(a)$, to funkcja złożona $\varphi = f \circ g$ jest również ciągła w punkcie a.*

Krótko, lecz mniej ściśle, można to twierdzenie wyrazić słowami: *Funkcja złożona z dwóch funkcyj ciągłych jest ciągła.*

Dowód. Na podstawie poprzedniego twierdzenia jest $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$, co oznacza właśnie ciągłość $f(g(x))$ w punkcie a.

W szczególnym przypadku, gdy $g(x) = a+x$, z ciągłości f w punkcie a wynika ciągłość funkcji złożonej $\varphi(x) = f(a+x)$ w punkcie 0. Na odwrót, funkcję $f(x)$ można znowu uważać za funkcję złożoną, mianowicie $f(x) = \varphi(x-a)$. Z ciągłości funkcji φ w punkcie 0 wynika ciągłość funkcji f w punkcie a. Zatem ciągłość funkcji f w punkcie a jest równoważna z ciągłością φ w punkcie 0, czyli z warunkiem $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \varphi(0)$ lub, co na jedno wychodzi, z warunkiem

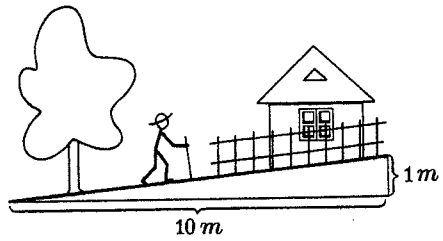
$$\lim_{x\to 0} f(a+x) = f(a).$$

Funkcja f jest więc ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi powyższa równość.

Funkcja złożona może być określona tylko w tych punktach, w których jest określona funkcja wewnętrzna, ale nie koniecznie we wszystkich. Rozpatrzmy następujący przykład. Niech $y = 1/t$ i $t = 1-|x|/x$. Każda z tych funkcyj jest określona dla wszystkich wartości argumentu z wyjątkiem zera. Natomiast funkcja złożona $y = \dfrac{1}{1-|x|/x}$, czyli funkcja $y = \dfrac{x}{x-|x|}$ jest określona tylko dla ujemnych wartości x (bo dla innych mianownik jest równy zeru). Zbiór określoności funkcji złożonej został zwężony przez to, że dla $x \geqslant 0$ funkcja $t = 1-|x|/x$ przyjmuje wartość zero, która nie należy do zbioru określoności funkcji $y = 1/t$ [1].

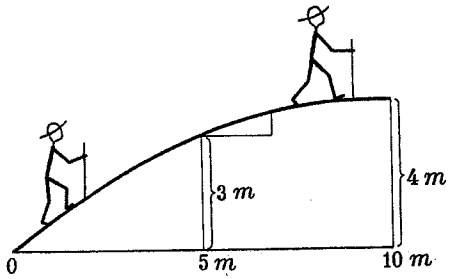
§ 20. Stromość i prędkość

Droga wyobrażona na rysunku 30 wznosi się w górę. Człowiek idący tą drogą wznosi się o 1 m na każde 10 m przebyte w kierunku poziomym. Mówimy, że stromość drogi wynosi $\frac{1}{10}$. Aby znaleźć stromość niekoniecznie musimy brać 10-metrowy odcinek drogi. Zauważywszy na przykład, że na każde 5 m przebyte w kierunku poziomym podróżny wznosi się o $\frac{1}{2}$ m, znajdziemy stromość, dzieląc liczbę $\frac{1}{2}$ przez 5, co znowu daje $\frac{1}{10}$. Iloraz wyrażający stromość drogi nie zależy od długości rozpatrywanego odcinka drogi.



Rys. 30

Inaczej ma się sprawa, gdy droga w różnych punktach jest różnie nachylona, jak na rysunku 31. Średnią stromość drogi na 10-metrowym



Rys. 31

[1] Obecnie często definiuje się złożenie dwóch funkcyj, zakładając, że zbiór wartości funkcji wewnętrznej jest zawarty w zbiorze określoności funkcji zewnętrznej. (Przyp. red.).

odcinku przedstawionym na rysunku obliczymy biorąc stosunek wzniesienia do jego długości, co daje w tym przypadku $\frac{2}{5}$. Gdy natomiast weźmiemy pod uwagę tylko drugą połowę drogi, to średnia stromość wypadnie $\frac{1}{5}$, a więc mniejsza.

Z rysunku widać, że stromość jest największa na samym początku drogi, a potem stopniowo maleje. Intuicyjnie można z każdym punktem drogi związać pewną stromość. Jak ją wyrazić liczbowo?

Przypuśćmy, że kształt drogi (rys. 31) w przedziale $[0, 10]$ dany jest w przybliżeniu przez funkcję

$$f(x) = \tfrac{4}{5}x - \tfrac{1}{25}x^2.$$

Chcemy znaleźć stromość np. w punkcie $x = 5$. W tym punkcie wzniesienia wynosi $f(5) = 3$. Gdy się posuniemy w prawo w kierunku poziomym o długość h, to wzniesiemy się do wysokości

$$f(5+h) = \tfrac{4}{5}(5+h) - \tfrac{1}{25}(5+h)^2 = 3 + \tfrac{2}{5}h - \tfrac{1}{25}h^2.$$

Różnica wysokości wynosi

$$f(5+h) - f(5) = \tfrac{2}{5}h - \tfrac{1}{25}h^2,$$

a średnia stromość na rozpatrywanym odcinku drogi

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{2}{5} - \frac{1}{25}h.$$

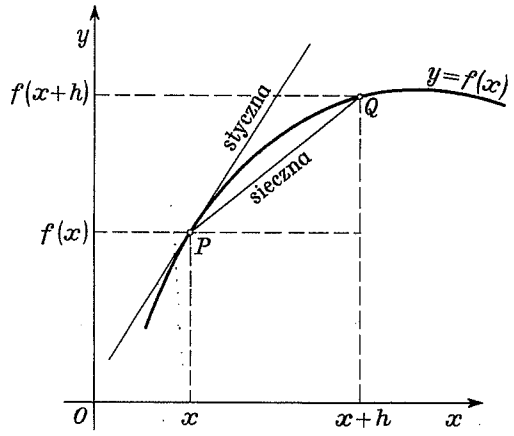
Gdy h dąży do zera, to w granicy dostaniemy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{2}{5}.$$

Liczbę $\frac{2}{5}$ uważamy za stromość drogi w punkcie $x = 5$.

Stromość krzywej w danym punkcie możemy też interpretować jako stromość stycznej w tym punkcie. Jeżeli dla pewnej funkcji $f(x)$ (rys. 32) obliczymy jak poprzednio średnią stromość między punktami x i $x+h$, to znajdziemy

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$



Rys. 32

Jest to zarazem stromość siecznej, łączącej punkty P i Q. Gdy punkt P jest nieruchomy, a punkt Q zbliża się do P, to stopniowo sieczna zbliża się do stycznej w punkcie P. Stromość tej stycznej znajdziemy więc, obliczając granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Przypuśćmy, że pociąg wyjeżdża ze stacji. Jego odległość od stacji oznaczmy przez y. Jest ona funkcją czasu t, możemy więc napisać

$$y = f(t).$$

Między chwilą t a $t+h$ średnia prędkość pociągu wynosi

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

Granica

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

wyraża prędkość · ągu w chwili t.

§ 21. Pochodna

Granicę

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{21.1}$$

nazywamy *pochodną funkcji f w punkcie x* i oznaczamy $f'(x)$. Jeżeli $f'(x)$ istnieje, to funkcję f nazywamy *różniczkowalną w punkcie x*. Przypisując każdemu punktowi x, w którym funkcja f jest różniczkowalną, liczbę $f'(x)$, otrzymujemy nową funkcję, którą oznaczamy f' i nazywamy *pochodną funkcji f*.

PRZYKŁAD 1. Gdy $f(x) = 1/x$ $(x \neq 0)$, to

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}.$$

PRZYKŁAD 2. Gdy $f(x) = x$, to $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = 1$.

PRZYKŁAD 3. Gdy funkcja jest stała $f(x) = c$, to $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$.

Przykłady 2 i 3 są szczególnie ważne, gdyż stanowią podstawę do obliczania wielu innych pochodnych. Dlatego należy je dobrze zapamiętać.

Obliczanie pochodnych nazywa się często *różniczkowaniem.*

Ćwiczenia. 1. Obliczyć na podstawie definicji pochodne funkcyj

$$y = x-2, \quad y = x^2 \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{x^2}.$$

2. Znaleźć stromość stycznych do krzywych $y = \frac{1}{x^2}$ i $y = x^2$ w punkcie o współrzędnych $x = 1$, $y = 1$.

§ 22. Różniczkowalność a ciągłość

Związek między różniczkowalnością a ciągłością funkcji wyraża

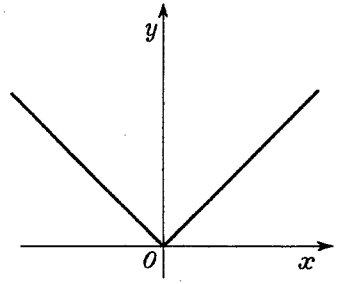
TWIERDZENIE 22.1. *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym punkcie, to jest w nim ciągła.*

Dowód. Istotnie, mamy

$$f(x+h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}h + f(x).$$

Gdy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to przy $h\to 0$ pierwszy czynnik iloczynu po prawej stronie dąży do $f'(x)$, a drugi do 0, więc iloczyn dąży do $f'(x)\cdot 0$, czyli do 0. Drugi składnik sumy, jako stały, dąży do $f(x)$, więc $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, co wobec § 19 (str. 84) daje ciągłość funkcji f w punkcie x.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład funkcja $y = |x|$ przedstawiona na rysunku 33 jest ciągła, ale nie ma pochodnej w punkcie 0, bo iloraz różnicowy $\frac{|0+h|-|0|}{h}$ jest równy -1 na lewo od 0 a 1 na prawo od 0. Nie ma więc granicy w punkcie 0. Jest to też widoczne z wykresu tej funkcji. Krzywa ma ostrze w punkcie 0 i nie istnieje tu styczna.



$y=|x|$

Rys. 33

§ 23. Różniczkowanie iloczynu

Mamy następujące

TWIERDZENIE 23.1. (reguła różniczkowania iloczynu). *Iloczyn $\varphi = fg$ dwóch funkcyj f i g różniczkowalnych w punkcie x jest w tym punkcie różniczkowalny i zachodzi wzór*

$$\varphi'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x). \tag{23.1}$$

Tę regułę różniczkowania iloczynu można napisać krócej

$$(fg)' = f'g+fg'.$$

Dowód. Wychodzimy z równości

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Gdy $h\to 0$, to czynnik $g(x+h)$ w ostatnim wierszu dąży do $g(x)$, gdyż funkcja g jako różniczkowalna jest ciągła. Wobec tego w granicy dostajemy wzór (23.1).

Stosując regułę różniczkowania iloczynu, mamy kolejno

$$(x^2)' = (xx)' = 1x+x1 = 2x,$$

$$(x^3)' = (x^2x)' = 2xx+x^21 = 3x^2.$$

Ogólnie dla każdej liczby naturalnej n

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{23.2}$$

Istotnie, wzór tej jest prawdziwy dla $n = 1$, bo $x^1 = x$, $x^0 = 1$ (zob. § 13, str. 74) i $(x)' = 1$. Przypuśćmy, że wzór został już udowodniony dla pewnej liczby naturalnej p. Wtedy

$$(x^{p+1})' = (x^px)' = (x^p)'x+x^p1 = px^{p-1}x+x^p1 = (p+1)x^p.$$

Przez indukcję wynika prawdziwość wzoru dla wszystkich naturalnych n.

Gdy funkcja f jest stała w rozważanym przedziale $f(x) = c$, to ze wzoru (23.1) mamy $\varphi'(x) = 0\cdot g(x)+cg'(x) = cg'(x)$. Mamy więc wzór (bardzo ważny w rachunkach)

$$(cg)' = cg' \quad (c \text{ stała}). \tag{23.3}$$

Ćwiczenie. Udowodnić wzór (23.3), opierając się bezpośrednio na definicji pochodnej.

§ 24. Różniczkowanie sumy i różnicy

Mamy następujące

TWIERDZENIE 24.1 (reguła różniczkowania sumy). *Suma $\varphi = f+g$ funkcyj f i g różniczkowalnych w punkcie x jest również różniczkowalna i zachodzi wzór*

$$\varphi'(x) = f'(x)+g'(x).$$

Tę regułę różniczkowania sumy można napisać krócej

$$(f+g)' = f'+g'.$$

Dowód wynika z równości

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

przez przejście do granicy.

Kombinując regułę różniczkowania sumy z regułą różniczkowania iloczynu mamy

$$(f-g)' = (f+(-1)g)' = f'+(-1)g' = f'-g'.$$

Stąd mamy

TWIERDZENIE 24.2 (reguła różniczkowania różnicy). *Różnica $\varphi = f-g$ dwóch funkcyj f i g różniczkowalnych w punkcie x jest również różniczkowalna i zachodzi wzór*

$$\varphi'(x) = f'(x)-g'(x).$$

Krócej:

$$(f-g)' = f'-g'.$$

Przez kombinowanie reguł podanych w tym i poprzednim paragrafie można obliczać pochodne bardziej skomplikowanych wyrażeń, na przykład:

$$(3x^2-x+2)' = 6x-1,$$

$$\left(6x^5-\frac{x^4}{4}-\frac{x}{2}-\frac{1}{10}\right)' = 30x^4-x^3-\frac{1}{2};$$

dla wykonania ostatniego rachunku musimy ułamki $x^4/4$ i $x/2$ przedstawić najpierw w postaci iloczynów $\frac{1}{4}x^4$ i $\frac{1}{2}x$.

Ćwiczenie. Zróżniczkować funkcje:

$$x^7-1, \quad 3x^2+2x-6, \quad \frac{x^2-3x}{2}, \quad (5+7x)(2-5x), \quad x^7(x+\tfrac{1}{2}).$$

§ 25. Różniczkowanie ilorazu

Mamy następujące

TWIERDZENIE 25.1 (reguła różniczkowania ilorazu). *Jeżeli f i g są funkcjami różniczkowalnymi w punkcie x, przy czym funkcja g jest różna od zera w tym punkcie, to iloraz $\varphi = f/g$ jest również różniczkowalny i mamy wzór*

$$\varphi'(x) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Krócej:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-fg'}{g^2}. \tag{25.1}$$

Dowód wynika z równości

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} =$$

$$= \frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)}$$

przez przejście do granicy.

Uwaga. Reguła różniczkowania ilorazu często jest podawana w postaci

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}, \tag{25.2}$$

która różni się kolejnością czynników f' i g w liczniku. Ze względów czysto praktycznych wygodniejszy jest sposób rachowania według wzoru (25.1). Mianowicie wypisujemy najpierw pod kreską ułamkową kwadrat mianownika, potem ten sam mianownik wypisujemy nad kreską ułamkową, mnożymy przez pochodną licznika i odejmujemy jeszcze licznik pomnożony przez pochodną mianownika. Mamy więc w myśli kolejno mianownik, licznik i znowu mianownik. Gdy zaś tak samo liczymy według wzoru (25.2), to myśl musi wykonać więcej przeskoków: mianownik, licznik, mianownik, licznik i znowu mianownik. Stałe więc używanie algorytmu (25.1) daje pewną oszczędność wysiłku i czasu, zwłaszcza gdy licznik i mianownik mają postać skomplikowaną.

PRZYKŁAD 1. $\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}\right)' = \dfrac{(x^2-x+1)\cdot 2x-(x^2+1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} =$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2-x+1)^2}.$$

PRZYKŁAD 2. $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(x^2+1)\cdot 0-1\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}.$

Gdy funkcja w liczniku jest stała, praktyczniej jest używać wzoru uproszczonego

$$\left(\frac{c}{g}\right)' = -\frac{cg'}{g^2} \quad (c \text{ stała}).$$

W zastosowaniu do przykładu 2 wzór ten pozwala od razu napisać końcowy wynik.

Ze wzoru tego znajdujemy też kolejno

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3};$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}.$$

Ogólnie mamy wzór

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad \text{dla } n \text{ naturalnego i } x \neq 0; \tag{25.3}$$

istotnie, mamy

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^n}\cdot\frac{x^{n-1}}{x^n} = -\frac{n}{x^n}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Ćwiczenie. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

$$\frac{3}{4x^3},\quad 9x^6+\frac{1}{2}+\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^6},\quad \frac{3-2x}{3+2x},\quad \frac{2x}{1+x^2},\quad \frac{1+x^2}{x(1-x^2)},\quad \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+5}.$$

§ 26. Najmniejsza i największa wartość funkcji (dalszy ciąg)

W § 17 udowodniliśmy, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym przyjmuje zawsze w tym przedziale wartość najmniejszą i wartość największą. Rachunek różniczkowy pozwala często w wygodny sposób znaleźć te wartości. Służy ku temu następujące

TWIERDZENIE 26.1. *Jeżeli funkcja f określona w pewnym przedziale osiąga swą najmniejszą lub największą wartość w punkcie ξ leżącym wewnątrz przedziału, i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(\xi)=0$.*

Dowód. Jeżeli funkcja f przyjmuje w punkcie ξ najmniejszą wartość, to dla każdej liczby $\xi+h$ z rozważanego przedziału zachodzi nierówność $f(\xi+h)-f(\xi)\geqslant 0$. Wobec tego jest

$$\text{(26.1)}\qquad \begin{aligned} &0\leqslant\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \quad \text{dla } h>0,\\ &\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\leqslant 0 \quad \text{dla } h<0. \end{aligned}$$

Ponieważ $f'(\xi)$ jest granicą ilorazu różnicowego $\dfrac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$, więc jest jednocześnie jego granicę lewostronną i prawostronną. Z nierówności powyższych otrzymujemy więc na podstawie twierdzenia 11.1 (str. 70)

$$0\leqslant f'(\xi) \quad \text{i} \quad f'(\xi)\leqslant 0.$$

Stąd jedyna możliwość: $f'(\xi)=0$.

Jeżeli w punkcie ξ funkcja ma wartość największą, to $f(\xi+h)-f(\xi)\leqslant 0$ i w (26.1) trzeba przestawić nierówności $h>0$ i $h<0$. Poza tym dowód jest bez zmian.

Z udowodnionego twierdzenia wynika, że funkcja określona w pewnym przedziale domkniętym może przyjmować najmniejszą lub największą wartość tylko w punktach, gdzie

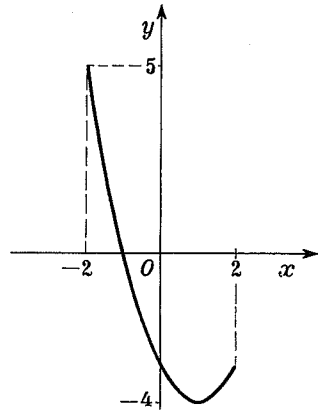
1° pochodna jest równa zeru;

2° pochodna nie istnieje;

3° na końcach przedziału.

W żadnym innym punkcie funkcja nie może przyjąć ani najmniejszej ani największej wartości. Może się zresztą zdarzyć, że wcale one nie istnieją.

PRZYKŁAD 1. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=x^2-2x-3$ w przedziale $[-2, 2]$ podanej na rysunku 34.



$y=x^2-2x-3$

Rys. 34

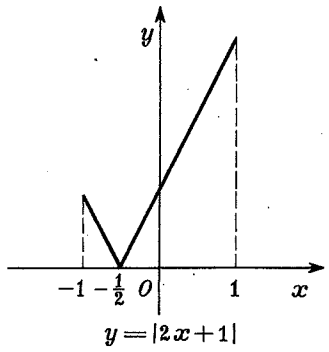
Funkcja ma pochodną w każdym punkcie; wynosi ona $f'(x)=2x-2$ i jest równa zeru w punkcie $x=1$. Funkcja f może więc przyjąć najmniejszą lub największą wartość albo w punkcie 1, albo na końcach przedziału, to znaczy w punktach -2 lub 2. Obliczamy

wartości funkcji w tych punktach

$$f(1) = -4, \quad f(-2) = 5, \quad f(2) = -3.$$

Stąd wnosimy, że najmniejsza wartość funkcji w przedziale $[-2, 2]$ wynosi -4, a największa 5. Widać to zresztą dobrze z załączonego rysunku.

PRZYKŁAD 2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = |2x+1|$ w przedziale $[-1, 1]$, podanej na rysunku 35.



Rys. 35

Można napisać

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla} \quad x \geqslant -\frac{1}{2}, \\ -2x-1 & \text{dla} \quad x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Stąd

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad x > -\frac{1}{2}, \\ -2 & \text{dla} \quad x < -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

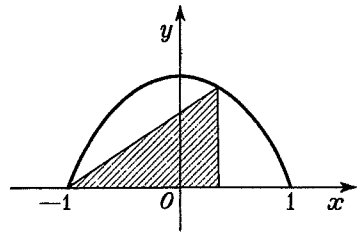
w punkcie $x = -\frac{1}{2}$ funkcja nie ma pochodnej.

Ponieważ pochodna jest wszędzie (tam gdzie istnieje) różna od zera, więc wartość najmniejsza i wartość największa mogą być osiągnięte tylko w punktach $-\frac{1}{2}$, -1 lub 1. Ponieważ

$$f(-\tfrac{1}{2}) = 0, \quad f(-1) = 1 \quad \text{i} \quad f(1) = 3,$$

więc najmniejsza wartość wynosi 0, a największa 3.

PRZYKŁAD 3. W parabolę $y = 1-x^2$ (rys. 36) wpisać trójkąt prostokątny tak, żeby jedna jego przyprostokątna leżała na osi x i żeby jego pole było największe.



Rys. 36

Jest widoczne, że jeden z wierzchołków trójkąta musi leżeć w punkcie $x = -1$, $y = 0$ lub w punkcie $x = 1$, $y = 0$. Ze względu na symetrię możemy przyjąć pierwszy przypadek. Wtedy punkt $x = -1$, $y = 0$ jest zarazem końcem przeciwprostokątnej. Drugi koniec przeciwprostokątnej o współrzędnych x, y leży na łuku paraboli, spełnia więc równanie $y = 1-x^2$. Pole prostokąta wyraża się wzorem $\frac{1}{2}(1+x)y$, czyli $\frac{1}{2}(1+x)(1-x^2)$. Z geometrycznych założeń wynika, że jest $-1 < x < 1$. Należy więc znaleźć największą wartość funkcji

$$P(x) = \tfrac{1}{2}(1+x)(1-x^2) \tag{26.2}$$

w przedziale $(-1, 1)$. Funkcję tę można też napisać w postaci

$$P(x) = -\tfrac{1}{2}(x^3+x^2-x-1).$$

Pochodna jej wynosi

$$P'(x) = -\tfrac{1}{2}(3x^2+2x-1) = -\tfrac{1}{2}(3x-1)(x+1).$$

Przyrównujemy ją do zera:

$$-\tfrac{1}{2}(3x-1)(x+1) = 0.$$

Stąd wynika, że $3x-1 = 0$ lub $x+1 = 0$, a stąd $x = \frac{1}{3}$ lub $x = -1$. Szukając ekstremów funkcji (26.2) w przedziale domkniętym $[-1, 1]$ bierzemy w rachubę tylko punkt $\frac{1}{3}$ i końce przedziału -1 i 1. Wartości funkcji w tych punktach wynoszą

$$P(\tfrac{1}{3}) = \tfrac{16}{27}, \quad P(-1) = 0, \quad P(1) = 0.$$

Stąd wynika, że największa wartość funkcji $P(x)$ wynosi $\frac{16}{27}$ i funkcja przyjmuje ją w punkcie $\frac{1}{3}$. Najmniejszą wartość, która wynosi zero, funkcja przyjmuje na końcach przedziału. W przedziale $(-1, 1)$ najmniejsza wartość nie istnieje.

Szukany trójkąt ma więc pole $\frac{16}{27}$, a podstawa jego ma długość $\frac{4}{3}$.

Po tych przykładach zauważmy jeszcze, że gdy $f(a) \geqslant f(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$, to $(f(x)-f(a))/(x-a) \leqslant 0$ i w konsekwencji $f'(a) \leqslant 0$, jeżeli pochodna ta istnieje. Gdy więc $f'(a) > 0$, to $f(a)$ nie jest największą wartością funkcji $f(x)$ w $[a, b]$. Podobnie nie jest nią $f(b)$, gdy $f'(b) < 0$. Gdy zaś $f'(a) < 0$ i $f'(b) > 0$, to $f(a)$ i $f(b)$ nie są najmniejszą wartością $f(x)$ w $[a, b]$. Na podstawie twierdzenia 26.1 wynika stąd, że *jeżeli pochodna $f'(x)$ istnieje w przedziale $[a, b]$ i na jednym jego końcu jest dodatnia a na drugim ujemna, to jest równa zeru w pewnym punkcie wewnątrz tego przedziału.*

Ćwiczenia. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

(α) $5x-x^2$ w przedziale $[0, 3]$;

(β) $3x-4x^3$ w przedziale $[0, 3]$;

(γ) x^3-6x^2+9x-6 w przedziale $[0, 4]$;

(δ) $x^2(6-x)^2$ w przedziale $[-1, 5]$;

(ε) $\dfrac{x}{1+x^2}$ w przedziale $(-\infty, \infty)$;

(ζ) $x+\dfrac{9}{x}$ w przedziale $[1, 5]$;

(η) $x+\dfrac{4}{x-2}-3$ w przedziale $[0, 2]$.

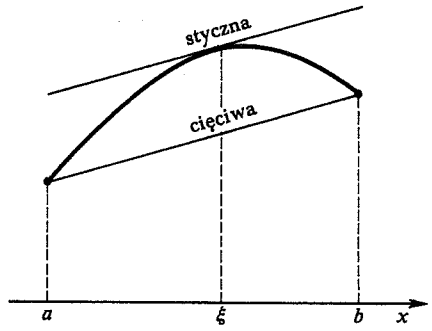
§ 27. Twierdzenie o wartości średniej

Weźmy pod uwagę jakiś łuk krzywej i cięciwę łączącą jego końce (rys. 37). Jeżeli w każdym punkcie łuku istnieje styczna, to spośród tych stycznych można wybrać taką, która jest równoległa do cięciwy. Twierdzenie to, geometrycznie dość oczywiste, sformułujemy teraz i udowodnimy analitycznie.

Przypuśćmy, że łuk przedstawia funkcję f w przedziale $[a, b]$. Stromość siecznej wynosi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

i jest równa stromości stycznej w punkcie ξ, czyli pochodnej $f'(\xi)$.



Rys. 37

TWIERDZENIE 27.1 (o wartości średniej). *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i ponadto ma pochodną wszędzie wewnątrz tego przedziału, to istnieje (co najmniej jeden) taki punkt ξ, że $a < \xi < b$ i*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Dowód. Wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$\varphi(x) = f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Jest ona również ciągła w przedziale $[a, b]$ i ma pochodną wewnątrz tego przedziału. Ponadto jest tak dobrana, że $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$, co łatwo sprawdzić. Udowodnimy, że istnieje wewnątrz przedziału $[a, b]$ taki punkt ξ, że $\varphi'(\xi) = 0$.

Niech M oznacza największą a m najmniejszą wartość funkcji φ w przedziale $[a, b]$. Gdy $M = m$, to $\varphi(x) = \varphi(a)$ w całym przedziale $[a, b]$ i jest wobec tego $\varphi'(\xi) = 0$ dla każdego punktu ξ wewnątrz $[a, b]$. Gdy $M > m$, to musi być $M > \varphi(a) = \varphi(b)$ lub $m < \varphi(a) = \varphi(b)$. W pierwszym przypadku funkcja osiąga wartość M w pewnym punkcie ξ wewnątrz przedziału i jest $\varphi'(\xi) = 0$ na podstawie twierdzenia 26.1 (str. 96). W drugim przypadku funkcja osiąga wartość m w pewnym punkcie ξ wewnątrz przedziału i jest $\varphi'(\xi) = 0$ na podstawie tego samego twierdzenia 26.1. W każdym więc

przypadku istnieje wewnątrz $[a, b]$ punkt ξ, w którym $\varphi'(\xi) = 0$. Ale

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a};$$

wobec tego

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

co dowodzi twierdzenia.

Uwaga. Gdy twierdzenie o wartości średniej stosuje się do pewnego przedziału $[x_0, x_1]$ (to znaczy gdy funkcja f jest ciągła w przedziale $[x_0, x_1]$ i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału), to oczywiście stosuje się też do każdego przedziału $[x_0, x]$ zawartego w $[x_0, x_1]$. W zastosowaniach często rozważa się jednocześnie różne przedziały $[x_0, x]$ i wtedy dla różnych przedziałów liczby ξ są na ogół różne. Możemy więc napisać

$$(27.1)\quad f(x)-f(x_0) = (x-x_0)f'(\xi(x)) \quad (\xi \text{ zawarte między } x_0 \text{ a } x),$$

zaznaczając w ten sposób, że ξ zależy od x. Symbol $\xi(x)$ może być uważany za funkcję, jeżeli dla każdej liczby x zostanie dowolnie wybrana wartość $\xi(x)$ spośród wartości, dla których równość (27.1) ma miejsce. Funkcje $\xi(x)$ mogą być więc na ogół rozmaite, ale zawsze spełniają nierówności $x_0 < \xi(x) < x$. Stąd wynika, że $\lim_{x\to x_0+} \xi(x) = x_0$.

Podobnie można rozważać przedziały $[x, x_0]$; wtedy także zachodzi równość (27.1) i jest $x < \xi(x) < x_0$ oraz $\lim_{x\to x_0-} \xi(x) = x_0$.

Gdy założymy dodatkowo, że $\xi(x_0) = x_0$, to funkcja $\xi(x)$ będzie ciągła w punkcie $x = x_0$; zakładamy wtedy oczywiście, że funkcja f jest różniczkowalna w jakimś przedziale zawierającym wewnątrz punkt x_0. Wówczas równość (27.1) zachodzi także dla $x = x_0$.

W zastosowaniach bardzo często korzystamy z następującego twierdzenia, będącego wnioskiem z twierdzenia o wartości średniej:

TWIERDZENIE 27.2 *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i jest $f' = 0$ wewnątrz tego przedziału, to funkcja f jest stała w $[a, b]$.*

Dowód. Jeżeli x_1 i x_2 są dowolnymi punktami $(x_1 \neq x_2)$ przedziału $[a, b]$, to dla pewnego punktu ξ między x_1 a x_2 jest

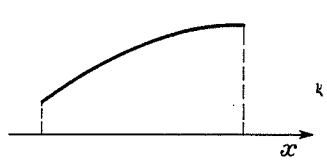
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0,$$

skąd wynika $f(x_1) = f(x_2)$.

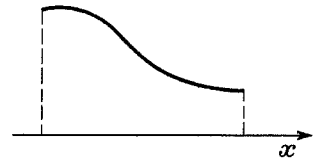
Z twierdzenia tego wypływa oczywisty wniosek, że *jeżeli dwie funkcje są ciągłe w przedziale $[a, b]$ i mają tę samą pochodną wewnątrz przedziału, to różnią się co najwyżej o stałą.* Istotnie, różnica tych funkcji spełnia warunki twierdzenia 27.2, musi więc być stałą.

§ 28. Funkcje rosnące i malejące

Funkcję nazywamy *rosnącą*, gdy ze wzrostem x wzrasta jej wartość, *malejącą*, gdy ze wzrostem x maleje jej wartość. Funkcja rosnąca i malejąca przedstawione są na rysunku 38 i 39.



Rys. 38. Funkcja rosnąca



Rys. 39. Funkcja malejąca

Pojęcia te dokładniej precyzujemy w następujący sposób.

Funkcję f nazywamy *rosnącą* w danym przedziale, gdy dla dowolnych punktów $x_1 < x_2$ tego przedziału jest $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcję f nazywamy *malejącą* w danym przedziale, gdy dla dowolnych punktów $x_1 < x_2$ tego przedziału jest $f(x_1) > f(x_2)$.

Z definicyj tych widać, że funkcje rosnące i funkcje malejące mogą każdą wartość przyjąć co najwyżej jeden raz.

Funkcja może być w pewnych przedziałach rosnąca, w innych malejąca. Na przykład funkcja $f(x) = x^2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$, a rosnąca w przedziale $(0, \infty)$.

TWIERDZENIE 28.1. *Jeżeli w danym przedziale pochodna $f'(x)$ jest dodatnia, to funkcja $f(x)$ jest rosnąca; jeżeli pochodna jest ujemna, to funkcja jest malejąca.*

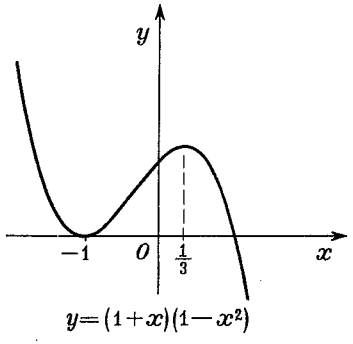
Dowód. Przypuśćmy, że w pierwszym przypadku funkcja nie jest rosnąca. Wtedy istnieją w przedziale takie punkty $x_1 < x_2$, że $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Z twierdzenia o wartości średniej wynika istnienie między x_1 a x_2 takiego punktu ξ, że

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant 0, \tag{28.1}$$

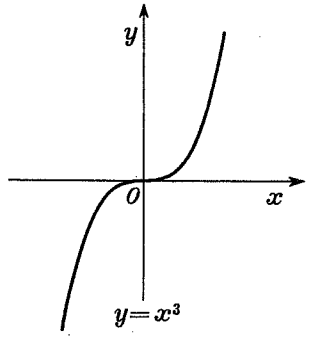
co jest sprzeczne z założeniem, że pochodna jest dodatnia.

Dowód drugiego przypadku jest podobny, tylko zamiast nierówności $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ mamy $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, a w nierówności (28.1) znak $\leqslant$ przechodzi na $\geqslant$, co daje sprzeczność z założeniem, że pochodna jest ujemna.

Udowodnione twierdzenie może służyć do badania przebiegu funkcji. Na przykład funkcja $f(x) = (1+x)(1-x^2)$ przedstawiona na rys. 40 ma pochodną $f'(x) = -(3x-1)(x+1)$, która jest dodatnia w przedziale $(-1, \frac{1}{3})$, a ujemna w przedziałach $(-\infty, -1)$ i $(\frac{1}{3}, \infty)$. Stąd wynika, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca w przedziale $(-1, \frac{1}{3})$, a malejąca w przedziałach $(-\infty, -1)$ i $(\frac{1}{3}, \infty)$.



Rys. 40



Rys. 41

W §15 udowodniliśmy, że w przedziale (0, 1) istnieje liczba ξ, spełniająca równanie

$$x^5+x-1 = 0. \tag{28.2}$$

Funkcja $f(x) = x^5+x-1$ ma pochodną $f'(x) = 5x^4+1$, która jest wszędzie dodatnia. Funkcja $f(x)$ jest więc rosnąca i może wartość

0 przyjąć tylko raz. Stąd wynika, że liczba ξ jest jedynym pierwiastkiem równania (28.2).

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 28.1 nie jest prawdziwe. Na przykład funkcja $f(x) = x^3$ jest wszędzie rosnąca, mimo że jej pochodna $f'(x) = 3x^2$ jest równa zeru w punkcie $x = 0$ (rys. 41).

Ćwiczenia. Podać przedziały, w których następujące funkcje są rosnące lub malejące:

(α) $y = 1-x-x^2$; (β) $y = 2x^3-3x^2-36x+1$;

(γ) $y = \frac{1}{12}x^4-\frac{1}{3}x^3+1$;

(δ) $y = \frac{1}{x^2+1}$; (ε) $y = \frac{2x}{x^2+1}$; (η) $y = \frac{x^2+3}{x+1}$.

Podać przybliżone wykresy tych funkcyj.

§ 29. Funkcje nierosnące i niemalejące

Funkcję nazywamy *nierosnącą*, gdy ze wzrostem x wartość jej nie wzrasta, *niemalejącą*, gdy ze wzrostem x wartość jej nie maleje.

Dokładniej:

Funkcję f nazywamy *nierosnącą* w danym przedziale, gdy dla punktów $x_1 < x_2$ tego przedziału jest $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Funkcję f nazywamy *niemalejącą* w danym przedziale, gdy dla punktów $x_1 < x_2$ tego przedziału jest $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Funkcje nierosnące i niemalejące obejmujemy wspólnym mianem funkcyj *monotonicznych*.

Każda funkcja rosnąca jest niemalejąca, ale nie każda funkcja niemalejąca jest rosnąca. Podobnie, każda funkcja malejąca jest nierosnąca, ale niekoniecznie na odwrót. Funkcje rosnące i malejące są również monotoniczne.

TWIERDZENIE 29.1. *Jeżeli w danym przedziale jest* $f'(x) \geqslant 0$, *to funkcja* $f(x)$ *jest niemalejąca; jeżeli jest* $f'(x) \leqslant 0$, *to funkcja jest nierosnąca.*

Dowód. Przypuśćmy, że w pierwszym przypadku istnieją takie punkty $x_1 < x_2$, że $f(x_1) > f(x_2)$. Wtedy istnieje między x_1 a x_2 taki punkt ξ, że

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0 \tag{29.1}$$

wbrew założenia. Dowód drugiego przypadku jest podobny, należy tylko zamiast $f(x_1) > f(x_2)$ napisać $f(x_1) < f(x_2)$ i zmienić w (29.1) znak $<$ na $>$.

Twierdzenia 29.1 daje się odwrócić (w przeciwieństwie do twierdzenia 28.1). Mianowicie, *jeżeli w danym przedziale funkcja $f(x)$ jest niemalejąca, to $f'(x) \geqslant 0$; jeżeli jest nierosnącą, to $f'(x) \leqslant 0$.* Istotnie, w pierwszym przypadku jest

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$$

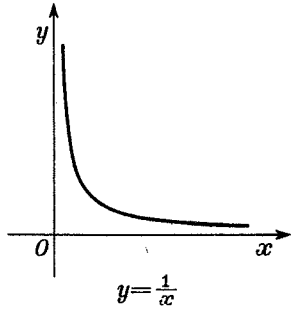
dla x i $x+h$ należacych do rozważanego przedziału ($h \neq 0$). Stąd przez przejście do granicy mamy $f'(x) \geqslant 0$. W drugim przypadku zachodzą takie same nierówności w przeciwną stronę.

§ 30. Zachowanie się funkcji w nieskończoności

Gdy w funkcji $f(x) = 1/x$ podstawiamy za x coraz większe liczby, to wartość funkcji staje się coraz bliższa zera. Mówimy wtedy, że w *nieskończoności funkcja jest nieskończenie mała.* Pojęcie to precyzujemy podobnie jak w § 5 (str. 56).

Mówimy, że *w nieskończoności funkcja f jest nieskończenie mała, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ, że dla $x > \delta$ zachodzi nierówność $|f(x)| < \varepsilon$.*

Na przykład, jeżeli dla funkcji $f(x) = 1/x$ (rys. 42) przyjmiemy za δ liczbę $1/\varepsilon$, to będzie $|f(x)| < \varepsilon$ dla $x > \delta$.



Rys. 42

Podobnie mówimy, że *w nieskończoności funkcja f jest ograniczona* [1], *gdy istnieje liczba dodatnia ε i liczba δ, takie że dla $x > \delta$ zachodzi nierówność $|f(x)| < \varepsilon$.*

Dla oznaczania funkcyj nieskończenie małych i funkcyj ograniczonych w nieskończoności używa się symboli $o(1)$ i $O(1)$ podobnie jak w § 7. Dla uniknięcia nieporozumień musi być oczywiście zawsze zaznaczone, że chodzi o zachowanie się funkcji w nieskończoności.

Widzieliśmy poprzednio, że w nieskończoności jest

$$\frac{1}{x} = o(1).$$

Widać także, że dla funkcyj stałych $f(x) = c$ jest

$$c = O(1).$$

Algebra symboli $o(1)$ i $O(1)$ jest dla nieskończoności taka sama jak w § 8. Dowody tam podane wymagają zastąpienia nierówności $a < x < a+\delta$, $a < x < a+\delta_1$ i $a < x < a+\delta_2$ odpowiednio przez $x > \delta$, $x > \delta_1$ i $x > \delta_2$; o liczbach δ, δ_1 i δ_2 nie zakłada się w przypadku nieskończoności, że są dodatnie; ponadto w tych miejscach dowodu, gdzie δ jest mniejszą z liczb δ_1 i δ_2 należy przyjąć, że δ jest większą z tych liczb.

§ 31. Granica funkcji w nieskończoności

Mówimy, że *funkcja f ma w nieskończoności granicę k*, gdy jest $f(x)-k = o(1)$, czyli gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ, że dla $x > \delta$ jest $|f(x)-k| < \varepsilon$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k \quad \text{lub krócej} \quad f(\infty) = k.$$

Na przykład

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$

---

[1] Zakładamy, że funkcja f jest określona dla $x > \delta_0$, gdzie $\delta_0 > 0$. (Przyp. red.).

TWIERDZENIE 31.1. *Jeżeli* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *a funkcja* $g(x)$ *jest ograniczona w pewnym przedziale* (a, ∞), *to* $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0$.

Dowód. W nieskończoności jest $f(x) = o(1)$ i $g(x) = O(1)$, zatem $f(x)g(x) = o(1)$, co dowodzi twierdzenia.

Obliczenie granicy w nieskończoności można zawsze sprowadzić do obliczenia granicy innej funkcji w zerze. Jest mianowicie:

TWIERDZENIE 31.2. *Równość* $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = k$.

Dowód. Gdy $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ_1, że dla $x > \delta_1$ jest

$$|f(x)-k| < \varepsilon, \tag{31.1}$$

jeżeli δ_2 jest dowolną liczbą dodatnią większą od δ_1, to dla $x > \delta_2$ tym bardziej nierówność (31.1) jest spełniona. Gdy $x = 1/t$ i $\delta_2 = 1/\delta$, to dla $0 < t < \delta$ mamy $1/t > \delta_2$ i wobec (31.1)

$$\left|f\left(\frac{1}{t}\right)-k\right| < \varepsilon; \tag{31.2}$$

zatem dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ, że dla $0 < t < \delta$ jest (31.2). Udowodniliśmy więc, że z $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ wynika $\lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = k$.

Gdy $\lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = k$, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla $0 < t < \delta$ zachodzi (31.2). Przy takich oznaczeniach jak poprzednio nierówność $0 < t < \delta$ jest równoważna z nierównością $x > \delta_2$, a nierówność (31.2) z nierównością (31.1). Zatem dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ_2, że dla $x > \delta_2$ jest (31.1). Udowodniliśmy więc, że z $\lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = k$ wynika $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$.

PRZYKŁAD.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{2x^2-3x-1} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}{\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}-1} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-2x}{2-3x-x^2} = \frac{1}{2}.$$

Przy obliczaniu granic w nieskończoności można też stosować twierdzenia 10.1 (str. 68), 11.1 i 11.2 (str. 70), w których wtedy pod znakiem lim należy dopisać wszędzie znak $x\to\infty$. Dowody twierdzeń dla $x\to\infty$ są takie same jak dla $x\to a+$, należy w nich tylko zastąpić wyrazy „na prawo od a" przez „w nieskończoności"

PRZYKŁAD.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-0 = 1.$$

Ćwiczenia. Znaleźć granice w nieskończoności dla funkcyj:

$$y = \frac{1+x}{1-x}, \quad y = 2+\frac{2}{x^2+2}, \quad y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}.$$

Podać przybliżone wykresy tych funkcyj.

§ 32. Funkcje monotoniczne i ograniczone

Podstawowe znaczenie ma następujące

TWIERDZENIE 32.1. *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest monotoniczna i ograniczona w przedziale* (a, ∞), *to istnieje granica* $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Dowód. Oznaczmy przez Z zbiór wartości, jakie funkcja przyjmuje w przedziale (a, ∞). Z założenia zbiór ten jest ograniczony, ma więc kres górny K i kres dolny k. Do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać taką liczbę δ z przedziału (a, ∞), że $K-\varepsilon < f(\delta) \leqslant K$. Jeżeli funkcja jest niemalejąca, to dla $x > \delta$ jest tym bardziej $K-\varepsilon < f(x) \leqslant K$ i w konsekwencji $|f(x)-K| < \varepsilon$, co dowodzi, że K jest granicą.

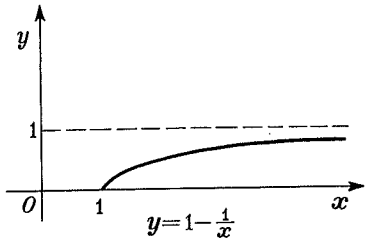
Jeżeli funkcja jest nierosnąca, to kres dolny jest granicą. Istotnie, do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać taką liczbę δ z przedziału (a, ∞), że $k \leqslant f(\delta) < k+\varepsilon$; tym bardziej jest więc $|f(x)-k| < \varepsilon$ dla $x > \delta$.

Na przykład funkcja $f(x) = 1-\frac{1}{x}$ przedstawiona na rysunku 43 jest rosnąca i ograniczona w przedziale $(1, \infty)$ i ma w nieskończoności granicę 1.

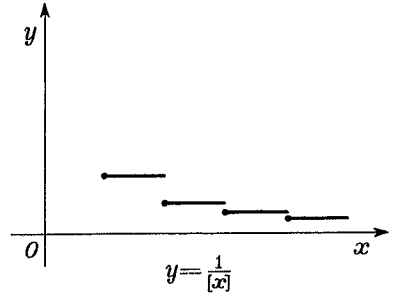
Inny przykład (rys. 44) stanowi funkcja $y = 1/[x]$, którą można też określić równościami

$$f(x) = \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \leqslant x < n+1.$$

Jest ona nierosnąca, ograniczona i ma w nieskończoności granicę 0.



Rys. 43



Rys. 44

Rozdział III

CIĄGI I SZEREGI

§ 1. Pojęcie ciągu

Funkcję, która jest określona na zbiorze liczb naturalnych, nazywamy *ciągiem nieskończonym*. Wartość tej funkcji w punkcie n nazywamy n-tym *wyrazem* lub *elementem ciągu* i oznaczamy przez

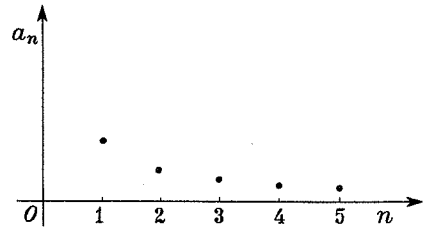
$$a_n.$$

Jeżeli na przykład funkcję $1/x$ rozważamy tylko dla naturalnych wartości x, to napiszemy

$$a_n = \frac{1}{n}. \tag{1.1}$$

Ciąg jest więc w zasadzie funkcją i geometrycznie możemy go przedstawić w postaci wykresu (rys. 45). Ponieważ jednak rozporządzamy tylko skończonym kawałkiem papieru, wykres może zawierać tylko skończona liczbę początkowych wyrazów ciągu.

Przy oznaczaniu ciągu litery a i n grają tę samą rolę co f i x przy oznaczaniu funkcji. Użycie tych liter nie ma żadnego istotnego



Rys. 45. Wykres ciągu $a_n = 1/n$

znaczenia, jest czysto konwencjonalne i w razie potrzeby może być zmienione.

Ciąg podaje się często, wypisując kilka jego początkowych wyrazów, na przykład

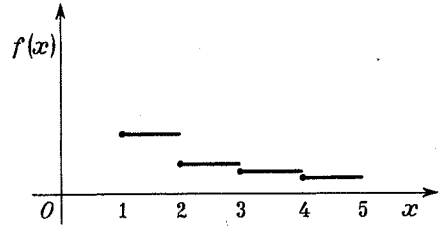
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

Taki zapis ciągu jest sugestywny, ale nie jednoznaczny. Czytelnik domyśla się, że dalszymi wyrazami powyższego ciągu będą liczby $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ i że chodzi tu o ciąg o ogólnym wyrazie (1.1). Nie jest to jednak ani konieczność logiczną, ani matematyczną, gdyż na przykład ciąg $a_n = (n^2-6n+11)/6$ ma również początkowe wyrazy $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ale dalsze wyrazy ma inne, mianowicie $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{11}{6}$, 3, $\frac{9}{2}$.

Często autorzy używają symbolu $\{a_n\}$ na oznaczenie ciągu, dla odróżnienia ciągu od jego n-tego wyrazu a_n. Symbolika ta jest logicznie tak samo uzasadniona jak oznaczenie funkcji symbolem $\{f(x)\}$ dla odróżnienia od jej wartości $f(x)$. W praktyce wprowadzenie tych symboli jest na ogół zbędne (zob. rozdz. II, § 2, str. 50).

§ 2. Funkcje schodkowe

Z punktów przedstawiających wykres ciągu poprowadźmy w prawo odcinki długości 1. W ten sposób otrzymamy wykres pewnej funkcji mający kształt schodków. Funkcję taką będziemy nazywali *schodkową*. Na rysunku 46 podany jest wykres funkcji schodkowej,



$f(x) = \frac{1}{n}$ dla $n \leqslant x < n+1$

Rys. 46

otrzymanej z wykresu ciągu $a_n = 1/n$. Jeżeli $a_n = c$, tzn. wszystkie wyrazy ciągu są jednakowe, to $f(x) = c$, tzn. odpowiednia funkcja schodkowa jest stała.

Analitycznie funkcję schodkową dla ciągu a_n definiujemy wzorami

$$f(x) = a_n \quad \text{dla} \quad n \leqslant x < n+1 \quad (n \text{ naturalne}). \tag{2.1}$$

Taka funkcja schodkowa spełnia dla każdego $x \geqslant 1$ równość

$$f(x) = f(n) \quad \text{dla} \quad n = [x]. \tag{2.2}$$

Wzór (2.2) przyporządkowuje każdemu ciągowi a_n pewną funkcję schodkową określoną dla wszystkich $x \geqslant 1$. Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne, to znaczy każdemu ciągowi odpowiada ściśle określona funkcja schodkowa i, odwrotnie, każdej funkcji schodkowej rozważanego typu odpowiada ściśle określony ciąg.

Gdy mamy jeszcze drugi ciąg b_n i związaną z nim funkcję schodkową

$$g(x) = b_n \quad \text{dla} \quad n \leqslant x < n+1, \tag{2.3}$$

to z (2.1) i (2.3) wynika:

$$f(x)+g(x) = a_n+b_n,$$

$$f(x)-g(x) = a_n-b_n,$$

$$f(x)g(x) = a_n b_n \quad \text{dla} \quad n \leqslant x < n+1,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n} \quad (b_n \neq 0).$$

Zatem sumie, różnicy, iloczynowi i ilorazowi i ilorazowi ciągów odpowiadają suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcyj schodkowych. Używając języka algebry możemy powiedzieć, że rozważany zbiór funkcyj schodkowych jest *izomoficzny* ze zbiorem ciągów. Dzięki temu izomorfizmowi wiele pojęć i twierdzeń dotyczących funkcyj można przenieść bezpośrednio na ciągi.

Mówimy, że *ciąg* a_n *ma granicę* k i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = k,$$

gdy $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ dla odpowiadającej mu funkcji schodkowej $f(x)$.

Jest więc $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = k$. Jeżeli ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{x\to\infty} g(x) = l$, gdzie $g(x)$ jest funkcją schodkową odpowiadającą ciągowi b_n, to zgodnie z powyższą definicją jest

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x)), \tag{2.4}$$

ponieważ sumie ciągów odpowiada suma odpowiednich funkcyj schodkowych. Podobnie

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x)), \tag{2.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{x\to\infty} f(x)g(x), \tag{2.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}; \tag{2.7}$$

w ostatniej równości musimy dodatkowo założyć, że $\lim_{n\to\infty} b_n = l \neq 0$, a także $b_n \neq 0$, ponieważ zgodnie z definicją ciągu wszystkie jego wyrazy mają być określone.

Weźmy teraz pod uwagę twierdzenie 10.1 z rozdziału II (str. 68). Jest ono prawdziwe dla $x\to\infty$, jak o tym mówiliśmy w § 31 (str. 107). Wówczas w twierdzeniu należy pod znakiem lim dopisać wszędzie $x\to\infty$. Dzięki równościom (2.4), (2.5), (2.6) i (2.7) omawiane twierdzenie przechodzi w analogiczne twierdzenie o ciągach:

TWIERDZENIE 2.1 (o działaniach arytmetycznych na ciągach). *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = k$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = l$, *to*

(I) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = k+l$,

(II) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = k-l$,

(III) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = kl$;

jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ *i* $l \neq 0$, *to*

(IV) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{k}{l}$.

Ciąg $a_n = 1/n$ ma granicę 0, ponieważ odpowiadająca mu funkcja schodkowa $f(x) = 1/[x]$ ma w nieskończoności granicę 0. Ciąg o wyrazach jednakowych $a_n = c$ ma granicę c, gdyż odpowiadająca mu funkcja schodkowa $f(x) = c$ jest stała i ma w nieskończoności granicę c. Stosując twierdzenie 2.1, możemy łatwo obliczać granice innych ciągów, na przykład

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(3-2\frac{1}{n^2}\right) = 3-2\cdot 0 = 3.$$

Za pośrednictwem funkcyj schodkowych przenoszą się też na ciągi twierdzenia 11.1 i 11.2 z rozdziału II (str. 70) i przyjmują następującą postać:

TWIERDZENIE 2.2 (o zachowaniu nierówności). *Gdy* $a_n \leqslant b_n$ *i* $\lim_{n\to\infty} a_n = k$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l$, *to* $k \leqslant l$.

TWIERDZENIE 2.3 (o trzech ciągach). *Gdy* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} a_n = k$, $\lim_{n\to\infty} c_n = k$ *to również* $\lim_{n\to\infty} b_n = k$.

Podobnie jak granica, tak niektóre inne pojęcia dają się przenieść z funkcyj na ciągi. Mówimy na przykład, że ciąg b_n jest *ograniczony*, gdy odpowiadająca mu funkcja schodkowa jest ograniczona czyli, co na jedno wychodzi, gdy istnieje taka liczba M, że $|b_n| < M$ dla wszystkich wyrazów ciągu.

TWIERDZENIE 2.4. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *i ciąg* b_n *jest ograniczony, to* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Dowód. Gdy $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami schodkowymi odpowiadającymi ciągom a_n i b_n, to $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, a funkcja $g(x)$ jest ograniczona. Wobec tego $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0$ (zgodnie z (8.1), str. 62) i w konsekwencji $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

§ 3. Bezpośrednia definicja granicy ciągu

Granicę ciągu określiliśmy pośrednio przez granicę funkcji schodkowej. Jest to pożyteczne o tyle, że wiąże teorię ciągów z teorią funkcyj i pozwala łatwo przenieść na ciągi pewne twierdzenia o funkcjach. Ważna jest także bezpośrednia definicja granicy ciągu:

Mówimy, że *ciąg* a_n *ma granicę* k i piszemy $\lim_{n\to\infty} a_n = k$, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ, że dla $n > \delta$ jest $|a_n - k| < \varepsilon$.

Zamiast *ciąg ma granicę* k mówi się często *ciąg jest zbieżny do* k.

Łatwo wykazać równoważność tej definicji z poprzednią. Gdy mianowicie ciąg a_n jest zbieżny według nowej definicji, to wobec (2.1) jest $|f(x)-k| < \varepsilon$ dla $x > \delta+1$, jest więc zbieżny według dawnej definicji. Odwrotnie, gdy $|f(x)-k| < \varepsilon$ dla $x > \delta$, to z (2.1) wynika, że $|a_n-k| < \varepsilon$ dla $n > \delta$. Równoważność jest więc dowiedziona.

Na przykład ciąg $a_n = 1/n$ jest zbieżny do zera, bo dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać taką liczbę δ, mianowicie $\delta = 1/\varepsilon$, że z nierówności $n > 1/\varepsilon$ wynika $|1/n-0| < \varepsilon$.

Natomiast ciąg $a_n = n$ nie jest zbieżny, bo jakiekolwiek weźmiemy liczby k, ε i δ, to zawsze istnieją liczby naturalne $n > \delta$, dla których $|n-k| > \varepsilon$.

TWIERDZENIE 3.1. *Jeżeli funkcja* $h(x)$ *jest określona dla* $x \geqslant 1$ *i* $\lim_{x\to\infty} h(x) = k$, *to dla ciągu* $a_n = h(n)$ *jest również* $\lim_{n\to\infty} a_n = k$.

Dowód. Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla $x > \delta$ jest $|h(x)-k| < \varepsilon$. W szczególności dla naturalnych $n > \delta$ jest $|h(n)-k| < \varepsilon$, czyli $|a_n-k| < \varepsilon$, co dowodzi twierdzenia.

To proste twierdzenie znajduje częste zastosowania, pozwala bowiem obliczanie granicy ciągu zastąpić obliczaniem granicy funkcji (niekoniecznie schodkowej). Wiemy na przykład, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x}{2x^2-3x-1} = \frac{1}{2};$$

stąd wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n}{2n^2-3n-1} = \frac{1}{2}.$$

TWIERDZENIE 3.2. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. Ustalamy sobie dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$. Jeżeli ciąg a_n ma granicę k, to istnieje taka liczba δ, że $|a_n-k| < \varepsilon$ dla $n > \delta$. Stąd $k-\varepsilon < a_n < k+\varepsilon$ i $|a_n| < |k|+\varepsilon$ dla $n > \delta$. Zbiór liczb a_n o wskaźnikach $n \leqslant \delta$ jest skończony i wobec tego ograniczony: $|a_n| \leqslant M_1$ dla $n \leqslant \delta$. Jeżeli przez M oznaczymy większą z liczb $|k|+\varepsilon$ i M_1, to będziemy mieli $|a_n| \leqslant M$ dla wszystkich naturalnych n. Ciąg a_n jest ograniczony.

TWIERDZENIE 3.3. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód. Twierdzenie wynika natychmiast z bezpośredniej definicji granicy ciągu.

§ 4. Ciągi monotoniczne

Ciąg a_n nazywamy *nierosnącym* dla $n \geqslant n_0$ (n_0 liczba naturalna), gdy dla liczb naturalnych $n \geqslant n_0$ jest $a_n \geqslant a_{n+1}$. Nazywamy go *niemalejącym* dla $n \geqslant n_0$, gdy dla naturalnych $n \geqslant n_0$ jest $a_n \leqslant a_{n+1}$. Ciągi nierosnące i niemalejące obejmujemy wspólną nazwą ciągów *monotonicznych.*

Przez indukcję matematyczną wynika, że dla $n_0 \leqslant n_1 \leqslant n_2$ jest $a_{n_1} \geqslant a_{n_2}$ w przypadku ciągu nierosnącego, a $a_{n_1} \leqslant a_{n_2}$ w przypadku ciągu niemalejącego. Niech x_1 i x_2 będą dowolnymi liczbami spełniającymi nierówności $n_0 \leqslant x_1 < x_2$. Gdy $n_1 = [x_1]$ i $n_2 = [x_2]$, to $n_1 \leqslant n_2$ i dla odpowiedniej funkcji schodkowej mamy wobec (2.2)

$$f(x_1) = a_{n_1} \quad \text{i} \quad f(x_2) = a_{n_2}.$$

Zatem $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ w przypadku ciągu nierosnącego, a $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ w przypadku ciągu niemalejącego. To dowodzi, że funkcja schodkowa odpowiadająca ciągowi jest dla $x \geqslant n_0$ nierosnąca, gdy ciąg jest nierosnący, a niemalejąca, gdy ciąg jest niemalejący.

Wobec tego twierdzenie 32.1 z rozdziału II (str. 109) możemy dla ciągów sformułować w następującej postaci:

TWIERDZENIE 4.1. *Każdy ciąg ograniczony i monotoniczny dla* $n \geqslant n_0$ *jest zbieżny.*

Ciąg nazywamy *rosnącym* dla $n \geqslant n_0$, gdy dla $n \geqslant n_0$ jest $a_n < a_{n+1}$. Nazywamy go *malejącym* dla $n \geqslant n_0$, gdy dla $n \geqslant n_0$ jest $a_n > a_{n+1}$. Ciągi rosnące i malejące są oczywiście monotoniczne. (Funkcje schodkowe odpowiadające tym ciągom nie są rosnące ani malejące, gdyż są stałe w przedziałach $(n, n+1)$).

§ 5. Ciągi wybrane

Gdy w ciągu skreślimy dowolne wyrazy tak, żeby pozostało jeszcze nieskończenie wiele wyrazów, to ciąg utworzony z pozostałych wyrazów nazywamy *ciągiem wybranym*. Tę intuicyjną definicję precyzujemy w następujący sposób:

Jeżeli dany jest ciąg a_n i dowolny ciąg r_n rosnący (dla $n \geqslant 1$) liczb naturalnych, to ciąg $b_n = a_{r_n}$ nazywamy *ciągiem wybranym z* a_n.

Przykładami ciągów wybranych z a_n są ciągi

$$b_n = a_{2n}, \quad c_n = a_{2n-1}, \quad d_n = a_{m+n},$$

gdzie m jest ustaloną liczbą naturalną.

TWIERDZENIE 5.1 (o ciągach wybranych). *Ciąg wybrany z ciągu zbieżnego jest również zbieżny i ma tę samą granicę.*

Dowód. Przypuśćmy, że ciąg a_n ma granicę k i że $b_n = a_{r_n}$ jest ciągiem wybranym. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie δ, że $|a_n - k| < \varepsilon$ dla $n > \delta$. Ponieważ $r_n \geqslant n$ (co łatwo sprawdzamy przez indukcję), więc tym bardziej jest $|a_{r_n} - k| < \varepsilon$ dla $n > \delta$, czyli $|b_n - k| < \varepsilon$, co dowodzi twierdzenia.

§ 6. Ciąg geometryczny

Ciąg $a_n = q^n$ nazywamy *geometrycznym*. Przykładem takiego ciągu jest ciąg

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{16}, \ldots$$

TWIERDZENIE 6.1. *Jeżeli* $|q| < 1$, *to* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Dowód. Gdy $0 \leqslant q < 1$, to ciąg q^n jest nierosnący i ograniczony, jest więc zbieżny do pewnej granicy k na podstawie twierdzenia 4.1. Z równości $qq^n = q^{n+1}$ mamy w granicy

$$qk = k,$$

ponieważ ciąg q^{n+1} jest wybrany z q^n. Stąd $(q-1)k = 0$ i $k = 0$, bo $q - 1 \neq 0$. Twierdzenie jest więc dowiedzione w przypadku $0 \leqslant q < 1$.

Gdy $-1 < q < 0$, to w każdym razie ciąg $|q|^n$ jest zbieżny do zera, bo $0 < |q| < 1$. Stąd wynika zbieżność ciągu q^n na podstawie twierdzenia 3.3, bo $|q^n| = |q|^n$.

§ 7. Szereg geometryczny

Rozważmy ciąg s_n zdefiniowany indukcyjnie wzorami

$$s_1 = 1, \quad s_{m+1} = s_m + x^m \quad \text{dla naturalnych } m \tag{7.1}$$

(x jest dowolnie ustaloną liczbą). Jest na przykład

$$s_2 = 1 + x,$$

$$s = 1 + x + x^2$$

i ogólnie

$$s_{m+1} = 1 + x + \ldots + x^m. \tag{7.2}$$

Ostatni symbol ma przejrzysty sens intuicyjny, ale w istocie jego ścisłą definicję stanowią równości (7.1).

Ciąg s_n nazywamy *szeregiem geometrycznym*.

TWIERDZENIE 7.1. *Gdy* $|x| < 1$, *to przy oznaczeniach* (7.1) *jest* $\lim_{n\to\infty} s_n = 1/(1-x)$, *co piszemy też*

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Dowód. Udowodnimy przez indukcję, że

$$(1-x)s_m = 1 - x^m \tag{7.3}$$

dla m naturalnych. Zachodzi to dla $m = 1$, bo $s_1 = 1$. Przypuśćmy, że dla pewnego naturalnego p jest

$$(1-x)s_p = 1-x^p.$$

Wtedy na podstawie (7.1) jest

$$(1-x)s_{p+1} = (1-x)(s_p+x^p) = (1-x)s_p+x^p-x^{p+1} =$$
$$= (1-x^p)+x^p-x^{p+1} = 1-x^{p+1}.$$

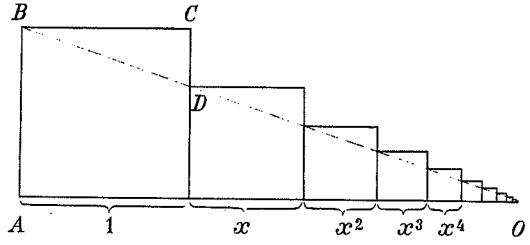
Wzór (7.3) jest więc udowodniony przez indukcję. Dzieląc go przez $1-x$, mamy dla $x \neq 1$

$$s_m = \frac{1-x^m}{1-x}. \tag{7.4}$$

Gdy $|x| < 1$, to na podstawie twierdzenia 6.1 mamy $\lim s_m = 1/(1-x)$, co należało udowodnić.

Twierdzenie 7.1 można prosto zilustrować geometrycznie. Z rysunku 47 widać, że trójkąty AOB i CBD są podobne, skąd wynika $AO/BA = BC/CD$, czyli

$$\frac{1+x+x^2+\ldots}{1} = \frac{1}{1-x}.$$



Rys. 47

§ 8. Ogólne pojęcie szeregu

Szereg geometryczny powstaje z ciągu geometrycznego przez utworzenie sum s_n określonych wzorami (7.1). Podobnie z każdego ciągu a_n można utworzyć szereg s_n, określając go wzorami

$$s_1 = a_1, \quad s_{m+1} = s_m + a_{m+1} \quad \text{dla } m \text{ naturalnych.} \tag{8.1}$$

Jest wtedy

$$s_2 = a_1+a_2,$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3,$$
$$s_4 = a_1+a_2+a_3+a_4$$

i ogólnie

$$s_n = a_1+\ldots+a_n. \tag{8.2}$$

Podobnie jak w przypadku szeregu geometrycznego ścisłą definicję symbolu (8.2) stanowią wzory (8.1).

Gdy $a_n = 1/(n(n+1))$, to łatwo można wykazać przez indukcję, że $s_n = 1-1/(n+1)$. W tym przypadku początkowymi wyrazami ciągu a_n są liczby

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \cdots \tag{8.3}$$

Odpowiadający temu ciągowi szereg zapisuje się zwykle w postaci

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots \tag{8.4}$$

Ale szereg ten można traktować jako ciąg sum częściowych

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \ldots,$$

co widać z równości $s_n = 1-1/(n+1)$.

Także szereg geometryczny można wobec wzoru (7.4) napisać w postaci ciągu

$$1, \frac{1-x^2}{1-x}, \frac{1-x^3}{1-x}, \ldots$$

Nie tylko z każdego ciągu można utworzyć szereg, który jest nowym ciągiem określonym wzorami (8.1), ale i odwrotnie, każdy zupełnie dowolny ciąg s_n może być uważany za szereg utworzony z odpowiednio dobranego ciągu a_n. Wystarczy przyjąć

$$a_1 = s_1, \quad a_{m+1} = s_{m+1}-s_m \quad \text{dla } m \text{ naturalnych.} \tag{8.5}$$

Związki (8.1) i (8.5) są najzupełniej równoważne, to znaczy z (8.1) wynika (8.5) i odwrotnie.

Istotną cechą teorii szeregów jest to, że rozważa się zawsze dwa ciągi: mówiąc o szeregu $a_1+a_2+a_3+\ldots$ myślimy o ciągu

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{8.6}$$

i jednocześnie o ciągu

$$s_1, s_2, s_3, \ldots \tag{8.7}$$

Zwykle zagadnienie polega na tym, że znamy wyrazy ciągu (8.6) lub wiemy coś o ich własnościach, a szukamy granicy ciągu (8.7) lub chcemy wiedzieć, czy ona istnieje.

Wyrazy ciągu (8.6) nazywamy wyrazami rozważanego szeregu $a_1+a_2+a_3+\ldots$ Wyrazy ciągu (8.7) nazywamy *sumami częściowymi* tego szeregu. Granicę s (jeżeli istnieje) ciągu (8.7) nazywamy *sumą szeregu* i piszemy

$$a_1+a_2+a_3+\ldots = s. \tag{8.8}$$

Suma szeregu jest więc granicą ciągu jego sum częściowych.

Na przykład

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots = 1,$$

ponieważ w tym przypadku $s_n = \dfrac{n}{n+1}$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Forma równości (8.8) ma przejrzysty sens intuicyjny; można sobie wyobrazić, że dodając kolejno nieskończenie wiele liczb a_1, a_2, a_3 itd. otrzymamy liczbę s.

TWIERDZENIE 8.1. *Jeżeli szereg* $a_1+a_2+a_3+\ldots$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód. Ze zbieżności szeregu wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba δ, że dla $n > \delta$ jest

$$|s_n - s| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Nierówność ta jest tym bardziej spełniona dla $n > \delta+1$; wtedy jest jednocześnie

$$|s_{n-1} - s| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Stąd $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leqslant |s_n - s| + |s_{n-1} - s| < \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ dla $n > \delta+1$, co dowodzi twierdzenia.

Twierdzenie powyższe mówi, że ze zbieżności ciągu (8.7) wynika zbieżność ciągu (8.6). Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, nawet gdy ciąg (8.6) jest zbieżny do zera; przykład na to podamy w § 19 rozdziału IV (str. 245).

§ 9. Użycie symbolu sumy

Sumy częściowe s_m, określone wzorami (8.1), pisze się często w postaci

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

Szereg $a_1+a_2+a_3+\ldots$ oznaczamy też symbolem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, a równość (8.8) piszemy w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest więc używany zarówno dla oznaczenia samego szeregu, jak i jego sumy. Ta niekonsekwencja, uświęcona tradycją, jest nieszkodliwa, gdyż z kontekstu zawsze wynika, czy w danym przypadku chodzi o szereg, czy mowa jest o jego sumie, na przykład „szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny“ lub „$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < 1$“.

TWIERDZENIE 9.1. *Jeżeli szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to dla każdej liczby* c *jest*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{9.1}$$

Twierdzenie to należy tak rozumieć, że jeżeli wszystkie wyrazy szeregu zbieżnego pomnożymy przez tę samą liczbę, to otrzymamy znowu szereg zbieżny, którego suma jest równa iloczynowi tej liczby przez sumę danego szeregu. Równość (9.1) można też napisać w postaci

$$ca_1+ca_2+ca_3+\ldots = c(a_1+a_2+a_3+\ldots).$$

Dowód. Przez łatwą indukcję wynika

$$\sum_{n=1}^{m} ca_n = c\sum_{n=1}^{m} a_n.$$

Stąd po przejściu do granicy otrzymujemy równość (9.1).

TWIERDZENIE 9.2. *Jeżeli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne, to*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{9.2}$$

Dowód. Niech r_n, s_n i t_n oznaczają odpowiednio sumy częściowe szeregów występujących w równości (9.2). Przez indukcję mamy $r_n = s_n+t_n$, co w granicy daje równość (9.2).

§ 10. Twiedzenie o porównywaniu szeregów

Nie każdy szereg ma sumę. Na przykład szereg $1+1+1+\ldots$, którego wszystkie wyrazy są równe 1, ma sumy częściowe $s_n = n$, a granica $\lim_{n\to\infty} n$ nie istnieje.

Szeregi, które mają sumę, nazywamy *zbieżnymi*. Dowód, że jakiś szereg jest zbieżny, można często przeprowadzić wygodnie przez porównanie z innym szeregiem, o którym wiemy, że jest zbieżny. Służy ku temu następujące

TWIERDZENIE 10.1 (o porównywaniu szeregów). *Jeżeli* $|a_n| \leqslant b_n$ *i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest także zbieżny; przy tym zachodzi nierówność* $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dowód. Niech p_n będzie ciągiem, który otrzymamy z ciągu a_n, zastępując w nim wszystkie wyrazy ujemne przez 0. Podobnie, niech q_n będzie ciągiem, który otrzymamy z ciągu a_n, zastępując w nim wszystkie wyrazy dodatnie przez 0 i biorąc pozostałe ze znakiem przeciwnym. A więc

$$p_n = \begin{cases} a_n, & \text{gdy } a_n \geqslant 0, \\ 0, & \text{gdy } a_n < 0; \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} -a_n, & \text{gdy } a_n \leqslant 0, \\ 0, & \text{gdy } a_n > 0. \end{cases}$$

Przy tych oznaczeniach jest

$$a_n = p_n - q_n. \tag{10.1}$$

Ponadto, wobec założenia $|a_n| \leqslant b_n$ mamy nierówności

$$0 \leqslant p_n \leqslant b_n \quad \text{i} \quad 0 \leqslant q_n \leqslant b_n. \tag{10.2}$$

Jeżeli przez s_m, t_m, u_m i v_m oznaczymy odpowiednio sumy częściowe szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n,$$

to z (10.1) i (10.2) przez indukcję wynikają związki

$$s_m = u_m - v_m, \quad 0 \leqslant u_m \leqslant t_m \quad \text{i} \quad 0 \leqslant v_m \leqslant t_m. \tag{10.3}$$

Ponieważ z założenia ciąg t_m jest zbieżny, więc na podstawie twierdzenia 3.2 (str. 117) istnieje taka liczba M, że $t_m \leqslant M$. Wobec tego też

$$0 \leqslant u_m \leqslant M \quad \text{i} \quad 0 \leqslant v_m \leqslant M.$$

Ponieważ $u_{m+1} = u_m + p_{m+1}$ i $v_{m+1} = v_m + q_{m+1}$, więc ciągi u_m i v_m są niemalejące i, jako ograniczone, mają granicę. Wobec pierwszej z równości (10.3) wynika stąd, że także ciąg s_m ma granicę, czyli że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Ponadto z nierówności (10.3) mamy $-t_m \leqslant s_m \leqslant t_m$ i po przejściu do granicy $-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, co uzupełnia dowód twierdzenia.

§ 11. Przybliżenia dziesiętne

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ będzie dowolnym ciągiem cyfr, to znaczy ciągiem, którego każdy wyraz α_n jest równy jednej z liczb 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9.

Z twierdzenia o porównywaniu szeregów wynika, że szereg

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\tfrac{1}{10}\right)^n \tag{11.1}$$

jest zawsze zbieżny, ponieważ

$$0 \leqslant \alpha_n \left(\tfrac{1}{10}\right)^n \leqslant 9\left(\tfrac{1}{10}\right)^n$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9\left(\tfrac{1}{10}\right)^n = 9\left(\tfrac{1}{10}\right) + 9\left(\tfrac{1}{10}\right)^2 + 9\left(\tfrac{1}{10}\right)^3 + \ldots = \tfrac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1.$$

W praktyce liczbę A przedstawiamy, pisząc obok siebie początkowe cyfry ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ i poprzedzając je przecinkiem i cyfrą 0, np. 0,5772. Taki symbol na ogół nie charakteryzuje liczby całkowicie, gdyż nie są w nim uwzględnione wszystkie wyrazy ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$; przypisujemy mu natomiast wartość innej, nie wiele różniącej się od A, liczby

$$A_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \left(\tfrac{1}{10}\right)^n,$$

gdzie m jest liczbą napisanych po przecinku cyfr. W naszym więc przykładzie jest

$$0{,}5772 = 5\left(\tfrac{1}{10}\right) + 7\left(\tfrac{1}{10}\right)^2 + 7\left(\tfrac{1}{10}\right)^3 + 2\left(\tfrac{1}{10}\right)^4.$$

Udowodnimy ogólnie, że

$$A_m \leqslant A \leqslant A_m + \left(\tfrac{1}{10}\right)^m. \tag{11.2}$$

Istotnie, ponieważ ciąg A_m jest rosnący, więc $A_m \leqslant A$. Dla udowodnienia drugiej części nierówności (11.2) rozważamy przy ustalonym m szereg

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m+n} \left(\tfrac{1}{10}\right)^n$$

i jego sumy częściowe B_n. Z definicji sum częściowych wynika, że $A_{m+1} = A_m + \left(\tfrac{1}{10}\right)^m B_1$ i ogólnie przez indukcję $A_{m+n} = A_m + \left(\tfrac{1}{10}\right)^m B_n$. Stąd dla $n \to \infty$ mamy w granicy $A = A_m + \left(\tfrac{1}{10}\right)^m B \leqslant A_m + \left(\tfrac{1}{10}\right)^m$ na podstawie twierdzenia o porównywaniu szeregów.

Dla przykładu rozważmy jeszcze przypadek, gdy wszystkie cyfry α_n są równe 2. Wtedy $A = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\tfrac{1}{10}\right)^m = \tfrac{2}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = \tfrac{2}{9}$. Dla $m = 5$ mamy $A_5 \leqslant A \leqslant A_5 + \left(\tfrac{1}{10}\right)^5$, czyli

$$0{,}22222 \leqslant \tfrac{2}{9} \leqslant 0{,}22222 + \left(\tfrac{1}{10}\right)^5.$$

Zamiast takich nierówności piszemy często

$$\tfrac{2}{9} \approx 0{,}22222.$$

Liczbę 0,22222 nazywamy *przybliżeniem dziesiętnym* liczby $\frac{2}{9}$ z dokładnością do piątego miejsca po przecinku.

Ogólnie, gdy znamy m początkowych cyfr ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, to zamiast A_m piszemy zero, przecinek, a następnie wszystkie m cyfr. Napisany symbol nazywamy przybliżeniem dziesiętnym liczby A (z dokładnością do m cyfr po przecinku) i wyrażamy to, pisząc znak $\approx$ między A i tym symbolem.

Podobnie zamiast sumy $\sum_{n=0}^{m} \beta_n 10^n$ (oznaczającej sumę $\beta_0 + \sum_{n=1}^{m} \beta_n 10^n$), gdzie β_n są cyframi, wypisujemy kolejno wszystkie cyfry β_n poczynając od β_m i kończąc na β_0, np.

$$\sum_{n=0}^{4} 3 \cdot 10^n = 3333.$$

Symbol w rodzaju 278,3023 oznacza liczbę 278 + 0,3023 i podobnie ogólnie. Ten sposób pisania jest tak dobrze znany, że bliższych wyjaśnień nie wymaga.

Wreszcie symbol

$$A \approx 278{,}3023$$

oznacza, że liczba A jest w przybliżeniu równa 278,3023. Co to znaczy w przybliżeniu, tego na ogół wyraźnie się nie precyzuje. W tej

książce przyjmujemy umowę, że oznacza to $278{,}3023 \leqslant A \leqslant 278{,}3023+(\frac{1}{10})^4$. Liczba A jest wtedy niemniejsza od liczby przybliżającej, ale niewiększa od tej liczby zwiększonej o $(\frac{1}{10})^m$, gdzie m jest liczbą cyfr po przecinku.

Pojęcie przybliżenia można by też w inny sposób sprecyzować. Teoria działań na liczbach przybliżonych należy do odrębnego działu matematyki, zwanego analizą numeryczną lub metodami numerycznymi.

§ 12. Szeregi potęgowe

Suma szeregu geometrycznego $1+x+x^2+\dots$ zależy od x. Jest więc funkcją określoną w przedziale $(-1, +1)$

$$f(x) = 1+x+x^2+\dots, \tag{12.1}$$

gdyż dla każdego x z tego przedziału szereg jest zbieżny.

Szereg geometryczny jest przykładem szeregu potęgowego. Oto inny przykład szeregu potęgowego:

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots; \tag{12.2}$$

jest on również zbieżny w przedziale $(-1, +1)$, ponieważ moduły jego wyrazów są mniejsze od wyrazów szeregu zbieżnego $|x|+|x|^2+|x|^3+\dots$

Ogólnie *szeregiem potęgowym* nazywamy każdy szereg

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots, \tag{12.3}$$

w którym współczynniki $a_0, a_1, a_2, \dots$ są ustalonymi liczbami. Zamiast (12.3) można napisać

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n \quad \text{albo krócej} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n;$$

w szczególności więc szeregom (12.1) i (12.2) można nadać postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Szeregi potęgowe grają w analizie bardzo ważną rolę, ponieważ pozwalają wprowadzić wiele nowych funkcyj o podstawowym znaczeniu. Na przykład szereg (12.2) jest związany z funkcją *logarytm.*

Dla szeregów potęgowych rozpatrzymy kolejno następujące zagadnienia:

1° Dla jakich wartości x szereg jest zbieżny? Innymi słowy: w jakim zbiorze jest określona funkcja przedstawiona przez dany szereg?

2° Czy funkcja ta jest ciągła?

3° Czy jest różniczkowalna i jak oblicza się jej pochodną?

§ 13. Promień zbieżności i przedział zbieżności

Jeżeli dla pewnej liczby dodatniej k szereg

$$a_0+a_1k+a_2k^2+\dots \tag{13.1}$$

jest zbieżny, to szereg (12.3) jest zbieżny dla $|x| < k$.

Istotnie, na podstawie twierdzenia 8.1 (str. 122) jest wtedy $\lim_{n\to\infty} a_nk^n = 0$, a stąd wynika, że $|a_nk^n| < M$ dla pewnego M. Jeśli więc $|x| < k$, to moduły wyrazów szeregu (12.3) lub, co na jedno wychodzi, szeregu

$$a_0+a_1k\frac{x}{k}+a_2k^2\left(\frac{x}{k}\right)^2+\dots \tag{13.2}$$

są niewiększe od wyrazów szeregu zbieżnego

$$M+M\frac{|x|}{k}+M\left(\frac{|x|}{k}\right)^2+\dots \tag{13.3}$$

Zatem szereg (13.2) i tym samym szereg (12.3) jest zbieżny.

Jeżeli zbiór liczb x, dla których szereg (12.3) jest zbieżny, jest ograniczony, to kres górny tego zbioru nazywamy *promieniem zbieżności*; oznaczmy go przez r. Przedział $(-r, r)$ nazywamy *przedziałem zbieżności.* Gdy x należy do tego przedziału, to istnieje taka liczba k, że $|x| < k < r$ i szereg (13.1) jest zbieżny; z twierdzenia o porównywaniu szeregów wynika, że wtedy szereg (12.3) jest zbieżny. Zatem *szereg*

potęgowy jest zbieżny wewnątrz przedziału zbieżności. Co więcej, w przedziale tym jest zbieżny także szereg

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2+\ldots$$

Fakt ten wyrażamy mówiąc, że szereg potęgowy jest *bezwzględnie zbieżny* wewnątrz przedziału zbieżności.

Szereg potęgowy nie jest zbieżny poza przedziałem zbieżności; gdyby bowiem był zbieżny dla pewnej liczby x poza tym przedziałem, to byłoby $|x| > r$, co przeczy definicji kresu r.

Na końcach przedziału zbieżności, to znaczy dla $x = -r$ lub $x = r$, może się zdarzyć, że szereg jest zbieżny lub rozbieżny. Sprawę tę omówimy bliżej w § 18 rozdziału IV.

Jeżeli zbiór liczb x, dla których szereg (12.3) jest zbieżny, nie jest ograniczony, to mówimy, że promień zbieżności jest nieskończony i piszemy $r = \infty$. Wtedy szereg jest zbieżny dla każdej wartości x i przedstawia funkcję określoną w przedziale nieskończonym $(-\infty, \infty)$. Może się wreszcie zdarzyć, że szereg (12.3) jest zbieżny tylko dla $x = 0$. Wtedy $r = 0$ i funkcja przedstawiona tym szeregiem ma określoną wartość (równą a_0) tylko w punkcie $x = 0$.

Szereg (12.1) ma promień zbieżności 1. Przykłady szeregów o promieniu zbieżności 0 lub ∞ podamy później.

§ 14. Ciągi funkcyjne

Ciągiem funkcyjnym nazywamy ciąg f_n, którego wyrazy są funkcjami określonymi w pewnym wspólnym przedziale (a, b), lub ściślej, mówimy o ciągu funkcyjnym wtedy, gdy każdej liczbie naturalnej przyporządkowana jest pewna funkcja f_n określona w danym przedziale (a, b). Ciąg funkcyjny f_n określa w każdym punkcie x przedziału (a, b) ciąg liczbowy $f_n(x)$. Gdy dla każdego punktu x tego przedziału istnieje granica ciągu liczbowego $f_n(x)$, to możemy wtedy określić nową funkcję f za pomocą wzoru $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ dla $a < x < b$. Mówimy wtedy, że ciąg funkcyjny f_n jest zbieżny do funkcji f.

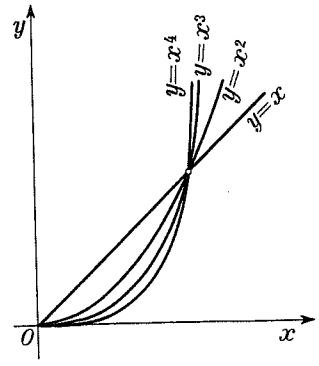
Tego rodzaju zbieżność ma niewielkie znaczenie w analizie. Natomiast podstawowe znaczenie ma pojęcie zbieżności jednostajnej.

§ 15. Zbieżność jednostajna

Mówimy, że ciąg funkcyjny f_n jest w przedziale (a, b) *zbieżny jednostajnie* do funkcji f, jeżeli istnieje taki ciąg liczb nieujemnych ε_n, że $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ oraz dla wszystkich n naturalnych i dla wszystkich x z przedziału (a, b) zachodzi nierówność $|f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon_n$. Piszemy wtedy $f_n \rightrightarrows f$ w (a, b).

Wobec twierdzenia 3.3 jest wtedy $\lim_{n\to\infty} (f_n(x)-f(x)) = 0$, czyli $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ dla każdego x z przedziału (a, b). Zatem każdy ciąg zbieżny jednostajnie w przedziale (a, b) jest w tym przedziale zbieżny.

Ciąg $f_n(x) = x^n$ jest zbieżny do 0 jednostajnie w przedziale $(0, \frac{1}{2})$, ponieważ w tym przedziale jest $|x^n-0| \leqslant (\frac{1}{2})^n$, a ciąg $\varepsilon_n = (\frac{1}{2})^n$ jest zbieżny do zera (rys. 48). Ciąg f_n jest zbieżny do 0 również w przedziale



Rys. 48. Ciąg funkcyjny $f_n(x) = x^n$

$(0, 1)$, zgodnie z twierdzeniem 6.1. Jednakże nie jest w nim zbieżny jednostajnie, bo każda z funkcyj tego ciągu ma w punkcie 1 granicę lewostronną 1 i wobec tego najmniejszą liczbą ε_n taką, że nierówność $|x^n-0| < \varepsilon_n$ jest spełniona w całym przedziale $(0, 1)$, jest liczba $\varepsilon_n = 1$. Z przykładu tego wynika, że nie każdy ciąg zbieżny jest zbieżny jednostajnie.

TWIERDZENIE 15.1. *Jeżeli w* (a, b) *jest* $f_n \rightrightarrows f$ *i* $g_n \rightrightarrows g$, *to*

$$f_n+g_n \rightrightarrows f+g,$$

$$f_n-g_n \rightrightarrows f-g.$$

Dowód. Z założenia istnieją ciągi liczb nieujemnych ε_n i η_n zbieżne do zera i takie, że $|f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon_n$ i $|g_n(x)-g(x)| \leqslant \eta_n$. Wobec tego

$$|(f_n(x)+g_n(x))-(f(x)+g(x))| \leqslant \varepsilon_n+\eta_n,$$

$$|(f_n(x)-g_n(x))-(f(x)-g(x))| \leqslant \varepsilon_n+\eta_n,$$

co dowodzi twierdzenia, gdyż ciągi po prawej stronie są zbieżne do zera.

Analogiczne twierdzenia można by – przy zachowaniu pewnych ostrożności – sformułować dla iloczynu i ilorazu, ale nie będą one nam w dalszym ciągu potrzebne.

Ciąg funkcyj stałych $f_n(x) = c$ jest zbieżny jednostajnie, gdyż dla każdego ciągu liczb nieujemnych ε_n jest $|f_n(x)-c| = 0 \leqslant \varepsilon_n$. Stąd wynika, wobec twierdzenia 15.1, że jeżeli ciąg g_n jest zbieżny jednostajnie, to ciąg $c+g_n$ jest również zbieżny jednostajnie.

TWIERDZENIE 15.2. *Jeżeli ciąg* f_n *jest zbieżny do* f *jednostajnie w przedziale* (a, b) *i jeżeli wszystkie funkcje* f_n *są ciągłe w* (a, b), *to* f *jest również funkcją ciągłą w* (a, b).

Dowód. Z równości $f(x)-f(x_0) = f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f(x_0)$ wynika

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant |f_n(x)-f(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|.$$

Wobec zbieżności jednostajnej ciągu jest dla x i x_0 z przedziału (a, b)

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon_n+|f_n(x)-f_n(x_0)|+\varepsilon_n,$$

gdzie ε_n jest ciągiem liczb nieujemnych dążących do zera.

Dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taki wskaźnik n_0, że $\varepsilon_{n_0} < \frac{1}{3}\varepsilon$ i w konsekwencji

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \tfrac{2}{3}\varepsilon+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|.$$

Ponieważ funkcja f_{n_0} jest ciągła, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla $|x-x_0| < \delta$ jest $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Wobec tego dla

$|x-x_0| < \delta$ jest

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Zatem funkcja f jest ciągła w każdym punkcie x_0 przedziału (a, b).

§ 16. Symbol sumy z dowolnymi granicami sumowania

W § 9 omówiliśmy znaczenie symboli $\sum_{n=1}^{m}$ i $\sum_{n=1}^{\infty}$. Jak widzieliśmy, w teorii szeregów potęgowych wygodniej jest sumowanie zaczynać od wskaźnika $n = 0$. Ogólnie można wprowadzić symbol sumowania w dowolnych granicach

$$\sum_{n=k+1}^{k+m} a_n;$$

oznacza on sumę liczb a_n o wskaźnikach całkowitych n, począwszy od $n = k+1$ aż do $n = k+m$; wskaźniki graniczne $k+1$ i $k+m$ mogą być zupełnie dowolnymi liczbami całkowitymi, byle był spełniony warunek $k+1 \leqslant k+m$. Dla oznaczenia takiej sumy często jest używany bardziej do intuicji przemawiający symbol

$$a_{k+1}+\ldots+a_{k+m}.$$

Ścisła definicja tych symboli musi być indukcyjna, albo też można ją oprzeć na poprzednio już zdefiniowanym (indukcyjnie) symbolu $\sum_{n=1}^{m} a_n$. Dla wygody wybierzemy ten drugi sposób, przyjmując, że

$$\sum_{n=k+1}^{k+m} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_{k+n} \quad (k \text{ całkowite, } m \text{ naturalne}).$$

Zgodnie z tą definicją jest np. dla $k = -1$

$$\sum_{n=0}^{0} a_n = a_0, \qquad \sum_{n=0}^{1} a_n = a_0+a_1, \qquad \sum_{n=0}^{2} a_n = a_0+a_1+a_2.$$

Podobnie przyjmujemy definicję

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k+n} \quad (k \text{ całkowite}).$$

W szczególności dla $k=-1$ mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} = a_0+a_1+a_2+\dots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

Udowodnimy, że jeżeli którykolwiek z szeregów

$$\text{(16.1)} \qquad \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \quad \text{lub} \quad \sum_{n=k+q+1}^{\infty} a_n \quad (q \text{ naturalne})$$

jest zbieżny, to drugi też jest zbieżny i jest spełniona równość

$$\text{(16.2)} \qquad \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=k+1}^{k+q} a_n + \sum_{n=k+q+1}^{\infty} a_n.$$

Równość tę możemy przedstawić bardziej intuicyjnie

$$a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}+\dots = (a_{k+1}+\dots+a_{k+q})+$$
$$+(a_{k+q+1}+a_{k+q+2}+a_{k+q+3}+\dots).$$

Oznaczmy odpowiednio przez s_m i t_m sumy częściowe szeregów (16.1) a więc

$$s_m = \sum_{n=k+1}^{k+m} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_{k+n} \quad \text{i} \quad t_m = \sum_{n=k+q+1}^{k+q+m} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_{k+q+n}.$$

W szczególności jest $t_1 = a_{k+q+1}$. Wobec tego $s_{q+1} = s_q+t_1$. Udowodnimy przez indukcję, że także

$$\text{(16.3)} \qquad s_{q+n} = s_q+t_n \quad \text{dla} \quad n \text{ naturalnych}.$$

W tym celu przypuśćmy, że dla pewnej liczby naturalnej p jest $s_{q+p} = s_q+t_p$. Dodając obustronnie $a_{k+q+p+1}$ mamy stąd $s_{q+p+1} = s_q+t_{p+1}$, co dowodzi (16.3). Gdy $n\to\infty$, to wzór (16.3) przechodzi w granicy we wzór (16.2), jeżeli którykolwiek z szeregów (16.1) jest zbieżny.

Ćwiczenie. Udowodnić wzór

$$\sum_{n=m+1}^{r} a_n = \sum_{n=m+1}^{q} a_n + \sum_{n=q+1}^{r} a_n \quad (m<q<r).$$

§ 17. O zbieżności jednostajnej szeregów potęgowych

Szereg potęgowy nazywamy *zbieżnym jednostajnie* w przedziale (a, b), jeżeli ciąg jego sum częściowych jest zbieżny jednostajnie w (a, b).

TWIERDZENIE 17.1. *Szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale $(-b, b)$, którego końce leżą wewnątrz przedziału zbieżności.*

Dowód. Jeżeli liczby $-b$ i b leżą wewnątrz przedziału zbieżności, to istnieje liczba $k>0$ leżąca poza $(-b, b)$, lecz wewnątrz przedziału zbieżności. Ponieważ szereg potęgowy

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

jest w przedziale zbieżności bezwzględnie zbieżny, więc w szczególności zbieżny jest szereg liczbowy

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| k^n.$$

Wprowadzając sumy częściowe

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \quad \text{i} \quad t_m = \sum_{n=0}^{m} |a_n| k^n,$$

możemy napisać na podstawie ogólnej równości (16.2)

$$s(x) = s_m(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{i} \quad t = t_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| k^n,$$

a na podstawie twierdzenia o porównywaniu szeregów

$$\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n\Big| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n| k^n.$$

Stąd

$$|s(x)-s_m(x)| \leqslant |t-t_m|$$

w przedziale (a, b). A to dowodzi zbieżności jednostajnej ciągu $s_m(x)$ w $(-b, b)$, gdyż ciąg $|t-t_m|$ dąży do zera.

TWIERDZENIE 17.2. *Szereg potęgowy przedstawia funkcję ciągłą wewnątrz przedziału zbieżności.*

Dowód. Jeżeli x jest dowolnym punktem wewnątrz przedziału zbieżności, to istnieje przedział $(-b, b)$ zawierający punkt x i którego końce leżą wewnątrz przedziału zbieżności. Ponieważ szereg jest zbieżny jednostajnie w $(-b, b)$, a jego sumy częściowe są ciągłe, więc przedstawia funkcję ciągłą w $(-b, b)$, a więc też w szczególności w punkcie x. Zatem funkcja ta jest ciągła w całym przedziale zbieżności, ponieważ punkt x może w nim być wybrany dowolnie.

§ 18. O różniczkowaniu ciągów funkcyjnych

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 18.1. *Jeżeli ciągi f_n i f_n' są zbieżne jednostajnie w (a, b) odpowiednio do f i g, to w (a, b) istnieje pochodna f' i jest $f' = g$.*

Podamy dwa dowody tego ważnego twierdzenia. Dowód I jest prostszy, ale wymaga dodatkowego założenia, że pochodne f_n' są ciągłe; dowód II jest ogólny.

Dowód I. Jednostajna zbieżność ciągu f_n' oznacza istnienie takiego ciągu liczb $\varepsilon_n > 0$, zbieżnego do zera, że

$$|f_n'(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon_n \quad \text{dla wszystkich } x \text{ z } (a, b). \tag{18.1}$$

Przy założeniu ciągłości f_n' również granica g jest ciągła w (a, b) (tw. 15.2, str. 132). Jeżeli więc x_0 należy do (a, b), to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że

$$|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad |x-x_0| < \delta.$$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej (tw. 27.1 z rozdziału II, str. 101) mamy

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right| = |f_n'(\xi)-g(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant |f_n'(\xi)-g(\xi)|+|g(\xi)-g(x_0)| < \varepsilon_n+\varepsilon$$

dla $|x-x_0| < \delta$, gdyż występująca w tym twierdzeniu liczba ξ jest zawarta między x a x_0 i wobec tego też spełnia nierówność $|\xi-x_0| < \delta$. Stąd przy $n \to \infty$ mamy w granicy

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad |x-x_0| < \delta,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g(x_0),$$

czyli że $f'(x_0) = g(x_0)$. Ponieważ punkt x_0 może być wybrany dowolnie w przedziale (a, b), więc twierdzenie jest dowiedzione.

Dowód II. Ustalmy dowolnie punkt x_0 w (a, b) i wprowadźmy funkcje pomocnicze

$$u_n(x) = \frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0} \tag{18.2}$$

przyjmując dodatkowo, że

$$u_n(x_0) = f_n'(x_0). \tag{18.3}$$

Przy takiej definicji funkcje u_n są ciągłe w przedziale (a, b). Mamy równość

$$u_m(x)-u_n(x) = \frac{(f_m(x)-f_m(x_0))-(f_n(x)-f_n(x_0))}{x-x_0},$$

a po zastosowaniu twierdzenia o wartości średniej (str. 101) do funkcji $\varphi = f_m-f_n$

$$u_m(x)-u_n(x) = f_m'(\xi)-f_n'(\xi).$$

Stąd, dzięki nierówności (18.1),

$$|u_m(x)-u_n(x)| \leqslant |f_m'(\xi)-g(\xi)|+|g(\xi)-f_n'(\xi)| \leqslant \varepsilon_m+\varepsilon_n. \tag{18.4}$$

Z (18.2) widać, że ciąg $u_n(x)$ jest dla $x \neq x_0$ zbieżny do

$$v(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Funkcja v jest przez to określona dla $x \neq x_0$. Z (18.3) widać, że ciąg $u_n(x_0)$ jest zbieżny do $g(x_0)$. Przyjmijmy, że

$$v(x_0) = g(x_0).$$

Gdy liczba m jest ustalona, a n dąży do nieskończoności, to z (18.4) wynika w granicy

$$|u_m(x) - v(x)| \leqslant \varepsilon_m,$$

co oznacza, że ciąg u_n jest zbieżny jednostajnie do v. Ale funkcje u_n są ciągłe, a więc i granica v jest funkcją ciągłą. W szczególności zatem $\lim_{x \to x_0} v(x) = v(x_0)$, czyli

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g(x_0),$$

co dowodzi twierdzenia.

Uwaga. Założenie o zbieżności jednostajnej ciągu w twierdzeniu 18.1 można zastąpić założeniem, że ten ciąg jest zbieżny w jednym (którymkolwiek) punkcie przedziału. Dowodzić tego w tej książce nie będziemy.

§ 19. Ciąg nq^n

Wiemy, że jeżeli $0 < q < 1$, to $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$. W dalszym ciągu potrzebne będzie

TWIERDZENIE 19.1. *Jeżeli* $0 < q < 1$, *to* $\lim_{n \to \infty} nq^n = 0$.

Dowód. Jest $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} q = q < 1$. Wobec tego istnieje taka liczba δ, że dla $n > \delta$ jest $\frac{n+1}{n} q < 1$. Stąd

$$(n+1)q^{n+1} < nq^n \quad \text{dla} \quad n > \delta.$$

Ciąg więc nq^n jest malejący dla $n > \delta$ i ograniczony. Tym samym jest zbieżny do pewnej granicy k. Z równości

$$(n+1)q^{n+1} = qnq^n + q^{n+1}$$

dochodzimy przy $n \to \infty$ do równości $k = qk$, z której wynika $k(1-q) = 0$ i $k = 0$.

§ 20. Różniczkowanie szeregów potęgowych

Udowodnimy teraz ważne

TWIERDZENIE 20.1. *Szeregi potęgowe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{20.1}$$

i

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \tag{20.2}$$

mają ten sam promień zbieżności i jest $f'(x) = g(x)$ *wewnątrz przedziału zbieżności* (1).

Twierdzenie to staje się bardziej intuicyjne, gdy zamiast (20.1) i (20.2) napiszemy

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \quad \text{i} \quad g(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

Dowód. Zamiast (20.2) można napisać

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{20.3}$$

Niech x będzie dowolnie ustaloną, różną od zera, liczbą leżącą wewnątrz przedziału zbieżności, a b liczbą większą od $|x|$ leżącą również wewnątrz tego przedziału. Ponieważ ciąg $n\left|\frac{x}{b}\right|^n$ jest zbieżny i tym samym ograniczony, więc można napisać

$$|na_n x^{n-1}| = \left|\frac{1}{x} n \left(\frac{x}{b}\right)^n a_n b^n\right| \leqslant M|a_n| b^n.$$

Z nierówności tej wynika, że szereg (20.3) jest zbieżny, bo szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| b^n$ jest zbieżny. Zatem szereg (20.3) jest zbieżny w tym samym przedziale co szereg (20.1).

---

(1) Dla szeregów funkcyjnych dowolnych (nie potęgowych) nie musi tak być; szereg $\sum f_n'$ nie musi być zbieżny w przedziale, w którym zbieżny jest szereg $\sum f_n$, a choćby był zbieżny, nie musi być $(\sum f_n)' = \sum f_n'$. (Por. tw. 18.1).

Na odwrót, szereg (20.1) jest zbieżny w tym samym przedziale co szereg (20.3), gdyż jeżeli x należy do tego przedziału, to

$$|a_n x^n| \leqslant |x| n |a_n| |x^{n-1}|$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||x|^{n-1}$ jest zbieżny.

Zatem szeregi (20.1) i (20.3), a tym samym szeregi (20.1) i (20.2) mają ten sam promień zbieżności.

Oznaczmy przez $s_n(x)$ sumy częściowe szeregu (20.1), a przez $t_n(x)$ sumy częściowe szeregu (20.3). Wtedy

$$s_1(x) = a_0 + a_1 x, \qquad t_1(x) = a_1,$$
$$s_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \qquad t_2(x) = a_1 + 2a_2 x,$$
$$s_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \qquad t_3(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2.$$

Widać, że $s_1'(x) = t_1(x)$, $s_2'(x) = t_2(x)$, $s_3'(x) = t_3(x)$; ogólnie mamy przez indukcję $s_n'(x) = t_n(x)$. Ciągi $s_n(x)$ i $t_n(x)$ są na podstawie twierdzenia 17.1 zbieżne jednostajnie w każdym przedziale $(-b, b)$, którego końce leżą wewnątrz przedziału zbieżności. Zatem między ich granicami $f(x)$ i $g(x)$ jest związek $f'(x) = g(x)$ (tw. 18.1). Związek ten zachodzi w każdym przedziale $(-b, b)$, a więc wewnątrz całego przedziału zbieżności.

§ 21. Funkcje równe swej pochodnej

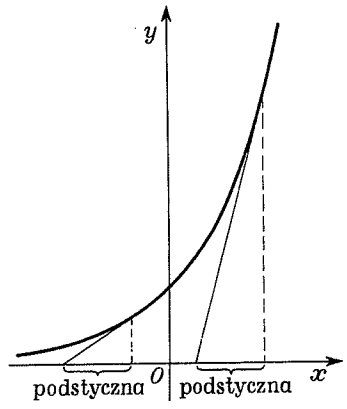
Teoria szeregów potęgowych pozwala nam łatwo udowodnić istnienie funkcyj równych swej pochodnej. Geometrycznie oznacza to, że wszystkie podstyczne krzywej $y = f(x)$ są sobie równe (rys. 49). Analitycznie własność ta wyraża się równaniem

$$f'(x) = f(x). \tag{21.1}$$

Oczywiście funkcja, która jest wszędzie równa zeru, spełnia to równanie; ale chodzi o znalezienie innych jeszcze funkcyj.

Załóżmy chwilowo, że istnieją funkcje postaci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{21.2}$$



Rys. 49

spełniające równanie (21.1). Wtedy wewnątrz przedziału zbieżności musi być

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Jeżeli założymy, że

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n \quad \text{dla całkowitych } n \geqslant 0, \tag{21.3}$$

to równość (21.1) będzie spełniona. W szczególności ze wzoru (21.3) wynika

$$a_1 = \frac{a_0}{1}, \quad a_2 = \frac{a_0}{1 \cdot 2}, \quad a_3 = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

jeżeli iloczyn n pierwszych kolejnych liczb naturalnych oznaczymy przez $n!$, to możemy napisać ogólnie

$$a_n = \frac{a_0}{n!} \quad (n \text{ naturalne}). \tag{21.4}$$

Ścisła definicja symbolu $n!$ jest indukcyjna:

$$1! = 1, \quad (n+1)! = (n+1)n! \quad \text{dla } n \text{ naturalnych}; \tag{21.5}$$

ponadto przyjmujemy $0! = 1$, co jest często wygodne w rachunkach. Ze wzorów (21.3) i (21.5) przez indukcję wynika wzór (21.4).

W szczególności można obliczyć, że

$$2! = 2, \quad 5! = 120, \quad 8! = 40\,320,$$
$$3! = 6, \quad 6! = 720, \quad 9! = 362\,880,$$
$$4! = 24, \quad 7! = 5040, \quad 10! = 3\,628\,800.$$

Wobec (21.4) równość (21.2) można napisać w postaci

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{21.6}$$

Udowodnimy, że szereg ten ma nieskończony promień zbieżności, to znaczy, że jest zbieżny dla każdego x. Niech więc x będzie dowolnie ustaloną liczbą (różną od zera). Istnieje liczba naturalna m większa od $|x|$. Dla niej zachodzą związki

$$\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{|x|^m}{m!} \cdot \frac{|x|}{m+1} < \frac{|x|^m}{m!} \cdot \frac{|x|}{m}$$

i przez indukcję

$$\frac{|x|^{m+n}}{(m+n)!} < \frac{|x|^m}{m!} \left(\frac{|x|}{m}\right)^n.$$

Stąd widać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{m+n}}{(m+n)!} \tag{21.7}$$

jest zbieżny, zbieżny bowiem jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^m}{m!} \left(\frac{|x|}{m}\right)^n = \frac{|x|^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{m}\right)^n.$$

Wraz z (21.7) zbieżne są szeregi (21.6) i (21.2). Ponieważ x możemy ustalić dowolnie, więc te szeregi są zbieżne dla wszystkich x. Funkcja (21.2) nie jest wszędzie równa zeru, gdy $a_0 \neq 0$, ponieważ $f(0) = a_0$.

Wprowadźmy oznaczenie

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \tag{21.8}$$

dla $x = 0$ funkcja e^x przyjmuje wartość 1:

$$e^0 = 1.$$

Funkcję $f(x)$ wyrażoną wzorem (21.6) można przedstawić w postaci

$$f(x) = a_0 e^x.$$

Wykazaliśmy więc istnienie funkcyj równych swej pochodnej w przedziale $(-\infty, \infty)$.

Wyjaśnimy jeszcze stronę logiczną tego dowodu. Zakładaliśmy najpierw, że istnieje funkcja spełniająca równość (21.1), choć właśnie naszym celem było udowodnienie istnienia takiej funkcji. Nie ma w tym jednak błędnego koła, bo założenie istnienia służyło tylko do znalezienia postaci współczynników a_n. Mając już te współczynniki dowodzimy, że rozważany szereg jest zbieżny i przedstawia właśnie funkcję o żądanych własnościach. Taki sposób rozumowania jest często używany w teorii szeregów potęgowych.

Funkcję e^x nazywamy *naturalną funkcją wykładniczą*. Jest ona tak napisana, jakby liczba e miała być podniesiona do potęgi x. Na razie jednak nie mamy prawa interpretować jej w ten sposób, a to z dwóch powodów. Po pierwsze, nie uprawnia nas do tego przyjęta definicja (21.8); po drugie, dotąd nie zdefiniowaliśmy jeszcze potęg o wykładnikach nie całkowitych. Z tego powodu litera e w symbolu e^x nie może mieć, przynajmniej na razie, samodzielnego znaczenia i symbol e^x musimy chwilowo traktować jako całość, podobnie jak $f(x)$.

Ćwiczenia. Obliczyć pochodne funkcyj:

$$e^x x^n, \quad e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6), \quad \frac{1}{e^x - 1}, \quad \frac{x^2}{1 + xe^x}.$$

§ 22. Pochodna funkcji złożonej

Dla wyprowadzenia podstawowych własności funkcji wykładniczej skorzystamy z następującego twierdzenia ogólnego.

TWIERDZENIE 22.1 (o pochodnej funkcji złożonej). *Jeżeli funkcja $g(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x, a funkcja $f(t)$ jest różniczkowalna w punkcie $t = g(x)$, to funkcja złożona $F(x) = f(g(x))$ jest różniczkowalna w punkcie x i mamy równość*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x). \tag{22.1}$$

Dowód. Oznaczmy w dowodzie przez x_0 punkt, w którym funkcja $g(x)$ jest różniczkowalna i przypuśćmy, że $f(t)$ jest różniczkowalna w punkcie $t_0 = g(x_0)$. Tym samym przyjmujemy, że funkcja $f(t)$ jest określona w pewnym przedziale (a, b), do którego należy punkt t_0.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą

$$\varrho(t) = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - f'(t_0); \tag{22.2}$$

przyjmując dodatkowo, że

$$\varrho(t_0) = 0,$$

będziemy mieli funkcję $\varrho(t)$ określoną w całym przedziale (a, b) i ciągłą w punkcie t_0. Z (22.2) mamy dla $t \neq t_0$

$$f(t)-f(t_0) = (t-t_0)\big(f'(t_0)+\varrho(t)\big); \tag{22.3}$$

równość ta zachodzi także dla $t = t_0$, a więc w całym przedziale (a, b).

Ponieważ funkcja $g(x)$, jako różniczkowalna, jest ciągła dla $x = x_0$, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że wartość $g(x)$ należy do przedziału (a, b), gdy $|x-x_0| < \delta$. Wobec (22.3) można więc napisać

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(x_0)\big)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\Big(f'\big(g(x_0)\big)+\varrho\big(g(x)\big)\Big) \qquad (x \neq x_0).$$

Stad w granicy przy $x \to x_0$ otrzymujemy równość $F'(x_0) = g'(x_0)f'\big(g(x_0)\big)$, co dowodzi twierdzenia.

PRZYKŁAD 1. $(e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = e^{x^2}2x = 2xe^{x^2}$.

PRZYKŁAD 2. $\big(f(x-x_0)\big)' = f'(x-x_0)(x-x_0)' = f'(x-x_0)$.

Ćwiczenia. Obliczyć pochodne następujących funkcyj:

$$e^{2x^3-3x^2}, \quad xe^{-x}, \quad e^{(x-1)/(x+1)}, \quad x/(1+e^{x^2}).$$

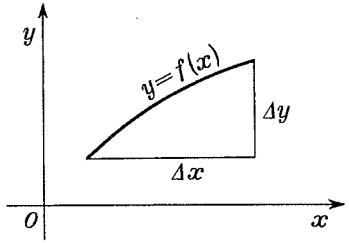
§ 23. Ilorazy różnicowe i ilorazy różniczkowe

Jeżeli w ilorazie różnicowym $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ przyjmiemy oznaczenia $\Delta y = f(x)-f(x_0)$ i $\Delta x = x-x_0$, to możemy go przedstawić w postaci bardziej symetrycznej

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{23.1}$$

Symbol Δx nazywamy *różnicą zmiennej* x, a symbol Δy *różnicą zmiennej* y; stąd też nazwa *ilorazu różnicowego* dla (23.1). Gdy pochodna $f'(x)$ istnieje, to przy Δx dążącym do zera również Δy dąży do zera (rys. 50). Dawniej wyobrażano sobie, że w granicy Δx i Δy stają się *wielkościami nieskończenie małymi*, które oznaczano przez dx i dy i nazywano *różniczkami*. Stąd pisano równość

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$



Rys. 50

Oznaczenie pochodnej symbolem dy/dx jest wygodne i do dziś często używane. Jednakże w takim *ilorazie różniczkowym* nie traktujemy już jak kiedyś licznika i mianownika jako wielkości nieskończenie małych, bo pojęcia te nie dają się w prosty i naturalny sposób ściśle zdefiniować.

W matematyce współczesnej nieraz mówi się o różniczkach, ale przypisuje się im inne znaczenie. Pisząc

$$dy = f'(x_0)\,dx,$$

określamy (przy ustalonym x_0) funkcję, która każdej liczbie dx przyporządkowuje pewną liczbę dy. Tę funkcję nazywamy *różniczką funkcji f w punkcie x_0*.

Używając znakowania różniczkowego, możemy wzór (22.1) napisać w postaci

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dx},$$

która przypomina algebraiczną tożsamość. Mimo tego podobieństwa, nie można tego wzoru traktować jako dowodu twierdzenia 22.1.

§ 24. Funkcje równe swej pochodnej (dalszy ciąg)

Wykazaliśmy w § 21, że każda funkcja postaci

$$f(x) = a_0 e^x \tag{24.1}$$

jest równa swej pochodnej. Udowodnimy jeszcze, że są to jedyne funkcje o tej własności. Nie wynika to wcale z poprzednich rozważań, zwłaszcza że braliśmy pod uwagę jedynie funkcje rozwijalne w szereg potęgowy.

Przypuśćmy, że jakaś funkcja $g(x)$, o której wcale nie wiemy, czy jest rozwijalna w szereg potęgowy, spełnia w przedziale $(-\infty, \infty)$ równanie

$$g'(x) = g(x). \tag{24.2}$$

Ponieważ równość ta zachodzi dla wszelkich x, więc jest też

$$g'(x_0 - x) = g(x_0 - x), \tag{24.3}$$

gdzie x_0 może być dowolnie ustaloną liczbą.

Wprowadźmy funkcję pomocniczą

$$h(x) = g(x)g(x_0 - x); \tag{24.4}$$

ma ona pochodną

$$h'(x) = g'(x)g(x_0 - x) - g(x)g'(x_0 - x);$$

wobec (24.2) i (24.3) jest $h'(x) = 0$. Zatem funkcja $h(x)$ jest stała dla wszystkich x i jest $h(x) = h(0)$. Równość tę można wobec (24.2) napisać

w postaci

$$g(x)g(x_0 - x) = g(0)g(x_0). \tag{24.5}$$

Zachodzi ona dla wszelkich x, a także dla wszelkich x_0, ponieważ x_0 może być ustalone dowolnie. Jeżeli więc dane są dowolne dwie liczby x i y, to równość (24.5) będzie prawdziwa dla $x_0 = x + y$, to znaczy będzie

$$g(x)g(y) = g(0)g(x + y). \tag{24.6}$$

Udowodniliśmy, że funkcja spełniająca dla każdego x równanie różniczkowe (24.2), spełnia dla każdej pary liczb x i y równanie funkcyjne (24.6).

Wprowadźmy jeszcze funkcję pomocniczą

$$g_1(x) = g(x) - g(0)e^x. \tag{24.7}$$

Funkcja ta również spełnia równanie różniczkowe (24.2), a zatem także równanie funkcyjne (24.6). To ostatnie dla $x = y$ przyjmuje postać

$$g_1(x)g_1(x) = g_1(0)g_1(2x).$$

Ale $g_1(0) = g(0) - g(0) \cdot 1 = 0$, więc $g_1(x)g_1(x) = 0$ i w konsekwencji $g_1(x) = 0$ dla wszelkich x. Otrzymujemy więc z (24.7)

$$g(x) = g(0)e^x.$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że każda funkcja równa swej pochodnej jest postaci (24.1), a więc jest też rozwijalna w szereg potęgowy. Funkcja ta jest określona jedoznacznie przez swą wartość w punkcie 0.

§ 25. Funkcja e^x i jej własności

Funkcja e^x jest jedyną funkcją, która jest równa swej pochodnej i ma wartość 1 w punkcie 0. Jako funkcja różniczkowalna jest oczywiście funkcją ciągłą (co wynika też z tego, że rozwija się w szereg potęgowy). Funkcja e^x spełnia równanie funkcyjne (24.2), które wobec $e^0 = 1$ przyjmuje postać

$$e^x e^y = e^{x+y}. \tag{25.1}$$

Z rozwinięcia

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots \tag{25.2}$$

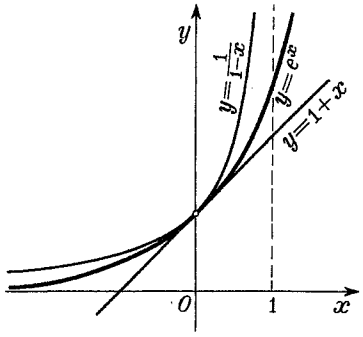
widać, że jest ona dodatnia dla $x \geqslant 0$. Dzięki równaniu (25.1) można łatwo pokazać, że jest ona dodatnia także dla $x < 0$. Istotnie, dla $y = -x$ mamy $e^x e^{-x} = e^0 = 1$, a stąd

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Zatem *funkcja e^x jest dodatnia dla wszelkich x. Jest przy tym funkcją rosnącą*, bo ma pochodną dodatnią.

Udowodnimy, że *e^x przyjmuje każdą wartość dodatnią dokładnie raz*. Z równości (25.2) widać, że dla $x > 0$ (rys. 51) jest

$$1+x < e^x, \tag{25.3}$$



Rys. 51

gdyż można napisać $e^x = 1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy przyjmując kolejno $x = a$ i $x = 1/a$ dostajemy

$$a < 1+a < e^a,$$

$$\frac{1}{a} < 1+\frac{1}{a} < e^{1/a},$$

skąd

$$e^{-1/a} < a < e^a.$$

Funkcja e^x jako ciągła przyjmuje każdą wartość pośrednią między $e^{-1/a}$ i e^a, w szczególności więc przyjmuje wartość a. Przyjmuje ją tylko raz, bo jest rosnącą.

Ćwiczenia. 1. Udowodnić, że nierówność (25.3) zachodzi także dla $x < 0$.

2. Udowodnić, że dla $x < 1$ jest $e^x < \frac{1}{1-x}$ (rys. 51).

§ 26. Dowolne funkcje wykładnicze i ich związek z potęgami

Udowodniliśmy, że dla każdej liczby dodatniej a istnieje taka liczba c, że

$$a = e^c. \tag{26.1}$$

Wobec (25.1) mamy

$$a^2 = e^c e^c = e^{2c},$$

$$a^3 = e^{2c} e^c = e^{3c}$$

i ogólnie przez indukcję dla wszystkich n naturalnych

$$a^n = e^{cn}. \tag{26.2}$$

Ponadto jest

$$a^0 = e^0 = 1 \quad \text{i} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{e^{cn}} = e^{-cn} \quad \text{dla } n \text{ naturalnych}.$$

Zatem wzór (26.2) ma miejsce dla wszystkich n całkowitych. To pozwala na oznaczenie funkcji e^{cx} symbolem

$$a^x \quad (a > 0),$$

gdyż symbolu tego używaliśmy dotąd tylko dla całkowitych wartości x. Jest więc

$$a^x = e^{cx}. \tag{26.3}$$

Zastępując we wzorze (25.1) x przez cx a y przez cy mamy

$$a^x a^y = a^{x+y}. \tag{26.4}$$

Funkcja a^x nazywa się *funkcją wykładniczą o podstawie* a $(a > 0)$. Jest ona uogólnieniem potęg o podstawie a na dowolne wykładniki x. Nie jest to jednak pełne uogólnienie, gdyż przy x całkowitym symbol a^x ma znaczenie także dla ujemnych a.

Wobec równości (26.1) i (26.3) można napisać

$$(e^c)^x = e^{cx}.$$

Równość ta zachodzi dla każdego c i x. Zastępując w niej x przez y a c przez cx będziemy mieli $(e^{cx})^y = e^{cxy}$, a stąd przy $a = e^c$

$$(a^x)^y = a^{xy}. \tag{26.5}$$

Równości (26.4) i (26.5) są spełnione dla wszelkich x i y i mają podstawowe znaczenie dla funkcyj wykładniczych.

W szczególności, gdy w (26.4) za y podstawimy liczbę naturalną n, a za x liczbę $-n$, to będziemy mieli $a^{-n}a^n = 1$, a stąd

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(zgodnie z definicją podaną w § 13 rozdziału II, str. 74). Wzór ten sprowadza obliczenia a^{-n} do mnożenia i dzielenia, gdyż a^n możemy uważać za iloczyn. Podobnie, podstawiając w (26.5) za y liczbę naturalną n a za x liczbę $1/n$ będziemy mieli

$$(a^{1/n})^n = a.$$

Widać stąd, że jeżeli a jest liczbą dodatnią a n liczbą nturalną, to zawsze istnieje liczba dodatnia b spełniająca równanie $b^n = a$. Liczbę tę nazywamy *n-tym pierwiastkiem* z liczby a i oznaczamy często symbolem $\sqrt[n]{a}$. Jest więc

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}.$$

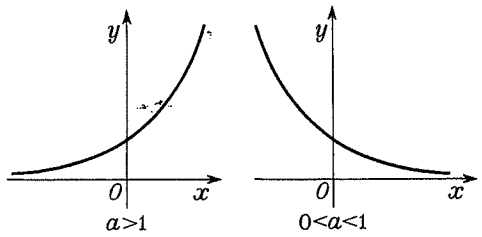
Uogólnienie potęgi na dowolne wykładniki można też wprowadzić stopniowo w inny sposób. Wprowadzamy najpierw wykładniki postaci $-n$, pisząc $a^{-n} = 1/a^n$. Następnie wprowadzamy wykładniki $1/n$, definiując liczbę $b = a^{1/n}$ jako dodatnie rozwiązanie równania $x^n = a$. Dowodzimy, że takie rozwiązanie jest jedyne. Następnie wprowadzamy wykładniki m/n, pisząc $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$. Wreszcie wprowadzamy

dowolne wykładniki x, pisząc $y = a^x$, gdy dla ciągu liczb wymiernych x_n zbieżnego do x ciąg a^{x_n} jest zbieżny do y. Dowodzimy, że wartość y nie zależy od wyboru ciągu x_n. Ten sposób wprowadzenia funkcyj wykładniczych ma pewne zalety, ale też i wady. Jest to mianowicie droga długa i żmudna. Twierdzeń o funkcjach wykładniczych musi się dowodzić kilkakrotnie, za każdym razem na nowo dla nowo wprowadzonego typu wykładników(1).

Dla uniknięcia tych trudności nieraz w podręcznikach w ogóle pomija się definicję funkcyj wykładniczych, co oczywiście stanowi pewną lukę. Niektórzy autorzy wprowadzają funkcję wykładniczą pośrednio przez logarytm, korzystając przy tym z pojęcia całki. Znany jest też sposób wprowadzenia jej przez szeregi potęgowe. W naszym wykładzie korzystaliśmy z szeregów potęgowych w dowodzie istnienia rozwiązań *równania różniczkowego* $f'(x) = f(x)$. Poza tym właśnie to równanie służyło za punkt wyjścia dla definicji funkcyj wykładniczych i wprowadzenia jej własności.

Definicja przez równanie różniczkowe wydaje się naturalna i dobrze wiąże teorię z praktyką, gdyż w większości zastosowań w fizyce, chemii itp. funkcje wykładnicze zjawiają się właśnie jako rozwiązania równań różniczkowych.

Ćwiczenie. Udowodnić, że funkcja wykładnicza a^x (rys. 52) jest rosnąca, gdy $a > 1$, a malejąca, gdy $0 < a < 1$.



$y = a^x$

Rys. 52

(1) Pełny wykład tej teorii jest podany w książce W. Sierpińskiego, *Działania nieskończone*, Warszawa 1948, str. 81-140.

§ 27. Liczba e

W symbolu a^x litera a może oznaczać dowolną liczbę dodatnią, a x w ogóle dowolną liczbę. Natomiast przy wprowadzeniu symbolu e^x zwróciliśmy specjalnie uwagę na to, że litera e nie ma oddzielnego znaczenia. Teraz możemy jej to znaczenie nadać, przyjmując, że $e = e^1$; wtedy e jest już liczbą, a funkcja e^x może być uważana za szczególny przypadek funkcji a^x.

Ponieważ liczba e jest wartością funkcji e^x w punkcie 1, więc jest sumą szeregu

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots, \tag{27.1}$$

który powstaje z szeregu (25.2) przez podstawienie $x = 1$.

Liczbę e nazywamy nieraz *podstawą logarytmów naturalnych*, gdyż jest związana z logarytmami naturalnymi, o których będziemy mówili w § 30. Wartość tej liczby możemy obliczyć z dowolnym przybliżeniem, korzystając z rozwinięcia (27.1).

Mamy nierówności

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!} < e < \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}+\frac{1}{m!m}, \tag{27.2}$$

ponieważ dla $n \geqslant m+1$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(m+1)!(m+1)^{n-m-1}}$$

i wobec tego

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!} < \frac{1}{(m+1)!}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^{n-m-1}} = \frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m!m}.$$

Przyjmując $m = 13$, mamy

$$\sum_{n=1}^{13}\frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+ \tag{27.3}$$
$$+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\frac{1}{13!}.$$

Ułamki po prawej stronie równości (27.3) łatwo jest obliczać kolejno z dowolnie ustalonym przybliżeniem. Na przykład do obliczenia 1/7! wystarczy znalezione już rozwinięcie dla 1/6! podzielić przez 7. W ten sposób na wykonanie rachunków wystarczy parę minut. Podane obok przybliżenia mają po 11 cyfr po przecinku i dokładność $1/10^{11}$. Wobec tego ich suma $l = 2{,}718\,281\,828\,39$ różni się od liczby (27.3) co najwyżej o $11/10^{11}$ (bo sumowaliśmy 11 liczb przybliżonych) i jest od niej mniejsza. Z drugiej strony jest $1/13!13 \approx 0{,}00000000001$, a więc $1/13!13 < 2/10^{11}$. Wobec (27.2) mamy $l < e < l+13/10^{11} < l+1/10^9$ i możemy napisać

$$e \approx 2{,}718\,281\,828.$$

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
1/1! &= 1\\
1/2! &= 0{,}5\\
1/3! &\approx 0{,}166\,666\,666\,66\\
1/4! &\approx 0{,}041\,666\,666\,66\\
1/5! &\approx 0{,}008\,333\,333\,33\\
1/6! &\approx 0{,}001\,388\,888\,88\\
1/7! &\approx 0{,}000\,198\,412\,69\\
1/8! &\approx 0{,}000\,024\,801\,58\\
1/9! &\approx 0{,}000\,002\,755\,73\\
1/10! &\approx 0{,}000\,000\,275\,57\\
1/11! &\approx 0{,}000\,000\,025\,05\\
1/12! &\approx 0{,}000\,000\,002\,08\\
1/13! &\approx 0{,}000\,000\,000\,16\\
\hline
&2{,}718\,281\,828\,39
\end{aligned}$$

Liczbę tę łatwo jest zapamiętać, gdyż powtarzają się w niej dwukrotnie cyfry 1828.

Przy wykonywaniu powyższych rachunków musimy oczywiście umieć dodawać do siebie rozwinięcia dziesiętne i dzielić je przez liczbę całkowitą. Odpowiednie algorytmy, czyli praktyczne sposoby wykonywania tych działań, wypływają z definicji przez nas przyjętych. Systematycznym uzasadnieniem tych algorytmów zajmuje się *arytmetyka teoretyczna*, w szkole zaś podstawowej są wykładane bez ścisłego uzasadnienia.

Ćwiczenie. Korzystając ze wzoru (25.2), obliczyć z dokładnością do sześciu znaków dziesiętnych liczby $\sqrt[5]{e}$ i $1/\sqrt{e}$.

§ 28. Funkcje odwrotne

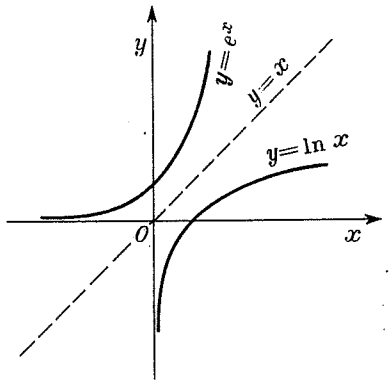
Dla każdej liczby dodatniej x istnieje dokładnie jedna liczba y, taka że

$$e^y = x. \tag{28.1}$$

Wobec tego równość ta określa nam w przedziale $(0, \infty)$ nową funkcję. Nazywamy ją *logarytmem naturalnym* i piszemy

$$y = \ln x. \tag{28.2}$$

Wykres funkcji $y = \ln x$ (rys. 53) nie różni się niczym od wykresu funkcji $x = e^y$, który powstaje ze znanego nam wykresu funkcji $y = e^x$ przez odbicie względem prostej $y = x$.



Rys. 53

Naturalna funkcja wykładnicza i logarytm naturalny są funkcjami *odwrotnymi.*

Wprowadzimy ogólne pojęcie funkcyj odwrotnych. Przypuśćmy, że funkcja f jest określona w zbiorze F i że jest w nim *różnowartościowa,* to znaczy w każdym punkcie tego zbioru przyjmuje inną wartość. Zbiór wartości tej funkcji oznaczmy przez G. Wtedy dla każdej liczby x ze zbioru G istnieje w zbiorze F taka liczba y (tylko jedna), że

$$f(y) = x. \tag{28.3}$$

Tym samym w zbiorze G jest określona funkcja

$$y = g(x), \tag{28.4}$$

dla której F jest zbiorem wartości. Funkcję g nazywamy *odwrotną* względem f. Rola zbiorów F i G zmienia się dla funkcji odwrotnej.

Jeżeli funkcję f uważamy za zbiór par uporządkowanych, to funkcję odwrotną otrzymamy, przestawiając w każdej parze kolejność elementów. Stąd widać, że pojęcie funkcji odwrotnej jest symetryczne: jeżeli g jest funkcją odwrotną względem f, to f jest funkcją odwrotną względem g. Widać też, dlaczego wykresy funkcyj odwrotnych znajdujemy przez odbicie symetryczne względem prostej $y = x$. Każdej parze liczb należącej do danej funkcji odpowiada pewien punkt na płaszczyźnie. Skoro współrzędne przestawiamy, to punkt przejdzie w punkt położony symetrycznie względem tej prostej.

Podstawiając (28.4) w (28.3) mamy

$$f(g(x)) = x \quad \text{dla} \quad x \in G.$$

Podobnie, podstawiając (28.3) w (28.4), mamy $y = g(f(y))$ dla $y \in F$, co można też napisać

$$g(f(x)) = x \quad \text{dla} \quad x \in F.$$

Stąd widać, że *funkcja złożona z dwóch funkcyj odwrotnych względem siebie jest równa x w całym zbiorze, gdzie określona jest funkcja wewnętrzna.*

Jest więc na przykład

$$e^{\ln x} = x \quad \text{dla} \quad x > 0 \quad \text{i} \quad \ln e^x = x \quad \text{dla wszelkich } x.$$

Nie dla każdej funkcji istnieje funkcja odwrotna. Jeżeli mianowicie w różnych punktach zbioru F, np. w punktach x_1 i x_2, funkcja dana przyjmuje jedną i tę samą wartość x_0, to funkcja odwrotna nie będzie określona w punkcie x_0; nie wiadomo bowiem, czy przypisać jej wartość x_1 czy x_2. Przed wprowadzeniem funkcji odwrotnej musimy więc zawsze stwierdzić, czy dana funkcja jest różnowartościowa.

Każda funkcja, która jest stale rosnąca albo stale malejąca w pewnym przedziale F (otwartym lub domkniętym, skończonym lub nieskończonym) jest różnowartościowa w tym przedziale. Istnieje więc dla niej funkcja odwrotna.

TWIERDZENIE 28.1. *Jeżeli funkcja f jest rosnąca i ciągła w pewnym przedziale F, to zbiór G, w którym jest określona funkcja odwrotna g, jest również pewnym przedziałem i funkcja g jest w nim rosnąca i ciągła.*

Zdanie to pozostaje także prawdziwe, gdy w nim wyrazy „rosnąca" zastąpimy przez „malejąca".

Dowód. Jeżeli liczby y_1 i y_2 należą do G, to funkcja f jako ciągła przyjmuje każdą wartość pośrednią między y_1 i y_2, co dowodzi, że G jest pewnym przedziałem (którego końce są kresami zbioru G w przypadku ograniczoności).

Przypuśćmy, że y_1 i y_2 należą do G i że $y_1 < y_2$. Istnieją w F takie liczby x_1 i x_2, że $f(x_1) = y_1$ i $f(x_2) = y_2$. Jest więc $f(x_1) < f(x_2)$. Jeżeli funkcja f jest rosnąca, to musi być $x_1 < x_2$. Ale $x_1 = g(y_1)$ i $x_2 = g(y_2)$, więc $g(y_1) < g(y_2)$, co dowodzi, że funkcja g jest rosnąca. Jeżeli f jest malejąca, to $x_1 > x_2$ i $g(y_1) > g(y_2)$, co dowodzi, że jest malejąca.

Pozostaje do udowodnienia ciągłość funkcji g. Załóżmy dalej, że f (i tym samym g) jest funkcją rosnącą. Niech y_0 będzie dowolnym punktem wewnętrznym przedziału G. Wtedy punkt $x_0 = g(y_0)$ leży wewnątrz przedziału F. Mając daną liczbę $\varepsilon > 0$ dobieramy dwie liczby x_1 i x_2 z przedziału F takie, że

$$x_0 - \varepsilon < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon. \tag{28.5}$$

Gdy $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = (x_2)$, mamy stąd $y_1 < y_0 < y_2$ i możemy dobrać taką liczbę $\delta > 0$, że

$$y_1 < y_0 - \delta < y_0 + \delta < y_2.$$

Dla $|x - y_0| < \delta$ jest $y_1 < x < y_2$ i $g(y_1) < g(x) < g(y_2)$, czyli $x_1 < g(x) < x_2$ i dalej wobec (28.5) $x_0 - \varepsilon < g(x) < x_0 + \varepsilon$, co dowodzi ciągłości funkcji g w punkcie y_0.

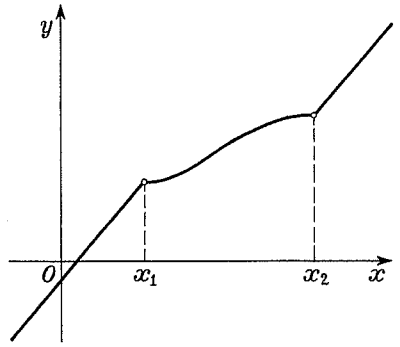
Jeżeli funkcja f jest malejąca, to dowód jest taki sam, należy w nim tylko wszędzie zamiast y_1 napisać y_2 i dowrotnie.

Udowodniliśmy w ten sposób ciągłość funkcji g w punktach wewnętrznych przedziału G. Gdy przedział G jest otwarty, to tym samym dowód jest zakończony. Gdy jest domknięty, to przedział F jest także domknięty. Jeżeli liczby x_1 i x_2 są końcami przedziału F, to liczby $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_2)$ są końcami przedziału G.

Gdy funkcja f jest rosnąca w przedziale $[x_1, x_2]$, to definicję jej (rys. 54) rozszerzamy na przedział $(-\infty, \infty)$ przyjmując $f(x) = f(x_1) + x - x_1$ dla $x < x_1$ i $f(x) = f(x_2) + x - x_2$ dla $x > x_2$. Gdy funkcja f jest malejąca, to przyjmujemy $f(x) = f(x_1) - x + x_1$ dla $x < x_1$ i $f(x) = f(x_2) - x + x_2$ dla $x > x_2$.

Tak rozszerzona funkcja jest w całym przedziale $(-\infty, \infty)$ rosnąca lub malejąca; poza tym jest ciągła. Funkcja odwrotna jest również określona w całym przedziale $(-\infty, \infty)$ i jest w nim ciągła, bo jest to przedział otwarty. Tym samym funkcja g jest ciągła w $[y_1, y_2]$.

Ćwiczenie. Dowieść, że funkcja różnowartościowa i ciągła jest rosnąca lub malejąca.



Rys. 54. Funkcja rosnąca rozszerzona do przedziału $(-\infty, \infty)$

§ 29. Pochodna funkcji odwrotnej

Jeżeli f i g są funkcjami względem siebie odwrotnymi, to

$$f(g(x)) = x.$$

Jeżeli istnieją pochodne f' i g', to stosując twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej mamy $f'(g(x))g'(x) = 1$, a stąd

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Jest to wzór na różniczkowanie funkcji odwrotnej. Został on wyprowadzony przy założeniu, że obie pochodne f' i g' istnieją. Wystarczy jednak założyć tylko, że f' istnieje.

TWIERDZENIE 29.1 (o różniczkowaniu funkcji odwrotnej). *Jeżeli funkcja f jest ciągła i rosnąca lub malejąca w przedziale (a, b), a ponadto ma pochodną różną od zera w punkcie y tego przedziału, to funkcja odwrotna g ma pochodną w punkcie $x = f(y)$ i jest*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \tag{29.1}$$

Dowód. Oznaczmy w dowodzie przez t_0 punkt, w którym funkcja $f(x)$ ma pochodną różną od zera i przyjmijmy, że $x_0 = f(t_0)$. Wprowadźmy funkcję pomocniczą $\varrho(t)$ określoną tak samo, jak w dowodzie twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej (str. 144). Wtedy

$$x - x_0 = f(g(x)) - f(g(x_0)) = (g(x) - g(x_0))\big(f'(g(x_0)) + \varrho(g(x))\big),$$

a stąd dla $x \neq x_0$

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{f'(g(x_0))+\varrho(g(x))}. \tag{29.2}$$

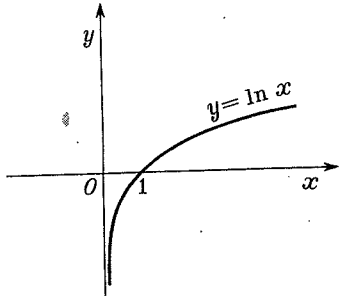
Gdy $x \to x_0$, wtedy $\varrho(g(x))$ dąży do zera, bo funkcja g jest ciągła i równa t_0 w punkcie x_0, a funkcja ϱ jest ciągła i równa 0 w punkcie t_0. Wobec tego z (29.2) dostajemy w granicy $g'(x) = 1/f'(g(x_0))$, co dowodzi twierdzenia.

Zauważmy jeszcze, że równość (29.1) przybiera postać algebraicznej tożsamości, gdy pochodne przedstawimy jako ilorazy różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

§ 30. Logarytm naturalny

Funkcja $\ln x$ jest funkcją odwrotną do e^x. Jest ona określona w przedziale $(0, \infty)$ i jest w tym przedziale ciągła i rosnąca (rys. 55). Dla $0 < x < 1$ przyjmuje wartości ujemne, a dla $x > 1$ wartości



Rys. 55

dodatnie. W punkcie 1 ma wartość 0. Pochodną tej funkcji obliczamy według wzoru ogólnego (29.1). Ponieważ $(e^x)' = e^x$, więc

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Funkcja $\ln(1+x)$ jest określona w przedziale $(-1, \infty)$, a w przedziale $(-1, 1)$ daje się rozwinąć w prosty szereg potęgowy. W tym celu wychodzimy z szeregu

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots, \tag{30.1}$$

który jest zbieżny w przedziale $(-1, 1)$. Lewa strona tej równości jest pochodną funkcji $\ln(1+x)$, a prawa jest pochodną szeregu

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \tag{30.2}$$

który na podstawie twierdzenia 20.1 (str. 139) jest również zbieżny w przedziale $(-1, 1)$. Ponieważ pochodne te są równe w przedziale $(-1, 1)$, więc same funkcje różnią się o pewną stałą C

$$\ln(1+x) = C + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \tag{30.3}$$

Pozostaje wyznaczenie stałej C. Ponieważ jest ona ta sama dla całego przedziału, więc możemy ją wyznaczyć, podstawiając w (30.3) $x = 0$. Mamy wtedy $0 = C$. Wobec tego mamy ostatecznie dla $-1 < x < 1$ równość

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots, \tag{30.4}$$

czyli

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{30.5}$$

Udowodnimy później, że równości te są spełnione także dla $x = 1$. Natomiast dla $x = -1$ szereg po prawej stronie jest rozbieżny (str. 130), jak również dla $|x| > 1$ (gdyż każdy szereg potęgowy jest rozbieżny poza przedziałem zbieżności).

Ćwiczenia. 1. Obliczyć pochodne funkcyj

$$x^2\ln(x^3), \quad \ln(1+x^2), \quad \ln\frac{1+x}{1-x}, \quad e^x\ln x+\ln 3, \quad \ln(\ln x), \quad \ln(1+e^{-x}).$$

2. Obliczyć przybliżoną wartość $\ln\frac{1}{2}$ na podstawie wzoru (30.4).

§ 31. Logarytmy o dowolnej podstawie

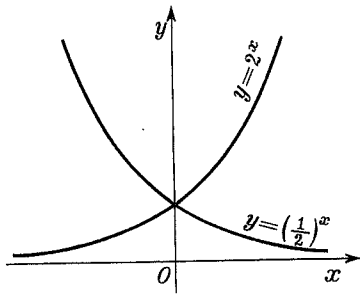
Ponieważ $a = e^{\ln a}$ $(a > 0)$, więc

$$a^x = e^{x\ln a}.$$

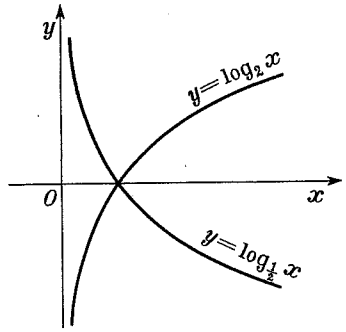
Stąd na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej jest $(a^x)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x\ln a$. Mamy więc wzór

$$(a^x)' = a^x\ln a.$$

Zatem pochodna funkcji wykładniczej a^x jest ujemna, gdy $0 < a < 1$, a dodatnia, gdy $a > 1$. Stąd wynika, że funkcja wykładnicza a^x (rys. 56) jest malejąca, gdy $0 < a < 1$, a rosnąca, gdy $a > 1$. Gdy $a = 1$, to $a^x = 1$.



Rys. 56



Rys. 57

Funkcję odwrotną do a^x nazywamy *logarytmem* o podstawie a i oznaczmy przez $\log_a x$; zakładamy przy tym, że a jest liczbą dodatnią, różną od 1.

Funkcja $\log_a x$ (rys. 57) jest malejąca, gdy $0 < a < 1$, a rosnąca, gdy $a > 1$; w obu przypadkach jest $\log_a 1 = 0$.

Przy wszelkich dodatnich a, x i y $(a \neq 0)$ są spełnione następujące równości:

$$\log_a xy = \log_a x+\log_a y,$$

$$\log_a\frac{x}{y} = \log_a x-\log_a y,$$

$$\log_a x^p = p\log_a x \quad (p \text{ dowolna liczba}), \tag{31.1}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

Wzory te można wyprowadzić przez następujące przekształcenia:

$$\log_a xy = \log_a(a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}) = \log_a(a^{\log_a x+\log_a y}) = \log_a x+\log_a y,$$

$$\log_a\frac{x}{y} = \log_a\left(\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}\right) = \log_a(a^{\log_a x-\log_a y}) = \log_a x-\log_a y,$$

$$\log_a x^p = \log_a((a^{\log_a x})^p) = \log_a(a^{p\log_a x}) = p\log_a x,$$

$$\log_a x = \frac{\log_a x\cdot\ln a}{\ln a} = \frac{\ln(a^{\log_a x})}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a},$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

Ponieważ $\ln e = 1$, więc z przedostatniego ze wzorów (31.1) wynika

$$\log_e x = \ln x.$$

W szczególności więc wzory (31.1) są prawdziwe dla logarytmów naturalnych i można w nich wszędzie zamiast $\log_a$ napisać ln.

Ćwiczenia. 1. Udowodnić, że dla wszelkich dodatnich i różnych od 1 liczb a i b zachodzi wzór

$$\log_a b\cdot\log_b a = 1.$$

2. Obliczyć pochodne następujących funkcyj

$$2^x, \quad \log_2(1+x), \quad \ln\frac{1}{1+3^x}, \quad 2^{2^x}.$$

3. Udowodnić, że

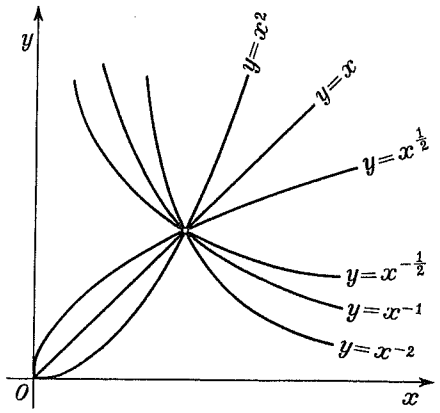
$$(\log_x a)' = -\frac{(\log_x a)^2}{x \ln a}.$$

§ 32. Pochodne funkcyj potęgowych

Przez *funkcję potęgową* rozumiemy funkcję

$$f(x) = x^a;$$

wykładnik a może być dowolnie ustaloną liczbą (rys. 58). Przypadek całkowitego a omówiliśmy już w §§ 24 i 26 rozdziału II. Gdy a nie jest całkowite, ograniczamy się do dodatnich wartości x.



Rys. 58

Przedstawiając funkcję potęgową w postaci

$$f(x) = e^{a \ln x},$$

łatwo znajdujemy jej pochodną

$$f'(x) = e^{a \ln x}\frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1},$$

stąd wzór ogólny

$$(x^a)' = ax^{a-1} \qquad (x > 0).$$

W szczególności jest

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{-(n-1)/n} \quad \text{i} \quad (x^{-1/n})' = -\frac{1}{n}x^{-(n+1)/n},$$

co można też napisać

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' = -\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}.$$

W zastosowaniach najczęściej występuje pierwiastek kwadratowy, któremu odpowiada wzór

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

wzór ten warto utrwalić sobie w pamięci. Równie ważny jest wzór

$$(\ln(x+\sqrt{x^2+a}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \qquad (x^2+a>0),$$

który wynika z następującego rachunku:

$$(\ln(x+\sqrt{x^2+a}))' = \frac{(x+\sqrt{x^2+a})'}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{1+\frac{(x^2+a)'}{2\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}(x+\sqrt{x^2+a})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Funkcja potęgowa x^a różni się tym od wykładniczej a^x, że w potęgowej zmienna jest podstawa a stały wykładnik, w wykładniczej zaś odwrotnie, stała podstawa a zmienny wykładnik. Są to funkcje różne. (Zatem wykładnik nie jest przemienny z podstawą, jak w iloczynie są przemienne czynniki) W obu zresztą przypadkach znalezienie pochodnej polegało na sprowadzeniu do naturalnej funkcji wykładniczej przez utworzenie funkcyj złożonych $e^{a \ln x}$ czy też $e^{x \ln a}$.

Tę samą metodę można też stosować do przypadku, kiedy zarówno podstawa, jak i wykładnik są zmienne, a więc do funkcyj postaci

$$F(x) = g(x)^{f(x)} \quad (g(x) > 0).$$

Możemy mianowicie napisać

$$F = e^{f \ln g},$$

a stąd

$$F' = e^{f \ln g}(f \ln g)' = g^f\left(\frac{f}{g}g' + f' \ln g\right).$$

Ostatecznie więc jest

$$(g^f)' = g^f\left(f\frac{g'}{g} + f' \ln g\right).$$

Wzoru tego nie musimy pamiętać, gdyż w praktyce jest wygodniej stosować omawianą metodę (sprowadzenia do funkcji wykładniczej) w każdym przypadku osobno.

PRZYKŁAD 1.

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(x \ln x)' = x^x(\ln x + 1) \quad (x > 0).$$

PRZYKŁAD 2.

$$((\ln x)^{x^2})' = (e^{x^2 \ln \ln x})' = e^{x^2 \ln \ln x}(x^2 \ln \ln x)' =$$

$$= (\ln x)^{x^2}\left(2x \ln \ln x + \frac{x}{\ln x}\right) \quad (x > 1).$$

Ćwiczenia. 1. Obliczyć pochodne następujących funkcyj:

$$\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}, \quad \frac{(8x^4+4x^2+3)\sqrt{x^2-1}}{15x^2}, \quad \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}},$$

$$2^{\sqrt{1+2x}}, \quad 3^x + x^3 + x^x + 3^3, \quad x^{-2x^2}, \quad (\log_2 x)^{e^x}.$$

2. Wskazać przedziały, w których niżej podane funkcje są rosnące i przedziały, w których są malejące:

$$xe^{-x}, \quad (\ln x)^2 - 2\ln x, \quad x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$$

§ 33. Obliczanie logarytmów naturalnych liczb naturalnych

Wzór (30.4) nadaje się do przybliżonego obliczania logarytmów, ale tylko dla wartości x bliskich zera. Chcąc obliczyć logarytmy liczb naturalnych poddajemy ten wzór pewnemu przekształceniu.

Zastępując we wzorze (30.4) x przez $-x$ mamy

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \tag{33.1}$$

Odejmując równość (33.1) od (30.4) otrzymujemy

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right). \tag{33.2}$$

Taki rachunek ma charakter intuicyjny. Ścisłe wprowadzenie tego wzoru musi się opierać na pojęciu sumy szeregu jako granicy ciągu sum częściowych. Udowodnimy ogólnie, że jeżeli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w przedziale $(-r, r)$ i $b_n = a_{2n}$, $c_n = a_{2n+1}$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1} \tag{33.3}$$

i szeregi po prawej stronie są zbieżne w $(-r, r)$.

Oznaczmy odpowiednio przez $s_n^*(x)$, $t_n^*(x)$ i $u_n^*(x)$ sumy częściowe szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n x^{2n}| \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^{2n+1}|. \tag{33.4}$$

Przez indukcję dostajemy nierówności

$$t_n^*(x) \leqslant s_{2n}^*(x) \quad \text{i} \quad u_n^*(x) \leqslant s_{2n+1}^*(x).$$

Ciągi $t_n^*(x)$ i $u_n^*(x)$ są niemalejące i ograniczone dla każdego ustalonego x z przedziału $(-r, r)$, bo ciąg $s_n^*(x)$ jest ograniczony. Stąd wynika, że ciągi $t_n^*(x)$ i $u_n^*(x)$ są zbieżne, a tym samym i szeregi (33.4). W konsekwencji są zbieżne także szeregi we wzorze (33.3). Oznaczmy odpowiednio przez $s_n(x)$, $t_n(x)$ i $u_n(x)$ sumy częściowe odpowiadające tym szeregom. Przez indukcję mamy

$$s_{2n+1}(x) = t_n(x) + u_n(x),$$

skąd przez przejście do granicy otrzymujemy równość (33.3).

Równość (33.3) można by też uzyskać od razu, korzystając z twierdzenia 9.2 i z twierdzenia o dowolnym grupowaniu wyrazów, którego w tej książce nie omawiamy.

Równość (33.1) można napisać w postaci

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$$

odejmując ją od równości (30.5) mamy

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gdzie $a_n = \frac{1-(-1)^n}{2n}$, czyli $a_{2n} = 0$ i $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$. Wobec tego na podstawie wzoru (33.3) mamy

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

co jest równoważne ze wzorem (33.2).

Dla danej liczby naturalnej p dobierzmy x w ten sposób, żeby

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{p+1}{p}.$$

Stąd $x = 1/(2p+1)$. Podstawiając tę wartość do wzoru (33.2) otrzymujemy równość

$$\ln\frac{p+1}{p} = 2\left(\frac{1}{1(2p+1)} + \frac{1}{3(2p+1)^3} + \frac{1}{5(2p+1)^5} + \dots\right).$$

Dodając obustronnie $\ln p$ mamy

$$\ln(p+1) = \ln p + 2\left(\frac{1}{1(2p+1)} + \frac{1}{3(2p+1)^3} + \frac{1}{5(2p+1)^5} + \dots\right),$$

czyli

$$\ln(p+1) = \ln p + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2p+1)^{2n+1}}. \tag{33.5}$$

Możemy więc znaleźć logarytm liczby $p+1$, gdy już znamy $\ln p$. W ten sposób możemy obliczać kolejno logarytmy liczb naturalnych wychodzące ze znanej już równości $\ln 1 = 0$. Dla $p = 1$ mamy na

podstawie (33.5)

$$\ln 2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}.$$

Dla przybliżonego obliczenia $\ln 2$ napiszemy

$$\ln 2 = 2\left(\sum_{n=0}^{8} \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}} + \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\right). \tag{33.6}$$

Oznaczmy przez S_2 wartość pierwszej sumy we wzorze (33.6), a przez R_2 wartość drugiej sumy w tym wzorze. Jest więc

$$\ln 2 = 2(S_2 + R_2).$$

Przybliżoną wartość S_2 obliczymy, pisząc dwie kolumny liczb:

$1/3 \approx 0{,}333\,333\,333\,33$	$1/(1\cdot 3) \approx 0{,}333\,333\,333\,33$
$1/3^3 \approx 0{,}037\,037\,037\,03$	$1/(3\cdot 3^3) \approx 0{,}012\,345\,679\,01$
$1/3^5 \approx 0{,}004\,115\,226\,33$	$1/(5\cdot 3^5) \approx 0{,}000\,823\,045\,26$
$1/3^7 \approx 0{,}000\,457\,247\,37$	$1/(7\cdot 3^7) \approx 0{,}000\,065\,321\,05$
$1/3^9 \approx 0{,}000\,050\,805\,26$	$1/(9\cdot 3^9) \approx 0{,}000\,005\,645\,02$
$1/3^{11} \approx 0{,}000\,005\,645\,02$	$1/(11\cdot 3^{11}) \approx 0{,}000\,000\,513\,18$
$1/3^{13} \approx 0{,}000\,000\,627\,22$	$1/(13\cdot 3^{13}) \approx 0{,}000\,000\,048\,24$
$1/3^{15} \approx 0{,}000\,000\,069\,66$	$1/(15\cdot 3^{15}) \approx 0{,}000\,000\,004\,64$
$1/3^{17} \approx 0{,}000\,000\,007\,74$	$1/(17\cdot 3^{17}) \approx 0{,}000\,000\,000\,45$
	$\sigma_2 \approx 0{,}346\,573\,590\,18$

Liczby pierwszej kolumny znajdujemy kolejno, dzieląc za każdym razem przez 9 wypisaną poprzednio liczbę. Liczby drugiej kolumny znajdujemy, dzieląc liczby pierwszej kolumny odpowiednio przez 1, 3, 5 itd. Suma liczb drugiej kolumny wynosi $\sigma_2 = 0{,}346\,573\,590\,18$ i stanowi przybliżoną wartość liczby S_2; w sumie tej mieliśmy dziewięć liczb przybliżonych, więc

$$\sigma_2 \leqslant S_2 \leqslant \sigma_2 + \frac{9}{10^{11}}.$$

Ponieważ dla $n \geqslant 9$ jest

$$\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}} \leqslant \frac{1}{19\cdot 3^{19}} \cdot \frac{1}{9^{n-9}},$$

więc

$$0 \leqslant R_2 \leqslant \frac{1}{19\cdot 3^{19}} \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{9^{n-9}} = \frac{1}{19\cdot 3^{19}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{19\cdot 3^{17}\cdot 8} < \frac{51}{10^{11}}.$$

Wobec tego

$$\sigma_2 < S_2 + R_2 < \sigma_2 + \frac{6}{10^{10}},$$

$$2\sigma_2 < \ln 2 < 2\sigma_2 + \frac{12}{10^{10}} \tag{33.7}$$

i ostatecznie

$$\ln 2 \approx 0{,}693\,147\,18.$$

W praktyce kolejność rachunków jest nieco inna. Najpierw ustalamy dokładność, z jaką chcemy obliczyć logarytm. Następnie obliczamy poszczególne wyrazy szeregu z nieco większą dokładnością, na ogół o dwa lub trzy miejsca więcej, gdyż przez sumowanie liczb przybliżonych błąd się powiększa. Obliczamy tyle wyrazów szeregu, aż otrzymamy wreszcie liczbę, w której wszystkie cyfry są zerami. Taka metoda empiryczna pozwala mniej więcej ustalić liczbę wyrazów szeregu, które bierzemy w rachubę. Ta metoda nie daje jeszcze gwarancji co do stopnia dokładności otrzymanego przybliżenia i dlatego potrzebne jest jeszcze dodatkowe oszacowanie reszty (liczby R_2 w poprzednim przykładzie).

Liczby $\ln 4$ nie musimy obliczać ze wzoru (33.5), ponieważ $\ln 4 = 2\ln 2$. Wobec (33.7) mamy

$$4\sigma_2 < \ln 4 < 4\sigma_2 + \frac{24}{10^{10}}. \tag{33.8}$$

Ponieważ $4\sigma_2 = 1{,}386\,294\,360\,72$, więc mamy od razu

$$\ln 4 \approx 1{,}386\,294\,36.$$

Liczbę $\ln 5$ obliczymy z (33.5) przyjmując $p = 4$:

$$\ln 5 = \ln 4 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 9^{2n+1}}.$$

Stąd

$$\ln 5 = \ln 4 + 2(S_5 + R_5),$$

gdzie możemy przyjąć

$$S_5 = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{(2n+1)\cdot 9^{2n+1}} \quad \text{i} \quad R_5 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 9^{2n+1}}.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} 1/(1\cdot 9) &\approx 0{,}111\,111\,111\,1\\ 1/(3\cdot 9^3) &\approx 0{,}000\,457\,247\,3\\ 1/(5\cdot 9^5) &\approx 0{,}000\,003\,387\,0\\ \underline{1/(7\cdot 9^7) \approx 0{,}000\,000\,029\,5}&\\ \sigma_5 &= 0{,}111\,571\,774\,9 \end{aligned}$$

$$\sigma_5 \leqslant S_5 \leqslant \sigma_5 + \frac{4}{10^{10}},$$

$$0 < R_5 < \frac{1}{9\cdot 9^7\cdot 80} < \frac{4}{10^{10}}$$

i wobec (33.8)

$$4\sigma_2 + 2\sigma_5 < \ln 5 = \ln 4 + 2(S_5 + R_5) < 4\sigma_2 + 2\sigma_5 + \frac{32}{10^{10}}. \tag{33.9}$$

Ponieważ $4\sigma_2 + 2\sigma_5 = 1{,}609\,437\,910\,52$, więc

$$\ln 5 \approx 1{,}609\,437\,91.$$

Logarytm z liczby 10 znajdziemy ze związku $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$. Wobec (33.7) i (33.9) mamy

$$6\sigma_2 + 2\sigma_5 < \ln 10 < 6\sigma_2 + 2\sigma_5 + \frac{44}{10^{10}}.$$

Ponieważ $6\sigma_2 + 2\sigma_5 = 2{,}302\,585\,090\,88$, więc

$$\ln 10 \approx 2{,}302\,585\,09.$$

Wszystkie powyższe logarytmy zostały obliczone z dokładnością do ośmiu miejsc po przecinku. Dalsze cyfry zostały odrzucone. Są to przybliżenia *z niedomiarem*, bo są mniejsze od liczb, które reprezentują. W praktyce często używa się też przybliżeń z *nadmiarem*, mianowicie wtedy, gdy pierwsza cyfra odrzucona jest $\geqslant 5$. W takim przypadku ostatnią cyfrę nie odrzuconą zwiększa się o 1.

Ćwiczenie. Obliczyć z dokładnością do ośmiu miejsc dziesiętnych po przecinku logarytmy naturalne liczb 3, 6, 7, 8 i 9.

§ 34. Obliczanie logarytmów dziesiętnych

Mając logarytmy naturalne możemy ze wzoru

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

obliczyć logarytmy o podstawie 10, czyli *logarytmy dziesiętne.*

Jest więc na przykład

$$1{,}098\,612\,28 < \ln 3 < 1{,}098\,612\,29,$$

$$2{,}302\,585\,09 < \ln 10 < 2{,}302\,585\,10;$$

stąd

$$\frac{1{,}098\,612\,28}{2{,}302\,585\,10} < \log_{10} 3 < \frac{1{,}098\,612\,29}{2{,}302\,585\,09}.$$

wykonując dzielenie, znajdujemy nierówności

$$0{,}477\,121\,24 < \log_{10} 3 < 0{,}477\,121\,26,$$

skąd

$$\log_{10} 3 \approx 0{,}477\,121\,2.$$

Widzimy, że przy przechodzeniu od logarytmów naturalnych do dziesiętnych straciliśmy jedno miejsce po przecinku. Chcąc tego uniknąć trzeba obliczyć z większą dokładnością liczbę $\ln 10$. Oto przybliżenie dwunastocyfrowe:

$$\ln 10 \approx 2{,}302\,585\,092\,994.$$

Zamiast dzielić przez tę liczbę, wygodniej jest w praktyce mnożyć przez jej odwrotność

$$\frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}434\,294\,481\,903.$$

Na przykład

$$1{,}098\,612\,28 \cdot 0{,}434\,294\,481\,9 < \log_{10} 3 < 1{,}098\,612\,29 \cdot 0{,}434\,294\,482,$$

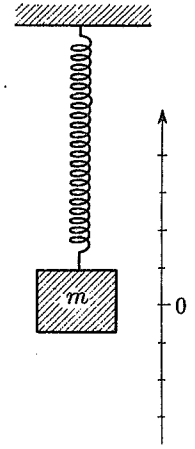
$$0{,}477\,121\,25 < \log_{10} 3 < 0{,}477\,121\,26,$$

$$\log_{10} 3 \approx 0{,}477\,121\,25.$$

§ 35. Funkcje równe swej drugiej pochodnej ze znakiem przeciwnym

W geometrii elementarnej funkcje sinus i cosinus wprowadza się jako stosunki boków trójkąta prostokątnego. W wykładzie analizy, opartym wyłącznie na własnościach liczb rzeczywistych, taka droga byłaby zupełną niekonsekwencją i wprowadzałaby obcy element do dotychczasowych metod dowodzenia. Dlatego w tej książce punktem wyjścia będzie równanie różniczkowe, podobnie jak w przypadku funkcji wykładniczej. Ujęcie to wiąże bardzo dobrze teorię z zastosowaniami w fizyce i technice, gdzie zarówno funkcja wykładnicza, jak i funkcje trygonometryczne pojawiają się przeważnie jako rozwiązania równań różniczkowych.

Zawieśmy ciało o masie m na sprężynie tak, żeby nastąpiła równowaga (rys. 59); siła grawitacji jest zrównoważona przez od-



Rys. 59

powiednie rozciągnięcie sprężyny i ciało pozostaje w spoczynku w pewnym punkcie, który oznaczmy przez 0. Jeżeli ciało wychylimy z położenia zerowego, to równowaga zostanie zachwiana. Na podstawie prawa Hooke'a będzie na ciało działała siła proporcjonalna do wychylenia i skierowana do góry. Współczynnik proporcjonalności k nazywamy *stałą sprężyny.*

Jeżeli w chwili t wychylenie od położenia zerowego wynosi $y(t)$, to na podstawie drugiego prawa Newtona w czasie ruchu ciała zachodzi stale związek

$$my''(t) = -ky(t), \tag{35.1}$$

gdzie $y''(t)$ oznacza *drugą pochodną* funkcji $y = y(t)$, czyli pochodną pochodnej: $y'' = (y')'$.

Wprowadźmy funkcję

$$f(x) = y\left(\sqrt{\frac{m}{k}}x\right).$$

Na podstawie twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej jest

$$f'(x) = \sqrt{\frac{m}{k}}y'\left(\sqrt{\frac{m}{k}}x\right) \quad \text{i} \quad f''(x) = \frac{m}{k}y''\left(\sqrt{\frac{m}{k}}x\right).$$

Wobec tego podstawiając $t = \sqrt{\frac{m}{k}}x$ w (35.1), otrzymujemy związek

$$f''(x) = -f(x).$$

W ten sposób rozpatrywane zagadnienie fizyczne zostało sprowadzone do znalezienia funkcji, która jest równa swej drugiej pochodnej ze znakiem przeciwnym. Istnienie takich funkcyj udowodnimy, podobnie jak istnienie funkcyj wykładniczych, metodą szeregów potęgowych.

Przedtem jednak musimy omówić pewną odmianę zasady indukcji matematycznej.

§ 36. Pewna odmiana zasady indukcji matematycznej

Przypuśćmy, że chcemy jakieś twierdzenie, w którym występuje litera n, udowodnić dla wszystkich całkowitych $n \geqslant n_0$, gdzie n_0 jest ustaloną liczbą całkowitą. Dowodzimy, że

(I) Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = n_0$;

(II) Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich całkowitych n spełniających nierówności $n_0 \leqslant n \leqslant p$, to jest też prawdziwe dla $n = p+1$.

Skoro uda się nam udowodnić (I) i (II), to stąd już wynika, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich całkowitych $n \geqslant n_0$. Istotnie, oznaczmy przez Z_m zbiór liczb całkowitych spełniających nierówności $n_0 \leqslant n \leqslant n_0+m-1$. Zbiór Z_1 składa się z jednej tylko liczby n_0. Wobec (I) dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n \in Z_1$. Przypuśćmy, że jest prawdziwe dla $n \in Z_q$, to znaczy dla $n_0 \leqslant n \leqslant n_0+q-1$. Na podstawie (II) jest też prawdziwe dla $n = n_0+q$, a więc dla wszystkich n spełniających nierówności $n_0 \leqslant n \leqslant n_0+q$, to znaczy dla $n \in Z_{q+1}$. Przez indukcję (w pierwotnej postaci) wynika, że twierdzenie jest prawdziwe dla n należących do Z_m przy dowolnym m naturalnym. Jeżeli teraz n jest dowolnie daną liczbą naturalną $\geqslant n_0$, to należy do zbioru Z_{n-n_0+1} i wobec tego twierdzenia jest dla tej liczby prawdziwe. Tym samym omawiana odmiana zasady indukcji jest udowodniona.

Podobną odmianę można też stosować do definicji indukcyjnej. Nowy symbol S_n definiujemy dla wszystkich całkowitych $n \geqslant n_0$ w następujący sposób:

(I) Definiujemy symbol S_{n_0};

(II) Definiujemy symbol S_{p+1} za pomocą symboli S_n ze wskaźnikami n spełniającymi nierówności $n_0 \leqslant n \leqslant p$.

Definicje indukcyjne są omawiane dokładniej w wykładach arytmetyki teoretycznej.

§ 37. Funkcje cosinus i sinus

Przypuśćmy, że istnieją funkcje $f(x)$ spełniające równanie

$$f''(x) = -f(x) \tag{37.1}$$

i rozwijają się w szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{37.2}$$

Wtedy wewnątrz przedziału zbieżności są spełnione równości

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$$

Jeżeli założymy, że

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \quad \text{dla całkowitych } n \geqslant 0, \tag{37.3}$$

to będzie spełniona równość (37.1). Z (37.3) znajdujemy kolejno

$$a_2 = -\frac{a_0}{2!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{4!}, \quad a_6 = -\frac{a_0}{6!}, \quad \ldots;$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3!}, \quad a_5 = \frac{a_1}{5!}, \quad a_7 = -\frac{a_1}{7!}, \quad \ldots$$

Niech a_0 i a_1 będą dowolnie ustalonymi liczbami i niech A oznacza większą z liczb $|a_0|$ i $|a_1|$. Korzystając ze wzoru (37.3), udowodnimy przez indukcję, że

$$|a_n| \leqslant \frac{A}{n!} \quad \text{dla całkowitych } n \geqslant 0. \tag{37.4}$$

Z założenia nierówność ta jest spełniona dla $n = 0$ i dla $n = 1$. Przypuśćmy, że jest spełniona dla wszystkich n spełniających nierówności $1 \leqslant n \leqslant p$. Wtedy na podstawie (37.3) mamy dla $n = p-1$

$$|a_{p+1}| = \frac{|a_{p-1}|}{p(p+1)} \leqslant \frac{A}{(p-1)!p(p+1)} = \frac{A}{(p+1)!}.$$

Przez indukcję wynika stąd, że nierówność (37.4) jest spełniona dla wszystkich $n \geqslant 1$; ponieważ jest także spełniona dla $n = 0$, tym samym udowodniliśmy ją dla wszystkich całkowitych $n \geqslant 0$.

Wiemy, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{n!}|x|^n$$

jest zbieżny w całym przedziale nieskończonym $(-\infty, \infty)$. Z nierówności więc (37.4) wynika, że i szereg (37.2), w którym współczynniki a_n są określone indukcyjnie przez (37.3), jest zbieżny w tym przedziale i przedstawia w nim funkcję ciągłą spełniająca równanie (37.3).

Wprowadźmy oznaczenia $b_n = a_{2n}$ i $c_n = a_{2n+1}$. Wtedy jest wobec (37.3)

$$b_{n+1} = -\frac{b_n}{(2n+1)(2n+2)} \quad \text{i} \quad c_{n+1} = -\frac{c_n}{(2n+2)(2n+3)},$$

a stąd przez indukcję

$$b_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}a_0 \quad \text{i} \quad c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_1.$$

Ponadto z (37.2) mamy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{i} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{37.5}$$

możemy więc napisać

$$f(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x. \tag{37.6}$$

Wprowadzone funkcje (37.5) nazywamy odpowiednio *cosinus* i *sinus*. Można też napisać

$$\cos x = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \tag{37.7}$$

Z rozwinięć cosinusa i sinusa widać, że

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \text{i} \quad (\sin x)' = \cos x; \tag{37.8}$$

ponadto

$$\cos 0 = 1 \quad \text{i} \quad \sin 0 = 0, \tag{37.9}$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{i} \quad \sin(-x) = -\sin x. \tag{37.10}$$

Przyjmując we wzorze (37.6) $a_0 = 1$ i $a_1 = 0$ mamy $f(x) = \cos x$; przyjmując zaś $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$ mamy $f(x) = \sin x$. Zatem funkcje $\cos x$ i $\sin x$ są szczególnymi rozwiązaniami równania (37.1).

Ćwiczenia. Obliczyć pochodne następujących funkcyj:

$$(\sin x)^n, \quad \sin nx, \quad x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x,$$

$$\frac{\sin x}{a + b\cos x}, \quad e^{ax}(a \sin x - \cos x), \quad 2^{\sin x}, \quad x^{\cos x},$$

$$\sqrt{1+(\cos x)^2}, \quad \ln \cos x.$$

§ 38. Równania funkcyjne cosinusa i sinusa

Udowodnimy, że jeżeli dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ spełniają równanie (37.1), to znaczy jeżeli

$$f''(x) = -f(x) \quad \text{i} \quad g''(x) = -g(x), \tag{38.1}$$

wtedy zachodzi związek

$$f(0)g'(x+y)+f'(0)g(x+y) = f(x)g'(y)+f'(x)g(y); \tag{38.2}$$

w dowodzie nie będziemy wcale zakładali, że funkcje f i g rozwijają się w szereg potęgowy.

Wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$h(x) = f(x)g'(x_0-x)+f'(x)g(x_0-x), \tag{38.3}$$

gdzie x_0 jest dowolnie ustaloną liczbą. Stąd

$$h'(x) = -f(x)g''(x_0-x)+f''(x)g(x_0-x) = 0,$$

ponieważ funkcje f i g spełniają (38.1). Stąd wynika, że funkcja h jest stała i dla wszystkich x jest $h(0) = h(x)$. Wobec (38.3) równość tę można napisać w postaci

$$f(0)g'(x_0)+f'(0)g(x_0) = f(x)g'(x_0-x)+f'(x)g(x_0-x).$$

Wzór ten zachodzi dla wszelkich x_0 i x. Jeżeli więc dane są dowolnie liczby x i y, to przyjmując $x_0 = x+y$ dostaniemy wzór (38.2).

W szczególności, jeżeli przyjmiemy $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$, to wobec (37.8) i (37.9) wzór (38.2) przyjmie postać

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y-\sin x\sin y; \tag{38.4}$$

jeżeli zaś przyjmiemy $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sin x$, to

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y+\cos x\sin y. \tag{38.5}$$

Są to *równanie funkcyjne cosinusa* i *sinusa*; zostały one wyprowadzone dla wszelkich wartości x i y.

Równość (38.2) pozwala wykazać, że funkcja $f(x)$ spełniająca równanie (37.1) jest określona jednoznacznie przez swą wartość w punkcie 0 i wartość swej pochodnej w tym punkcie. Istotnie,

przypuśćmy, że dwie funkcje f_1 i f_2 spełniają równanie (37.1) i że

$$f_1(0) = f_2(0), \quad f_1'(0) = f_2'(0).$$

Wtedy różnica $f_0(x) = f_1(x)-f_2(x)$ także spełnia równanie (37.1) i jest $f_0(0) = f_0'(0) = 0$. Przyjmując we wzorze (38.2) $f(x) = f_0(x)$ i $g(x) = \sin x$, będziemy mieli $0 = f_0(x)\cos y+f_0'(x)\sin y$, a w szczególności dla $y = 0$ otrzymamy $0 = f_0(x)$. Stąd wynika, że dla każdego x jest $f_1(x) = f_2(x)$, co mieliśmy udowodnić.

Zatem $f(x) = \cos x$ jest jedyną funkcją spełniającą równanie (37.1) z warunkami

$$f(0) = 1 \quad \text{i} \quad f'(0) = 0;$$

funkcja zaś $g(x) = \sin x$ jest jedyną funkcją spełniającą równanie (37.1) z warunkami

$$g(0) = 0 \quad \text{i} \quad g'(0) = 1.$$

Własności te mogą służyć za definicję funkcyj cosinus i sinus.

Funkcje

$$f_1(x) = \cos(-x) \quad \text{i} \quad g_1(x) = -\sin(-x)$$

spełniają także równanie (37.1) i warunki

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = 0,$$

$$g_1(0) = 0, \quad g_1'(0) = 1.$$

Stąd wynika, że $\cos(-x) = \cos x$ i $-\sin(-x) = \sin x$. Jest to inny dowód równości (37.10).

§ 39. Liczba π

W geometrii elementarnej liczba π jest zdefiniowana jako stosunek długości okręgu do jego średnicy. W analizie *liczbę π definiujemy jako najmniejszą liczbę dodatnią, dla której funkcja sinus przyjmuje wartość* 0. Równoważność obydwu definicyj wykażemy w § 11 rozdziału IV.

Definicja analityczna wymaga uzupełnienia w postaci dowodu, że liczba o żądanych własnościach istnieje.

Ponieważ funkcja $\sin x$ jest równa 0 w punkcie $x = 0$ i ma w tym punkcie pochodną równą 1, więc istnieje taki przedział $(0, b)$, w którym jest $\sin x > 0$. Gdyby bowiem w każdym przedziale $(0, b)$ istniał punkt h, w którym $\sin h \leqslant 0$, to mielibyśmy

$$\frac{\sin h - \sin 0}{h} \leqslant 0$$

i pochodna nie byłaby dodatnia w punkcie 0.

Udowodnimy, że istnieją w przedziale $(0, \infty)$ punkty, w których $\sin x = 0$. Można to zrobić obliczając z przybliżeniem wartości $\sin 3$ i $\sin 4$ za pomocą szeregu potęgowego (37.7). Znajdziemy w ten sposób $\sin 3 \approx 0{,}144$ i $\sin 4 \approx -0{,}756$. Zatem funkcja $\sin x$ przyjmuje w punkcie 3 wartość dodatnią a w punkcie 4 ujemną. Jako ciągła staje się równa 0 między 3 i 4.

Rachunków związanych z obliczeniem $\sin 3$ i $\sin 4$ da się uniknąć przez następujące rozumowanie:

Przypuśćmy, że w przedziale $(0, \infty)$ nie ma punktów x, w których $\sin x = 0$; wtedy musi być

$$f(x) = \sin x > 0 \quad \text{w przedziale } (0, \infty), \tag{39.1}$$

bo sinus jest funkcją ciągłą. Z równania (37.1) wynika wtedy, że $f''(x) < 0$, a stąd, że pochodna $f'(x)$ jest malejąca w $(0, \infty)$. Rozpatrzmy dalej dwa przypadki:

1. $f'(x) > 0$ w $(0, \infty)$. Wtedy $f(x)$ jest funkcją rosnącą w $(0, \infty)$ i jeżeli w pewnym punkcie $x_0 > 0$ przyjmuje wartość $f(x_0) = k > 0$, to $f(x) - k > 0$ dla $x > x_0$. Wobec (37.1) jest $f''(x) + k < 0$ dla $x \geqslant x_0$. Stąd wynika, że funkcja $g(x) = f'(x) - f'(x_0) + k(x - x_0)$ (mająca pochodną $f''(x) + k$) jest malejąca dla $x \geqslant x_0$. Ponieważ $g(x_0) = 0$, więc $g(x) < 0$ dla $x > x_0$, czyli $f'(x) < f'(x_0) - k(x - x_0)$ dla $x \geqslant x_0$, co jest sprzeczne z założeniem $f'(x) > 0$.

2. Istnieje liczba $x_0 > 0$, dla której $f'(x_0) \leqslant 0$. Ponieważ $f'(x)$ jest funkcją malejącą, więc dla $x > x_1 > x_0$ jest $f'(x) < f'(x_1) = -k < 0$. Stąd $f'(x) + k < 0$ i $g(x) = f(x) - f(x_1) + k(x - x_1)$ jest funkcją malejącą dla $x > x_1$ i równą zeru w punkcie $x = x_1$. Stąd $g(x) < 0$, czyli $f(x) < f(x_1) - k(x - x_1)$ dla $x > x_1$, co jest sprzeczne z (39.1).

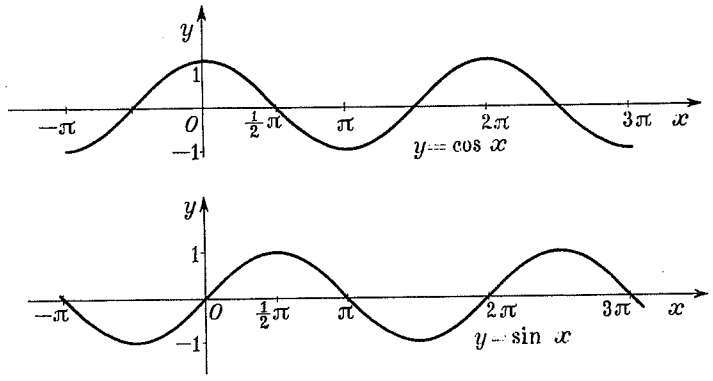
W ten sposób udowodniliśmy, że istnieją punkty $x > 0$, dla których $\sin x = 0$. Z ciągłości $\sin x$ wynika, że jeżeli przez π oznaczmy kres dolny tych punktów, to $\sin \pi = 0$. Istotnie, gdyby było $\sin \pi \neq 0$, to na podstawie twierdzenia 15.1 z rozdziału II (str. 77), byłoby też $\sin x \neq 0$ w pewnym przedziale (π, b) i π nie byłoby kresem dolnym. Jest oczywiście $\pi > 0$, ponieważ dowiedliśmy poprzednio, że $\sin x > 0$ w pewnym przedziale $(0, b)$.

W ten sposób poprawność podanej na początku definicji liczby π została w zupełności stwierdzona. W § 44 podamy praktyczną metodę obliczenia tej liczby z dowolną dokładnością.

§ 40. Własności funkcyj cosins i sinus

Podstawiając we wzorze (38.5) $x = y = \frac{1}{2}\pi$ mamy $0 = 2\sin\frac{1}{2}\pi\cos\frac{1}{2}\pi$. Ponieważ $\sin\frac{1}{2}\pi > 0$, więc jest (rys. 60)

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0.$$



Rys. 60

Pochodną funkcji $\cos x$ jest $-\sin x$; jest ona ujemna w przedziale $(0, \pi)$, zatem $\cos x$ jest funkcją malejącą w tym przedziale i musi być

$$\cos x > 0 \quad \text{dla } 0 \leqslant x < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{i} \quad \cos x < 0 \quad \text{dla } \tfrac{1}{2}\pi < x \leqslant \pi.$$

Podstawiając w (38.4) $y = -x$, mamy wobec (37.9)

$$1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2, \tag{40.1}$$

a stąd $1 = (\sin\frac{1}{2}\pi)^2$ przez podstawienie $x = \frac{1}{2}\pi$. Ponieważ $\sin\frac{1}{2}\pi > 0$, więc musi być

$$\sin\tfrac{1}{2}\pi = 1.$$

Korzystając ze wzorów (38.4) i (38.5), wyprowadzamy kolejno związki

$$\cos(x+\tfrac{1}{2}\pi) = -\sin x, \qquad \sin(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \cos x,$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos x, \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x,$$
$$\cos(\pi-x) = -\cos x, \qquad \sin(\pi-x) = \sin x,$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Ostatnią własność wyrażamy, mówiąc, że funkcje cosinus i sinus są okresowe i mają okres 2π.

W szczególności jest $\cos\frac{1}{4}\pi = \cos(-\frac{1}{4}\pi) = \sin(-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\pi) = \sin\frac{1}{4}\pi$.

Zatem w punkcie $\frac{1}{4}\pi$ obie funkcje cosins i sinus mają tę samą wartość (dodatnią). Wobec (40.1) wynika stąd, że $\cos\frac{1}{4}\pi = \sin\frac{1}{4}\pi = 1/\sqrt{2}$.

Udowodnimy jeszcze, że *jeżeli liczby a i b spełniają równość*

$$a^2+b^2 = 1, \tag{40.2}$$

to w przedziale $0 \leqslant x < 2\pi$ istnieje liczba x (tylko jedna), dla której $\cos x = a$ i $\sin x = b$.

Z założenia wynika, że $0 \leqslant |a| \leqslant 1$. Ponieważ funkcja $\cos x$ jest ciągła i $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, więc istnieje w przedziale $[0, \frac{1}{2}\pi]$ taka liczba x_0, że $\cos x_0 = |a|$. Ponieważ $(\cos x_0)^2+(\sin x_0)^2 = 1$, więc wobec (40.2) jest $b^2 = (\sin x_0)^2$, a stąd $\sin x_0 = |b|$. Twierdzenie jest więc dowiedzione dla $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$ (bo wtedy $a = |a|$ i $b = |b|$).

Gdy $a \geqslant 0$ i $b < 0$, to liczba $x = 2\pi - x_0$ ma żądane własności, bo

$$\cos(2\pi-x_0) = \cos(-x_0) = \cos x_0 = |a| = a,$$
$$\sin(2\pi-x_0) = \sin(-x_0) = -\sin x_0 = -|b| = b.$$

Gdy $a < 0$ i $b \geqslant 0$, to liczba $x = \pi - x_0$ ma żądane własności, bo

$$\cos(\pi-x_0) = -\cos x_0 = -|a| = a,$$
$$\sin(\pi-x_0) = \sin x_0 = |b| = b.$$

Gdy wreszcie $a < 0$ i $b < 0$, to liczba $x = \pi + x_0$ ma żądane własności, bo

$$\cos(\pi+x_0) = -\cos x_0 = -|a| = a,$$
$$\sin(\pi+x_0) = -\sin x_0 = -|b| = b.$$

Istnienie liczby x o żądanych własnościach jest więc udowodnione we wszystkich przypadkach.

Gdyby istniały w przedziale $0 \leqslant x < 2\pi$ dwie takie liczby x_1 i x_2, że

$$\cos x_1 = \cos x_2 = a \quad \text{i} \quad \sin x_1 = \sin x_2 = b,$$

to na podstawie wzorów (38.5), (38.4) i (40.1) mielibyśmy

$$\sin(x_1-x_2) = 0 \quad \text{i} \quad \cos(x_1-x_2) = 1.$$

Ponieważ $-2\pi < x_1-x_2 < 2\pi$, wynika stąd $x_1-x_2 = 0$, czyli $x_1 = x_2$. Zatem istnieje tylko jedna liczba o żądanych własnościach i twierdzenie jest udowodnione w całości.

Z twierdzenia tego wynika, że dla każdej pary liczb A i B funkcja

$$A\cos x + B\sin x \tag{40.3}$$

daje się przedstawić w postaci

$$\sqrt{A^2+B^2}\cos(x-x_0) \qquad (0 \leqslant x_0 < 2\pi); \tag{40.4}$$

jest to oczywiste, gdy $A = B = 0$; gdy co najmniej jedna z liczb A lub B jest różna od zera, to za x_0 przyjmujemy taką liczbę, żeby

$$\cos x_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{i} \quad \sin x_0 = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Wtedy

$$\cos(x-x_0) = \cos x\cos(-x_0)+\sin x\sin(-x_0) =$$
$$= \cos x\cos x_0 - \sin x\sin x_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x,$$

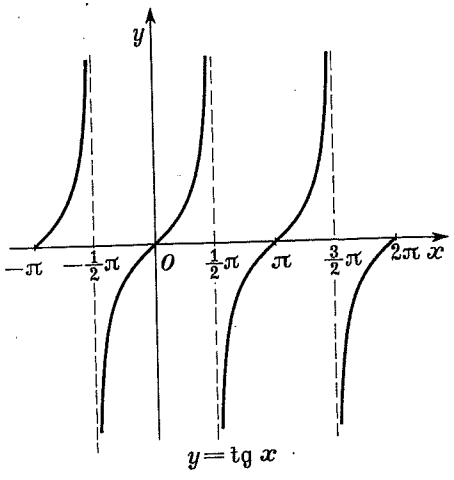
co dowodzi, że funkcje (40.3) i (40.4) są sobie równe.

§ 41. Funkcja tangens

Funkcję *tangens* definiujemy wzorem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

przedstawia ją rysunek 61.



Rys. 61

Jest ona określona dla wszystkich x, gdzie funkcja $\cos x$ jest różna od zera, a zatem wszędzie z wyjątkiem punktów $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą. W szczególności jest

$$\operatorname{tg} 0 = 0, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{4}\pi = 1,$$

$$\operatorname{tg} x > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi, \quad \operatorname{tg} x < 0 \quad \text{dla} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < x < 0,$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

Na pochodną funkcji tangens mamy wzór

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2},$$

który otrzymujemy przez zastosowanie twierdzenia o różniczkowaniu ilorazu:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x)' - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

Pochodna jest więc wszędzie dodatnia, a sama funkcja rosnąca w każdym przedziale nie zawierającym punktów $\frac{1}{2}\pi + k\pi$.

Funkcja *tangens przyjmuje w przedziale* $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ *wszystkie wartości* (rzeczywiste). Istotnie, jeżeli A jest dowolną liczbą, to istnieje w tym przedziale taka liczba x_1, że

$$\sin x_1 < A \cos x_1,$$

bo $\lim_{x \to -\pi/2+} \sin x = -1$ i $\lim_{x \to -\pi/2+} \cos x = 0$. Podobnie istnieje w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ taka liczba x_2, że

$$A \cos x_2 < \sin x_2,$$

bo $\lim_{x \to \pi/2-} \cos x = 0$ i $\lim_{x \to \pi/2-} \sin x = 1$. Z tych nierówności wynika

$$\operatorname{tg} x_1 < A < \operatorname{tg} x_2.$$

Stąd dalej wynika, że dla pewnego punktu ξ między x_1 a x_2 jest $\operatorname{tg} \xi = A$, ponieważ funkcja tangens jest ciągła w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Funkcja tangens jest okresowa i ma okres π:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x;$$

wynika to z równości

$$\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

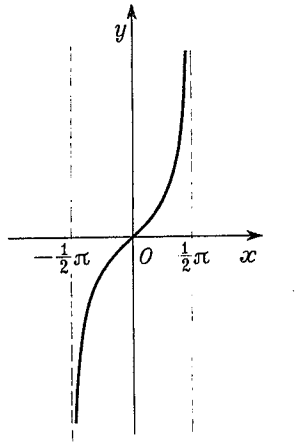
Ponadto ze wzorów (38.4) i (38.5) otrzymujemy

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \tag{41.1}$$

wzór ten ma sens dla wszystkich x i y różnych od $\frac{1}{2}\pi + k\pi$, dla których jednocześnie suma $x+y$ jest różna od $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k liczba całkowita).

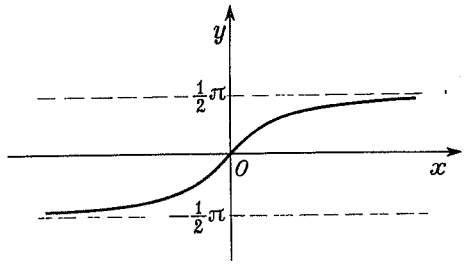
§ 42. Funkcja arcus tangens

Przy wyprowadzeniu funkcji odwrotnej do tangensa musimy ograniczyć się do takiego przedziału, w którym tangens przyjmuje każdą wartość tylko raz. Obierzmy w tym celu przedział $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ (rys. 62). Funkcję odwrotną do funkcji tangens rozważanej wyłącznie w tym przedziale nazywamy *arcus tangens* i oznaczamy przez $\operatorname{arctg} x$. Funkcja $\operatorname{arctg} x$ (rys. 63) jest określona dla wszystkich wartości x, a jej wartości należą do przedziału $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.



$y = \operatorname{tg} x \quad (-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi)$

Rys. 62



$y = \operatorname{arc\,tg} x$

Rys. 63

Funkcja arcus tangens (rys. 63) nie jest w ścisłym sensie funkcją odwrotną do funkcji tangens, lecz funkcją odwrotną do jej zacieśnienia do przedziału $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Wybór tego przedziału jest rzeczą umowną; zamiast niego można by wziąć inny przedział, w którym funkcja tangens jest rosnąca.

Z własności funkcji tangens wynikają następujące wzory dla funkcji arcus tangens:

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \operatorname{arctg} 1 = \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$0 < \operatorname{arctg} x < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{dla} \quad x > 0,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \operatorname{arctg} x < 0 \quad \text{dla} \quad x < 0,$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \quad \text{dla} \quad \text{wszelkich } x.$$

Zgodnie z definicją funkcji arcus tangens wzór $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ zachodzi tylko dla przedziału $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Natomiast wzór $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ zachodzi dla wszelkich x.

Ważne znaczenie ma wzór

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad (1-xy > 0). \tag{42.1}$$

Można go wyprowadzić ze wzoru (41.1) w następujący sposób:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} = \tag{42.2}$$

$$= \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{dla dowolnych } x, y;$$

stąd

$$\operatorname{arctg}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \tag{42.3}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{dla dowolnych } x, y.$$

Lewą stronę tej równości można zastąpić przez $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ pod warunkiem, że

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{42.2}$$

Wykażemy, że te nierówności wynikają z nierówności $1-xy > 0$, czyli $xy < 1$. Istotnie, jest

$$0 \leqslant \operatorname{arctg} x < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0,$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \operatorname{arctg} x \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad x \leqslant 0;$$

wobec tego nierówności (42.4) są na pewno spełnione, gdy $xy \leqslant 0$. Gdy zaś $xy > 0$, rozpatrzymy dwa przypadki:

1. $x > 0$ i $y > 0$; wtedy jest $0 < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi$. Gdy ponadto jest $xy < 1$, to $(x+y)/(1-xy) > 0$ i wobec (42.2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) > 0$. Stąd wynika, że $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{1}{2}\pi$, bo w przedziale $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ funkcja tangens jest ujemna.

2. $x < 0$ i $y < 0$; wtedy $-\pi < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < 0$. Gdy ponadto $xy < 1$, to $(x+y)/(1-xy) < 0$ i wobec (42.2) jest $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) < 0$.

Stąd wynika, że $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y < 0$, bo w przedziale $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi)$ funkcja tangens jest dodatnia.

Udowodniliśmy więc, że z $1-xy>0$ wynika (42.4). Wobec tego dla $1-xy>0$ wzór (42.3) upraszcza się do postaci (42.1).

Ćwiczenia. 1. Udowodnić, że

$$k\pi+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x \quad \text{dla} \quad -\tfrac{1}{2}\pi+k\pi < x < \tfrac{1}{2}\pi+k\pi \ (k\text{-całkowite}).$$

2. Udowodnić, że jeżeli $xy>1$, to

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}+\pi & \text{dla } x>0 \text{ i } y>0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}-\pi & \text{dla } x<0 \text{ i } y<0.\end{cases}$$

3. Udowodnić, że $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\frac{1}{2}\pi$ dla $x>0$.

§ 43. Pochodna funkcji arcus tangens

Dla wszystkich x zachodzi wzór

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}. \tag{43.1}$$

Istotnie, na podstawie ogólnego wzoru na pochodną funkcji odwrotnej jest

$$(\operatorname{arctg}x)'=(\cos\operatorname{arctg}x)^2;$$

wystarczy więc dowieść, że

$$(\cos\operatorname{arctg}x)^2=\frac{1}{1+x^2}. \tag{43.2}$$

Oznaczając $\operatorname{arctg}x$ przez y mamy $x=\operatorname{tg}y$ i

$$1+x^2=1+(\operatorname{tg}y)^2=1+\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)^2=$$

$$=\frac{(\cos y)^2+(\sin y)^2}{(\cos y)^2}=\frac{1}{(\cos y)^2}=\frac{1}{(\cos\operatorname{arctg}x)^2};$$

stąd wynika (43.2) i w konsekwencji (43.1).

Udowodnimy teraz wzór

$$\operatorname{arctg}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \quad \text{dla} \quad |x|<1, \tag{43.3}$$

czyli

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{dla} \quad |x|<1. \tag{43.4}$$

Szereg po prawej stronie tych wzorów jest zbieżny, gdyż moduły jego wyrazów są niewiększe od wyrazów szeregu zbieżnego $1+|x|+|x|^2+\dots$ Wobec tego można ten szereg zróżniczkować, co w wyniku daje

$$1-x^2+x^4-x^6+\dots$$

Otrzymany szereg jest dla $|x|<1$ równy funkcji $1/(1+x^2)$, czyli pochodnej funkcji $\operatorname{arctg}x$. Wobec tego

$$\operatorname{arctg}x=C+\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \quad \text{dla} \quad |x|<1,$$

gdzie C jest stałą. Stałą tę możemy wyznaczyć, podstawiając w ostatniej równości $x=0$; otrzymujemy wtedy $0=C+0$, co dowodzi wzoru (43.3).

W § 21 rozdz. IV udowodnimy, że wzór (43.3) jest także prawdziwy dla $x=1$.

Ćwiczenia. 1. Obliczyć pochodne następujących funkcyj:

$$(\operatorname{tg}\sqrt{x})^4, \quad \ln\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x), \quad (\operatorname{tg}x)^{\sin x}, \quad x^4\operatorname{arctg}x, \quad \operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}.$$

2. Udowodnić wzór podany w ćwiczeniu 3 z poprzedniego paragrafu, przez obliczenie pochodnej funkcji występującej po lewej stronie tego wzoru.

§ 44. Obliczenie przybliżonej wartości liczby π

Wzory (42.1) i (43.4) pozwalają wygodnie obliczyć liczbę π z dowolnie dużą dokładnością. Jest bowiem

$$2\operatorname{arctg}\tfrac{1}{5}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\operatorname{arctg}\tfrac{5}{12},$$

$$4\operatorname{arctg}\tfrac{1}{5}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\operatorname{arctg}(1+\tfrac{1}{119}),$$

$$4\operatorname{arctg}\tfrac{1}{5}-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}\frac{(1+\frac{1}{119})-1}{1+(1+\frac{1}{119})}=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{239}.$$

Ponieważ $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$, z ostatniej równości wynika

$$\tfrac{1}{4}\pi = 4\operatorname{arctg}\tfrac{1}{5} - \operatorname{arctg}\tfrac{1}{239},$$

a stąd

$$\pi = 16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 5^{2n+1}} - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 239^{2n+1}}. \tag{44.1}$$

Chcąc znaleźć przybliżoną wartość liczby π weźmiemy np. z pierwszego z tych szeregów pięć wyrazów, a z drugiego jeden wyraz:

$$p = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9}\right) - \frac{4}{239}. \tag{44.2}$$

$+1/5 = +0{,}2$
$-1/(3\cdot 5^3) \approx -0{,}002\,666\,66$
$+1/(5\cdot 5^5) = +0{,}000\,064$
$-1/(7\cdot 5^7) \approx -0{,}000\,001\,82$
$+1/(9\cdot 5^9) \approx +0{,}000\,000\,05$
$+0{,}197\,395\,57$
$-4/239 \approx -0{,}016\,736\,40$

Obok podane są przybliżenia dziesiętne występujących w (44.2) ułamków obliczone z niedomiarem. Jeżeli więc przez σ oznaczymy liczbę

$$\sigma = 16\cdot 0{,}197\,395\,57 - 0{,}016\,736\,40 = 3{,}141\,592\,72,$$

to będą spełnione nierówności

$$\sigma - \frac{33}{10^8} < p < \sigma + \frac{16}{10^8}, \tag{44.3}$$

gdyż w rozważanej sumie występuje $16\cdot 2+1 = 33$ razy liczba z niedomiarem, wzięta ze znakiem $-$, i 16 razy liczba z niedomiarem, wzięta ze znakiem $+$.

Różnicę $\pi - p$ można oszacować podobnie jak przy obliczaniu logarytmów przez szeregi geometryczne:

$$|\pi - p| < 16\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 5^{2n+1}} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 239^{2n+1}} <$$

$$< \frac{16}{11\cdot 5^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{25}} + \frac{4}{3\cdot 239^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{57121}} =$$

$$= \frac{16}{11\cdot 5^9\cdot 24} + \frac{4}{3\cdot 239\cdot 57\,120} < \frac{2}{10^8}.$$

Wobec tego jest

$$-\frac{2}{10^8} < \pi - p < \frac{2}{10^8},$$

co łącznie z nierównościami (44.3) daje $\sigma - \frac{35}{10^8} < \pi < \sigma + \frac{18}{10^8}$, czyli

$$3{,}141\,592\,37 < \pi < 3{,}141\,592\,90.$$

Znaleźliśmy więc π z dokładnością do 6 cyfr po przecinku

$$\pi \approx 3{,}141\,592.$$

Wzór (44.1) podał J. Machin (około roku 1700) i obliczył za jego pomocą liczbę π z dokładnością do 100 cyfr po przecinku.

Oszacowanie różnicy $\pi - p$ przez szeregi geometryczne, jak to zrobiliśmy wyżej, nie jest wygodne. Można to zrobić prościej i lepiej, korzystając z pewnego ogólnego twierdzenia, które podamy w następnym paragrafie.

Tutaj podamy jeszcze pewien wierszyk, który ułatwia zapamiętanie początkowych cyfr liczby π:

Był i jest i wieki sławionym ów będzie,
Który kół obwód średnicą wymierzył,
Sławcie Archimeda, aby ów mąż dzierżył imię mędrca.

Licząc litery w kolejnych wyrazach i zapisując odpowiednie cyfry znajdujemy z łatwością przybliżenie liczby π:

$$3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,46.$$

Istnieją różne wierszyki na liczbę π, żaden jednak nie jest zadowalający pod względem literackim; brakuje w nich rymu, rytmu, a nieraz zgoła sensu. Podany wyżej wierszyk jest jednym z najstarszych, autorem jego jest Edward Krzemieniewski.

§ 45. Szeregi o zmiennych znakach

Szeregi występujące we wzorze (44.1) mają tę własność, że wyrazy ich są na przemian dodatnie i ujemne, przy tym moduły ich maleją. W takim przypadku możemy wygodnie ocenić różnicę między ich sumami a sumami częściowymi.

TWIERDZENIE 45.1 (Kryterium Leibniza). *Jeżeli ciąg a_n jest malejący i ma granicę 0, to szereg*

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

jest zbieżny. Ponadto dla każdego n naturalnego są spełnione nierówności

$$s_{2n-1} < s < s_{2n}, \quad \text{gdzie} \quad s_m = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n.$$

Dowód. Wobec założenia jest

$$a_{2n} - a_{2n+1} > 0, \quad a_{2n+2} > 0 \quad \text{i} \quad a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0,$$

zatem

$$s_{2n-1} < s_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) = s_{2n+1} < s_{2n+1} + a_{2n+2} =$$
$$= s_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) < s_{2n}.$$

Stąd

$$s_{2n-1} < s_{2n+1} < s_{2n+2} < s_{2n} \quad \text{dla} \quad n \text{ naturalnych}.$$

Ciągi wybrane s_{2n} i s_{2n-1} są więc monotoniczne i ograniczone. Są zatem zbieżne. Przechodząc do granicy z równością

$$s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n},$$

mamy $\lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = 0$, skąd wynika $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$.

Udowodniliśmy więc zbieżność ciągu. Jeżeli s oznacza jego sumę, to musi być $s_{2n-1} < s < s_{2n}$, bo ciąg s_{2n-1} jest rosnący, a s_{2n} malejący.

Zastosujemy to twierdzenie do wzoru (44.1). Jeżeli s i t oznaczają odpowiednio sumy szeregów występujących w tym wzorze, a s_n i t_n sumy częściowe tych szeregów, to zamiast (44.2) możemy napisać $p = 16s_4 - 4t_0$. Ponieważ $\pi - p = 16(s - s_4) + 4(t_0 - t)$ i $s_5 < s < s_4$, $t_1 < t < t_0$, więc

$$-\frac{16}{11 \cdot 5^{11}} = -16(s_5 - s_4) < \pi - p < 4(t_0 - t_1) < \frac{4}{3 \cdot 239^3},$$

co jest oszacowaniem prostszym i dokładniejszym niż to, które znaleźliśmy w poprzednim paragrafie.

§ 46. Dwumian Newtona

Funkcja $(1+x)^\alpha$, gdzie α jest dowolną liczbą rzeczywistą, jest określona dla wszystkich $x > -1$. Przypuśćmy, że ta funkcja rozwija się w szereg potęgowy

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{46.1}$$

W celu znalezienia współczynników c_n, zróżniczkujemy obustronnie powyższą równość:

$$\alpha(1+x)^{\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n.$$

Stąd

$$(1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n x^n.$$

Ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n$, więc ostatecznie możemy napisać

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big((n+1) c_{n+1} + n c_n\big) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n x^n.$$

Równość ta będzie spełniona, gdy przyjmiemy, że

$$(n+1) c_{n+1} + n c_n = \alpha c_n,$$

czyli

$$c_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} c_n \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{46.2}$$

Podstawiając $x = 0$ we wzorze (46.1), znajdujemy

$$c_0 = 1. \tag{46.3}$$

Wobec tego z (46.2) obliczamy kolejno

$$c_1 = \frac{\alpha}{1}, \quad c_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}, \quad c_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

i ogólnie

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}.$$

Liczby c_n, określone indukcyjnie wzorami (46.2) i (46.3), oznaczamy symbolem $\binom{\alpha}{n}$. Jest więc

$$\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}\binom{\alpha}{n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{46.4}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1.$$

Musimy jeszcze obliczyć promień zbieżności szeregu (46.1). W tym celu posłużymy się następującym twierdzeniem ogólnym:

TWIERDZENIE 46.1. *Jeżeli istnieje granica* $\lim_{n=\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, *to jest równa promieniowi zbieżności szeregu* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = r$ i niech x będzie dowolnie ustaloną liczbą, taką że $|x| < r$. Dla $|x| < q < r$ istnieje taka liczba naturalna p, że $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| > q$ dla $n \geqslant p$, czyli

$$|c_{n+1}| < \frac{|c_n|}{q} \quad \text{dla} \quad n = p, p+1, \dots$$

W szczególności jest

$$|c_{p+1}| < \frac{|c_p|}{q}, \quad |c_{p+2}| < \frac{|c_{p+1}|}{q} < \frac{|c_p|}{q^2}$$

i ogólnie przez indukcję

$$|c_{p+n}| < \frac{|c_p|}{q^n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

Wobec tego

$$|c_{p+n}x^{p+n}| \leqslant |c_p x^p|\left|\frac{x}{q}\right|^n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots,$$

skąd wynika zbieżność rozważanego szeregu przez porównanie z szeregiem geometrycznym

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_p|\left|\frac{x}{q}\right|^n. \tag{46.5}$$

Niech teraz $|x| > r$. Wtedy istnieje taka liczba q, że $r < q < |x|$ i poprzednie rozumowanie można powtórzyć, zmieniając wszędzie znak nierówności na przeciwny. Wobec tego

$$|c_{p+n}x^{p+n}| \geqslant |c_p x^p|\left|\frac{x}{q}\right|^n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

Gdyby rozważany szereg był zbieżny, to zbieżny byłby także szereg geometryczny (46.5), co dla $q < |x|$ jest nieprawdą.

Rozważany szereg jest więc zbieżny dla $|x| < r$, a rozbieżny dla $|x| > r$, co oznacza, że r jest promieniem zbieżności.

Zastosujmy teraz udowodnione twierdzenie do szeregu (46.1) przy założeniu, że α nie jest liczbą naturalną. W tym przypadku jest $c_n \neq 0$ i wobec (46.2)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1,$$

zatem promień zbieżności szeregu we wzorze (46.1) jest równy 1.

Równości (46.1) nie możemy jeszcze traktować jako udowodnionej, ponieważ na samym początku zrobiliśmy założenie, że funkcja $(1+x)^\alpha$ rozwija się w szereg postaci (46.1). Od założenia tego musimy się teraz uwolnić. Z dotychczasowego rozumowania wynika tylko tyle, że szereg

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad (\alpha \neq 1, 2, \dots)$$

spełnia w przedziale $(-1, 1)$ równość

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x) \tag{46.6}$$

i że $f(0) = 1$. Wobec tego jest

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{(1+x)^\alpha f'(x) - f(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0,$$

a stąd wynika, że iloraz $f(x)/(1+x)^\alpha$ jest stały w $(-1, 1)$. Ponieważ jest równy 1 dla $x = 0$, więc jest też równy 1 w całym przedziale $(-1, 1)$. Tym samym równość (46.1) jest udowodniona.

Jako przykład na zastosowanie wzoru (46.1), czyli tak zwanego *dwumianu Newtona* możemy wziąć rozwinięcie dla $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n,$$

czyli

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \dots \tag{46.7}$$

Wzór (46.1) może też służyć do obliczania przybliżonych wartości pierwiastków. Można na przykład napisać

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-1/2} = \frac{7}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{1}{50}\right)^n =$$

$$= \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{50} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{50^3} + \dots\right).$$

Jeszcze lepszą zbieżność można uzyskać, wychodząc z równości

$$\sqrt{2} = \frac{141}{100}\left(1 - \frac{119}{20\,000}\right)^{-1/2}$$

lub jakiejkolwiek innej, którą otrzymamy, biorąc jakiekolwiek grubsze przybliżenie a liczby $\sqrt{2}$ (w podanym przykładzie 1,41) i pisząc

$$\sqrt{2} = a\left(1 + \frac{a^2-2}{2}\right)^{-1/2}.$$

Wiedząc na przykład, że $\sqrt{3}$ jest równy w przybliżeniu 1,732, znajdujemy łatwo równość

$$\sqrt{3} = 1{,}732\left(1 - \frac{176}{3\,000\,000}\right)^{-1/2},$$

która przez zastosowanie dwumianu Newtona pozwala bez większego trudu obliczyć $\sqrt{3}$ z dokładnością do 50 lub więcej cyfr po przecinku.

Podobnie można też obliczać pierwiastki wyższych stopni, wychodząc na przykład z równości

$$\sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{1000}\right)^{-1/3}, \quad \sqrt[5]{1000} = 4\left(1 + \frac{24}{1000}\right)^{-1/5}.$$

Ćwiczenia. Obliczyć $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{3}$ z dokładnością do sześciu miejsc po przecinku.

§ 47. Dwumian Newtona dla naturalnych wykładników

Gdy m jest liczbą naturalną, to z równości (46.4) wynika, że $\binom{m}{m+1} = \frac{0}{m+1}\binom{m}{m} = 0$ i przez indukcję $\binom{m}{n} = 0$ dla $n > m$. Wobec tego dla $\alpha = m$ szereg we wzorze (46.1) jest zbieżny dla wszelkich x i redukuje się do sumy skończonej

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n.$$

Funkcja $f(x)$ spełnia wtedy równość (46.6) dla wszelkich x, skąd wynika jak poprzednio równość $f(x)/(1+x)^m = 1$ i w konsekwencji

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n \quad \text{dla wszelkich } x.$$

Jeżeli a i b są dowolnymi liczbami ($a \neq 0$), mamy stąd dla $x = b/a$

$$(a+b)^m = a^m\left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = a^m\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}a^{m-n}b^n,$$

czyli ostatecznie

$$(a+b)^m = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}a^{m-n}b^n.$$

Równość tę można też napisać w postaci

$$(47.1)\quad (a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \ldots + \binom{m}{m}b^m.$$

Jest ona spełniona także dla $a = 0$, a więc dla zupełnie dowolnych liczb a i b.

Dla początkowych naturalnych wartości m otrzymujemy z (47.1) równości

$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Ze wzoru (47.1) można otrzymać łatwo różne interesujące związki dla symbolu $\binom{m}{n}$. Przyjmując na przykład $a = b = 1$ mamy

$$2^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \ldots + \binom{m}{m},$$

co trudno byłoby wysnuć bezpośrednio ze wzorów (46.4).

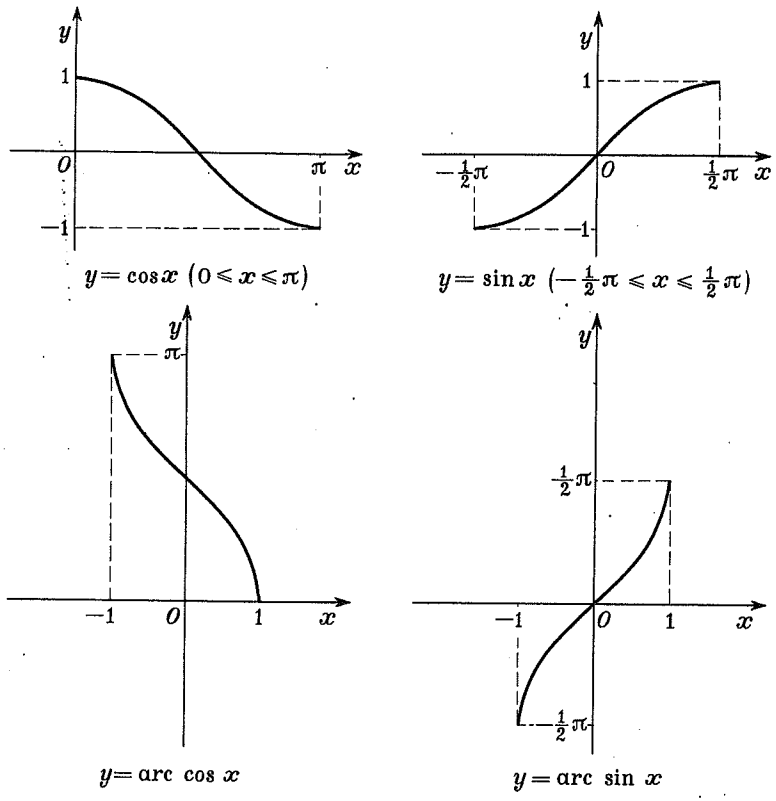
Ćwiczenia. Udowodnić, że

1. $\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots + (-1)^m\binom{m}{m} = 0$ dla m naturalnych,
2. $\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^{m-1}$ dla m naturalnych i parzystych.

§ 48. Funkcje arcus cosinus i arcus sinus

Funkcje cosinus i sinus dają się odwrócić w przedziałach, gdzie są monotoniczne (rys. 64). Dla funkcji cosinus obieramy (co jest czystą konwencją) przedział $[0, \pi]$, a dla funkcji sinus przedział $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Funkcje odwrotne nazywamy *arcus cosinus* i *arcus sinus* i oznaczmy przez

$$\arccos x \quad \text{i} \quad \arcsin x.$$



Rys. 64

Obie są określone w przedziale $[-1, 1]$ i spełniają w nim nierówności

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi, \qquad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \arcsin x \leqslant \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ponieważ $\sin(\arcsin x) = x = \cos(\arccos x) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \arccos x)$, więc $\arcsin x = \frac{1}{2}\pi - \arccos x$, czyli

$$(48.1)\quad \arccos x + \arcsin x = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{dla} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Udowodnimy wzory

$$(48.2)\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{i} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wobec (48.1) wystarczy udowodnić jeden z tych wzorów. Na podstawie ogólnego twierdzenia o różniczkowaniu funkcyj odwrotnych jest

$$(48.3)\qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Oznaczając $\arcsin x$ przez y mamy $x = \sin y$ i

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin y)^2} = \sqrt{(\cos y)^2};$$

ponieważ $-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$, więc $\cos y \geqslant 0$ i w ostatniej równości zamiast prawej strony można po prostu napisać $\cos y$, czyli $\cos(\arcsin x)$. Zatem

$$\sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x),$$

co wobec (48.3) dowodzi drugiego i tym samym pierwszego ze wzorów (48.2).

Rozwiniemy jeszcze funkcję $\arcsin x$ w szereg potęgowy. Zastępując we wzorze (46.7) x przez $-x^2$, mamy

$$(48.4)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\dots$$

Prawa strona tego wzoru jest pochodną szeregu

$$(48.5)\qquad \frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots,$$

który jest dla $|x|<1$ zbieżny, ponieważ moduły jego wyrazów są niewiększe od wyrazów szeregu zbieżnego (48.4) pomnożonego przez $|x|$. Stąd wynika, że funkcja $\arcsin x$ różni się od funkcji przedstawionej szeregiem (48.5) tylko o stałą. Dla $x=0$ obie funkcje są równe zeru, a zatem i stała jest równa zeru. Wobec tego mamy wzór

$$\arcsin x = \frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots \quad \text{dla} \quad |x|<1.$$

Ćwiczenia. 1. Jaki jest szereg potęgowy dla $\arccos x$?

2. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

3. Obliczyć pochodne następujących funkcyj:

$$\arcsin\sqrt{x^3},\quad \arccos\sqrt{1-x},\quad x^3\arcsin\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x}\arcsin\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 49. Zebranie najważniejszych wzorów

Umiejętność posługiwania się rachunkiem różniczkowym wymaga doskonałego opanowania tabelki elementarnych pochodnych:

Funkcja	Pochodna	Funkcja	Pochodna
c (stała)	0	$\sin x$	$\cos x$
x^a	ax^{a-1}	$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln(x+\sqrt{a+x^2})$	$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Obliczanie bardziej skomplikowanych pochodnych wymaga ponadto znajomości następujących wzorów:

$$(f+g)' = f'+g' \qquad (fg)' = f'g+fg'$$

$$(f-g)' = f'-g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-fg'}{g^2}$$

$$(cf)' = cf' \quad (c \text{ stała})$$

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)g'.$$

Stosując te wzory, nie musimy ich za każdym razem wypisywać i następnie podstawiać za f i g odpowiednie funkcje, należy raczej pamiętać je jako pewne sposoby obliczania pochodnych. Na przykład:

Różniczkując iloczyn dowolnej funkcji przez stałą różniczkujemy tylko tę funkcję.

A oto dalsze wzory:

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad (a > 0)$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (0 < a \neq 1,\ 0 < x)$$

$$\left.\begin{aligned} \log(xy) &= \log x + \log y \\ \log\frac{x}{y} &= \log x - \log y \\ \log(x^\alpha) &= \alpha \log x \end{aligned}\right\} \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y \qquad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(x+\tfrac{1}{2}\pi) = -\sin x \qquad \sin(x+\tfrac{1}{2}\pi) = \cos x$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x$$
$$\cos(\pi-x) = -\cos x \qquad \sin(\pi-x) = \sin x$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$
$$e^{\ln x} = x \qquad (x > 0)$$
$$\ln e^x = x \qquad (x \text{ dowolne})$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \qquad (x \text{ dowolne})$$
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \qquad (-\tfrac{1}{2}\pi < x < \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$\sin(\arcsin x) = x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$
$$\cos(\arccos x) = x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$
$$\arcsin(\sin x) = x \qquad (-\tfrac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$\arccos(\cos x) = x \qquad (0 < x < \pi)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\left.\begin{aligned} \ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \operatorname{arctg} x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (|x| < 1)$$

$$(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \dots + \binom{m}{m}b^m$$

(m naturalne).

Rozdział IV

CAŁKI I UZUPEŁNIENIA Z TEORII GRANIC

§ 1. Całki nieoznaczone

Mówimy, że funkcja F jest *funkcją pierwotną* funkcji f w pewnym przedziale (skończonym lub nieskończonym), jeżeli w każdym punkcie x tego przedziału jest spełniona równość

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Na przykład $\cos x$ ma funkcję pierwotną $\sin x$ w $(-\infty, \infty)$, bo $(\sin x)' = \cos x$.

Jeżeli F jest funkcją pierwotną dla f, to:

1° Funkcja $F+C$ (C — stała) jest także funkcją pierwotną dla f, bo z (1.1) wynika $(F+C)' = f$.

2° Każda inna funkcja pierwotna dla f musi być postaci $F+C$, ponieważ funkcje mające tę samą pochodną różnią się o stałą (por. tw. 27.2, rozdz. II, str. 103).

Stąd wynika, że wystarczy znać jedną funkcję pierwotną, by otrzymać wszystkie inne przez dodanie stałej dowolnej. Mówimy często, że *funkcje pierwotne są określone z dokładnością do stałej dowolnej.*

Funkcję pierwotną nazywamy często *całką nieoznaczoną* i przedstawiamy symbolem

$$\int f(x)\,dx.$$

Nieoznaczoność polega na tym, że symbol nie oznacza żadnej ściśle określonej funkcji, lecz nieskończenie wiele funkcyj, które różnią się od siebie o stałą.

Z logicznego punktu widzenia nie jest dopuszczalne, żeby jeden symbol miał różne znaczenia. Chcąc pod tym kątem widzenia poprawić definicję symbolu $\int f(x)\,dx$, można przyjąć, że nie przedstawia on poszczególnych funkcyj, lecz pewną rodzinę funkcyj. Jednakże takie ujęcie podwyższa rząd abstrakcji i nie nadaje się do wygodnego i jednocześnie konsekwentnego pisania wzorów. Z drugiej strony drobne uchybienie logice, z którego sobie jasno zdajemy sprawę, nie doprowadzi do nieporozumień.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c (stała)	cx		
x^a $(a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\frac{1}{\sqrt{a+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{a+x^2})$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\sin x$
e^x	e^x	$\sin x$	$-\cos x$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$	$\frac{1}{(\sin x)^2}$	$-\frac{\cos x}{\sin x}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\lvert\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\rvert$

Znalezienie funkcji pierwotnej, czyli całki nieoznaczonej, jest zagadnieniem odwrotnym do zagadnienia znalezienia pochodnej. Dzięki temu można niejako odwrócić wzory z rachunku różniczkowego i tą drogą otrzymać wzory dla całek nieoznaczonych. Ze względów czysto praktycznych wzory te podajemy w lekko zmodyfikowanej postaci dostosowanej do wygodnych rachunków. Wzory należy tak rozumieć, że prawa strona przedstawia jedną z możliwych funkcji pierwotnych; inne znajdziemy przez dodanie dowolnej stałej. Sprawdzenie wzorów polega na zróżniczkowaniu funkcyj z prawej strony, co daje funkcje z lewej strony.

Na uwagę zasługuje całka funkcji $1/x$, która w tabelce jest podana jako $\ln|x|$. Wynika ona ze wzoru

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x \neq 0 \tag{1.2}$$

będącego połączeniem dwóch wzorów

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x > 0 \quad \text{i} \quad (\ln(-x))' = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x < 0.$$

Wzór (1.2) pozwala też łatwo sprawdzić przez różniczkowanie ostatnią pozycję tablicy:

$$(\ln|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x|)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x)' = \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{(\cos\frac{1}{2}x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x)} = \frac{1}{\sin x}.$$

Obliczanie całek jest rzeczą o wiele trudniejszą niż obliczanie pochodnych. Najważniejsze metody służące do tego celu omówimy w następnych paragrafach.

§ 2. Całkowanie sumy, różnicy i wyłączanie czynnika stałego

Oto najprostsze wzory stosowane przy obliczaniu całek:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx, \tag{2.1}$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \quad (c \text{ stała}).$$

Można je wyrazić słowami: *Całka sumy jest równa sumie całek. Całka różnicy jest równa różnicy całek. Czynnik stały wolno wyłączyć przed znak całki.*

Wzory te należy rozumieć z dokładnością do stałej dowolnej. Dowodzimy ich, wykazując, że pochodne funkcyj z lewej i prawej strony równości są sobie równe. Istotnie, z definicji całki nieoznaczonej wynika, że

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

czyli że *pochodna całki jest równa funkcji podcałkowej*. Różniczkując

więc równości (2.1) i stosując reguły różniczkowania, dochodzimy do tożsamości

$$f(x)+g(x) = f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x) = f(x)-g(x),$$

$$cf(x) = cf(x),$$

które dowodzą, że wzory (2.1) są prawdziwe.

PRZYKŁADY.

$$\int\left(x^2+\frac{1}{3x}\right)dx = \int x^2dx + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\ln|x|;$$

$$\int(e^x-1)dx = \int e^x dx - \int 1dx = e^x - x.$$

Ćwiczenia. Obliczyć całki nieoznaczone dla następujących funkcyj:

$$3\cdot 2^x+2\cdot 3^x, \quad a\sin x+b\cos x, \quad \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2+x^2}+\frac{1}{3+x^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 3. Całkowanie przez podstawienie

Przy obliczaniu całek często stosujemy wzór

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{dla} \quad x = g(t), \tag{3.1}$$

w którym lewą stronę rozumiemy jako funkcję złożoną z całki nieoznaczonej funkcji $f(x)$ i funkcji $x = g(t)$. Wzoru tego dowodzimy, znowu wykazując, że pochodne po obydwu stronach znaku równości są takie same. Istotnie, różniczkując lewą stronę jako funkcję złożoną otrzymujemy $f(g(t))g'(t)$, a więc funkcję podcałkową prawej strony.

W zastosowaniach zwykle interpretujemy wzór inaczej. Przyjmujemy, że funkcja $x = g(t)$ jest ściśle monotoniczna (to znaczy stale rosnąca lub stale malejąca). Wtedy istnieje funkcja odwrotna $t = h(x)$. Po podstawieniu w (3.1) $t = h(x)$ lewa strona staje się z powrotem po prostu całką nieoznaczoną z $f(x)$, natomiast prawa strona staje się funkcją złożoną.

Gdy na przykład mamy obliczyć całkę $\int \frac{dx}{ax+b}$ $(a \neq 0)$, przyjmujemy $ax+b=t$, czyli $x=(t-b)/a=g(t)$. Ponieważ $g'(t)=1/a$, więc prawa strona wzoru (3.1) ma w tym przypadku postać

$$\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t|.$$

Wracając do zmiennej x, dochodzimy ostatecznie do równości

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| \qquad (a \neq 0).$$

Podstawienie $ax+b=t$ jest jednym z najczęściej stosowanych w rachunkach. Powinniśmy nabrać takiej wprawy, żebyśmy stosując je, mogli od razu napisać końcowy wynik. Oto jeszcze jeden przykład. Jest do obliczenia całka $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$. Piszemy ją najpierw w postaci $\int \frac{dx}{\frac{3}{4}+(x+\frac{1}{2})^2}$. Stosując podstawienie $x+\frac{1}{2}=t$, piszemy od razu wynik całkowania $\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, które następnie sprowadzamy do postaci ostatecznej

$$\int \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Ćwiczenia. Obliczyć całki nieoznaczone z następujących funkcyj i sprawdzić wyniki przez różniczkowanie

$$\frac{1}{2x-3}, \quad e^{ax+b}, \quad \cos 2x, \quad \sin(3x+1), \quad \frac{1}{1-x+2x^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x+2x^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}, \quad \frac{1}{\cos x}.$$

§ 4. Całkowanie przez części

Bardzo często używamy tak zwanej *metody całkowania przez części*, polegającej na zastosowaniu wzoru

$$\int fg'dx = fg - \int f'g dx. \tag{4.1}$$

Wzoru tego dowodzimy, różniczkując obie jego strony, co prowadzi do tożsamości $fg' = (f'g+fg')-f'g$.

PRZYKŁAD 1. Dla obliczenia całki $\int x\cos x dx$ piszemy

$$f = x, \quad g' = \cos x,$$
$$f' = 1, \quad g = \sin x$$

i wobec (4.1)

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x.$$

PRZYKŁAD 2. Dla obliczenia całki $\ln x$ piszemy

$$f = \ln x, \quad g' = 1,$$
$$f' = \frac{1}{x}, \quad g = x$$

i wobec (4.1)

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}x dx = x\ln x - x.$$

Systematyczne używanie w rachunkach tego samego schematu

$$\begin{array}{cc} f & g' \\ f' & g \end{array}$$

ułatwia pracę i daje dobrą gwarancję uniknięcia błędów rachunkowych. W pierwszym wierszu tabelki stoją czynniki danej całki, na tzw. *przekątnej głównej* stoją czynniki części wycałkowanej, wreszcie w drugim wierszu tabelki stoją czynniki, które należy wpisać pod znak całki po prawej stronie wzoru. Używając tego schematu nie mamy nawet potrzeby wprowadzać liter f i g w konkretnych rachunkach. Na przykład:

PRZYKŁAD 3. Dla obliczenia całki $\int x^2 e^x dx$ piszemy

$$\begin{array}{cc} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{array} \quad \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx;$$

dla obliczenia pozostałej całki piszemy

$$\begin{array}{cc} x & e^x \\ 1 & e^x \end{array} \quad \begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx) = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x. \end{aligned}$$

Ćwiczenia. Obliczyć całki nieoznaczone następujących funkcyj:

$$\operatorname{arctg} x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad x^3 \sin x, \quad e^x \cos x,$$

$$\operatorname{arctg}(2x-1), \quad x e^{2x} \sin \tfrac{1}{2}x.$$

§ 5. Całkowanie przez przekształcenie

Przekształcenie funkcji podcałkowej pozwala często daną całkę sprowadzić do całek, które umiemy już obliczyć.

PRZYKŁAD 1. Obliczając całkę $\int \frac{dx}{1-x^2}$ rozkładamy najpierw funkcję podcałkową na tak zwane *ułamki proste*

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} = \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 2. Dla obliczenia całki $\int \frac{x^2}{x^2-2x-3}dx$ piszemy

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2-2x-3} &= 1 + \frac{2x+3}{x^2-2x-3} = 1 + \frac{2x+3}{(x-3)(x+1)} = \\ &= 1 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}. \end{aligned}$$

Dobieramy liczby A i B w ten sposób, żeby ostatnia równość była spełniona, lub co na jedno wychodzi, żeby

$$2x+3 = A(x+1) + B(x-3).$$

Przez porównanie współczynników przy x i wyrazów wolnych otrzymujemy równania

$$2 = A+B \quad \text{i} \quad 3 = A-3B,$$

z których wyznaczamy $A = \frac{9}{4}$ i $B = -\frac{1}{4}$. Wobec tego

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2-2x-3}dx &= \int 1dx + \frac{9}{4}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} = \\ &= x + \tfrac{9}{4}\ln|x-3| - \tfrac{1}{4}\ln|x+1|. \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 3. Dla obliczenia całki $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x}$ piszemy

$$4\cos x + 3\sin x = 5\cos(x-x_0) = 5\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x_0 - x),$$

gdzie x_0 spełnia równości

$$\cos x_0 = \tfrac{4}{5} \quad \text{i} \quad \sin x_0 = \tfrac{3}{5}. \tag{5.1}$$

Wobec tego

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sin(\frac{1}{2}\pi + x_0 - x)} = -\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{x_0 - x}{2}\right)\right|.$$

Liczbę x_0 możemy wyznaczyć, dzieląc przez siebie równości (5.1), co daje $\operatorname{tg} x_0 = \frac{3}{4}$ i $x_0 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, ponieważ wobec (5.1) można przyjąć $0 < x_0 < \frac{1}{2}\pi$.

Najczęściej przy obliczaniu całek stosujemy różne metody, jak to pokażemy na następującym przykładzie:

PRZYKŁAD 4. Mamy do obliczenia całkę $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$. Stosując przekształcenie $\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, mamy

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Pierwsza z otrzymanych całek jest równa $\arcsin\frac{x}{a}$, drugą obliczamy przez części:

$$\begin{array}{cc} x & \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ 1 & -\sqrt{a^2-x^2} \end{array} \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Wobec tego mamy równość

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

z której znajdujemy ostatecznie

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Umiejętność całkowania polega na dobieraniu odpowiednich metod w zależności od typu funkcji całkowanej. W tej książce techniki całkowania bardziej szczegółowo omawiać nie będziemy.

Ćwiczenia. Obliczyć całki nieoznaczone następujących funkcyj:

$$\frac{1}{2-x^2},\quad \frac{1}{2+x^2},\quad \frac{1}{1-2x-3x^2},\quad \frac{1}{1-2x+3x^2},$$

$$\frac{3x+1}{1-2x-3x^2},\quad \sqrt{4+x^2},\quad \sqrt{1-x-2x^2}.$$

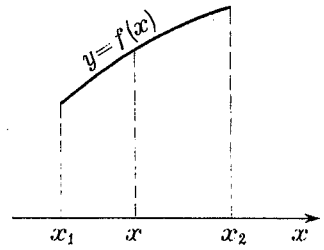
§ 6. Pole pod krzywą

Zagadnienia rachunku całkowego często biorą swój początek tam, gdzie nie widać bezpośredniego związku z rachunkiem różniczkowym. Zobaczymy w dalszym ciągu, że z rachunkiem całkowym wiąże się pojęcie *pola*.

Pole figury F (rys. 65) zawartej między krzywą $y=f(x)$, osią x i prostopadłymi do tej osi, wystawionymi w punktach x_1 i x_2, to znaczy pole obszaru określonego nierównościami

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \quad \text{i} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x) \tag{6.1}$$

zależy od trzech danych: od funkcji f, od punktu x_1 i od punktu x_2. Dlatego symbol wyrażający to pole powinien zawierać wszystkie trzy



Rys. 65

litery f, x_1 i x_2. Napiszemy go w postaci

$$\int_{x_1}^{x_2} f.$$

Symbol ten ma następujące własności:

I. Gdy $x_1 < x < x_2$, to

$$\int_{x_1}^{x} f+\int_{x}^{x_2} f = \int_{x_1}^{x_2} f;$$

II. Gdy $m \leqslant f(x) \leqslant M$ w $[x_1, x_2]$, to

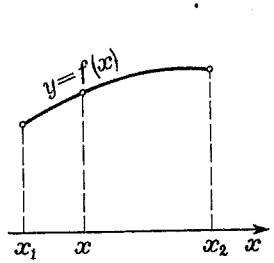
$$m(x_2-x_1) \leqslant \int_{x_1}^{x_2} f \leqslant M(x_2-x_1) \qquad (x_1 < x_2).$$

Pierwsza własność wyraża, że jeżeli figurę F rozetniemy cięciem pionowym na dwie części (rys. 66), to będą one miały łącznie to samo pole co figura F. Tę własność nazywamy *addytywnością* pola.

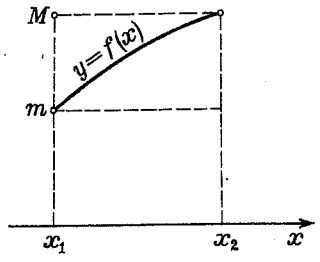
Druga własność wyraża, że pole figury F jest nie większe od pola prostokąta opisanego na F i nie mniejsze od pola prostokąta wpisanego w F (rys. 67). Tę własność nazwijmy *medialnością* pola.

Są to dwie charakterystyczne własności pola. Mówiąc to, mamy na myśli, że jeżeli pewna wielkość, zależna od f, x_1 i x_2, spełnia

warunki I i II, to wyraża pole pod krzywą. Dowieść tego można dopiero po uściśleniu pojęcia pola; można też postąpić odwrotnie i wykorzystać tę własności dla zdefiniowania pola.



Rys. 66



Rys. 67

Na razie rozpatrzmy kilka przykładów.

PRZYKŁAD 1. Niech f będzie funkcją stałą $f(x)=k$. Wtedy z medialności wynika, że

$$\int_{x_1}^{x_2} f = k(x_2-x_1);$$

addytywność jest również spełniona, gdyż $k(x-x_1)+k(x_2-x)=k(x_2-x_1)$.

PRZYKŁAD 2. Jeżeli $f(x)=x$, to wyrażenie

$$\int_{x_1}^{x_2} f = \frac{x_2^2-x_1^2}{2} \tag{6.2}$$

jest addytywne i medialne, gdyż

$$\frac{x^2-x_1^2}{2}+\frac{x_2^2-x^2}{2}=\frac{x_2^2-x_1^2}{2} \quad \text{i} \quad x_1(x_2-x_1)\leqslant\frac{x_2^2-x_1^2}{2}\leqslant x_2(x_2-x_1).$$

Udowodnimy później, że wyrażenie (6.2) jest jedynym, które dla rozważanej funkcji f spełnia warunki addytywności i medialności.

PRZYKŁAD 3. Niech wartość funkcji $f(x)$ wynosi 1 dla x wymiernych, a 0 dla x niewymiernych. Niech k będzie dowolną liczbą zawartą

między 0 a 1. Jeżeli przyjmiemy $\int_{x_1}^{x_2} f = k(x_2-x_1)$, to addytywność i medialność będą spełnione. Teraz jednak symbol $\int_{x_1}^{x_2} f$ nie jest jednoznacznie określony, bo liczbę k (nie występującą w definicji funkcji f) możemy ustalić zupełnie dowolnie. W rozważanym przypadku nie ma też sensu mówić o polu pod krzywą $y=f(x)$.

§ 7. Pojęcie całki oznaczonej

Wartość pola $\int_{x_1}^{x_2} f$ zależy przy ustalonej funkcji f tylko od wyboru przedziału $[x_1, x_2]$. Dlatego to pole nazywamy *funkcją przedziału*. Pole jest więc addytywną i medialną funkcją przedziału. W ostatnim przykładzie poprzedniego paragrafu istniało nieskończenie wiele addytywnych i medialnych funkcyj przedziału i pole nie miało określonego sensu.

Mówiąc ogólnie o funkcji przedziału nie ma potrzeby wiązać tego pojęcia z interpretacją geometryczną. Funkcja przedziału jest określona w przedziale $[a, b]$, gdy każdej parze liczb x_1 i x_2 należących do tego przedziału przyporządkowuje pewną liczbę; przy tym nie zakładamy wcale, że $x_1<x_2$, lecz dopuszczamy także $x_1=x_2$ lub $x_1>x_2$. Oczywiście przy takiej umowie wyrażenie funkcja przedziału ma znaczenie czysto konwencjonalne.

Funkcję przedziału nazywamy *addytywną*, jeżeli spełnia warunek I przy wszelkich x_1, x i x_2 należących do $[a, b]$. Nazywamy ją *medialną względem f*, jeżeli spełnia warunek II przy założeniu $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$. Warunek ten ma sens, gdy funkcja f jest ograniczona w $[a, b]$; natomiast o funkcji f nie musimy wcale zakładać, że jest dodatnia.

Dla $x=x_1$ warunek addytywności przyjmuje postać $\int_{x_1}^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}$, skąd wynika

$$\int_{x_1}^{x_1} f = 0. \tag{7.1}$$

Gdy zaś $x_1 = x_2$, to $\int_{x_1}^{x} + \int_{x}^{x_1} = \int_{x_1}^{x_1} = 0$, skąd wynika

$$\int_{x_1}^{x} f = -\int_{x}^{x_1} f. \tag{7.2}$$

Gdy funkcja f jest ciągła, to warunek medialności można napisać w postaci

$$\int_{x_1}^{x_2} f = (x_2 - x_1) f(\xi),$$

gdzie ξ jest odpowiednio dobraną liczbą między x_1 a x_2. Taka liczba ξ na pewno istnieje, bo funkcja f jako ciągła przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między m a M.

TWIERDZENIE 7.1. *Jeżeli* $\int_{x_1}^{x_2} f$ *jest funkcją przedziału addytywną w przedziale* $[a, b]$ *i medialną względem danej funkcji ograniczonej* f, *to funkcja* $F(x) = \int_a^x f$ *jest ciągła w przedziale* $[a, b]$.

Dowód. Niech x_0 będzie dowolnym punktem przedziału $[a, b]$ różnym od b i niech $x_0 < x < b$. Na podstawie addytywności $\int_{x_1}^{x_2} f$ jest

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x} f.$$

Ponieważ z założenia istnieje taka stała M, że $-M \leqslant f(x) \leqslant M$ w $[a, b]$, więc z medialności wynika

$$-M(x - x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x} f \leqslant M(x - x_0),$$

czyli $|F(x) - F(x_0)| \leqslant M(x - x_0)$. A to dowodzi ciągłości prawostronnej $F(x)$ w punkcie x_0.

Niech teraz x_0 będzie dowolnym punktem przedziału $[a, b]$ różnym od a i niech $a < x < x_0$. Wtedy $F(x_0) - F(x) = \int_a^{x_0} f - \int_a^{x} f = \int_{x}^{x_0} f$,

a stąd $|F(x_0) - F(x)| \leqslant M(x_0 - x)$, co dowodzi ciągłości lewostronnej $F(x)$ w punkcie x_0. Twierdzenie jest więc dowiedzione w całości.

TWIERDZENIE 7.2. *Jeżeli* $\int_{x_1}^{x_2} f$ *jest funkcją przedziału addytywną w przedziale* $[a, b]$ *i medialną względem danej funkcji ograniczonej* f, *która jest ciągła w* (a, b), *to funkcja* $F(x) = \int_a^x f$ *ma w* (a, b) *pochodną*

$$F'(x) = f(x).$$

Dowód. Gdy $a < x < x_0 < b$, to na podstawie addytywności i medialności rozważanej funkcji przedziału jest

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} = \frac{1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} f = f(\xi),$$

gdzie $x < \xi < x_0$; gdy zaś $a < x_0 < x < b$, to

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f = f(\xi),$$

gdzie $x_0 < \xi < x$. Wobec ciągłości funkcji f wynika stąd

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} = f(x_0),$$

co dowodzi twierdzenia.

Przyjmujemy teraz następujące definicje.

Funkcję ograniczoną f, dla której w przedziale $[a, b]$ istnieje jedyna addytywna i medialna funkcja przedziału $\int_{x_1}^{x_2} f$, nazywamy *całkowalną* w $[a, b]$. Symbol $\int_{x_1}^{x_2} f$ nazywamy wtedy *całką oznaczoną* od x_1 do x_2 z funkcji f.

Zamiast $\int_{x_1}^{x_2} f$ zwykle pisze się $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Zgodnie z tą definicją każda całka oznaczona jest funkcją przedziału addytywną i medialną. Natomiast funkcja przedziału addytywna i medialna jest całką tylko wtedy, gdy jest jedyną taką funkcją, to znaczy gdy przez funkcję f jest określona jednoznacznie. Wobec takiej definicji całka oznaczona spełnia oczywiście wzory (7.1) i (7.2) a także twierdzenia 7.1 i 7.2. Przy dowodzeniu tych wzorów i twierdzeń korzystaliśmy z addytywności i medialności, natomiast nie korzystaliśmy z jednoznaczności. W dowodach twierdzeń, które podamy w następnym paragrafie, jednoznaczność będzie już grała rolę istotną.

Twierdzenie 7.2 dla całek pochodzi od Isaaca Barrowa (1667), który był nauczycielem wielkiego Newtona. Twierdzenie Barrowa stanowi fundament rachunku różniczkowego i całkowego, wiąże bowiem pochodną z całką oznaczoną. W interpretacji geometrycznej jest to piękne i nieoczekiwane powiązanie dwóch na pozór odległych pojęć: stycznej i pola.

Dla całki oznaczonej przeważnie jest używany symbol $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$. Został on wprowadzony przez Leibniza. Kształt tego symbolu jest związany z ówczesnym pojmowaniem całki jako nieskończonej sumy iloczynów $f(x)$ przez nieskończenie małe wielkości dx, zwane *różniczkami*. Pojęcie takie nie wytrzymało próby uściślenia logicznego. Obecnie różniczce przypisujemy inne znaczenie, które nie jest związane bezpośrednio z pojęciem całki. W zapisie Leibniza nie można za literę x podstawiać liczbowych wartości; na przykład nie ma sensu pisać $\int_{x_1}^{x_2} f(1)\,d1$. Litera x ma tu znaczenie tylko symboliczne. Pisanie jej daje pewne korzyści rachunkowe, pozwala bowiem prosto zapisać pewne algorytmy na przekształcanie całek. Symbol $\int_{x_1}^{x_2} f$ jest uproszczeniem symbolu Leibniza.

Leibniza pojęcie całki zostało uściślone przez Cauchy'ego. Całka Cauchy'ego została uogólniona przez Riemanna. Podana przez nas definicja jest równoważna definicji Riemanna.

Znaczenie geometryczne całki oznaczonej wynika z omówionych w poprzednim paragrafie własności pola: jego addytywności i medialności. Ponieważ całka oznaczona jest (jeżeli istnieje) jedyną addytywną i medialną funkcją przedziału, więc pole figury określonej nierównościami (6.1) musi być równe całce od x_1 do x_2 z funkcji f. Wobec

tego całkę możemy uważać za analityczny odpowiednik pola i jednocześnie za uściślenie tego pojęcia.

§ 8. Związek między całką oznaczoną a całką nieoznaczoną

Podstawowe znaczenie dla rachunku całkowego ma następujące twierdzenie, będące odwróceniem twierdzenia Barrowa.

TWIERDZENIE 8.1. *Załóżmy, że w przedziale domkniętym $[a, b]$ funkcja f jest ograniczona, a funkcja F ciągła; załóżmy ponadto, że w przedziale otwartym (a, b) funkcja f jest ciągła i $F'(x) = f(x)$ dla każdego x z tego przedziału. Wtedy istnieje całka $\int_a^b f$ i jest równa*

$$\int_a^b f = F(b)-F(a).$$

Dowód. Wyrażenie $F(x_2)-F(x_1)$ jest funkcją addytywną przedziału, bo $\big(F(x)-F(x_1)\big)+\big(F(x_2)-F(x)\big) = F(x_2)-F(x_1)$; jest funkcją przedziału medialną względem f, bo na podstawie twierdzenia o wartości średniej mamy $F(x_2)-F(x_1) = (x_2-x_1)f(\xi)$, gdzie $x_1 < \xi < x_2$. Pozostaje więc do udowodnienia, że jest to jedyna funkcja przedziału o tych własnościach, czyli że jeżeli symbol $\int_{x_1}^{x_2} f$ przedstawia jakąś addytywną i medialną ze względu na f funkcję przedziału, to $\int_{x_1}^{x_2} f = F(x_2)-F(x_1)$. Wtedy na podstawie twierdzenia 7.2 funkcja $F_1(x) = \int_{x_1}^{x} f$ ma w (a, b) pochodną $f(x)$, z czego wynika, że w tym przedziale musi zachodzić równość

$$F_1(x) = F(x)+C, \tag{8.1}$$

gdzie C jest pewną liczbą (stałą). Ale na podstawie twierdzenia 7.1 funkcja $F_1(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, a funkcja $F(x)$ jest w tym przedziale ciągła z założenia. Wobec tego równość (8.1) zachodzi w całym przedziale $[a, b]$. Jeżeli więc x_1 i x_2 są dowolnymi

punktami tego przedziału, to

$$\int_{x_1}^{x_2} f = \int_{a}^{x_2} f - \int_{a}^{x_1} f = F_1(x_2) - F_1(x_1) = F(x_2) - F(x_1),$$

co dowodzi twierdzenia.

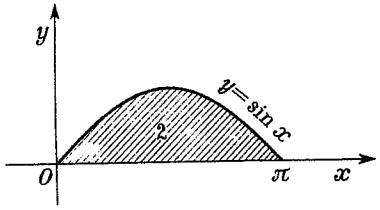
Dzięki twierdzeniu 8.1 obliczanie całek oznaczonych sprowadza się do obliczania całek nieoznaczonych.

PRZYKŁAD 1. Obliczyć całkę $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ (rys. 68). Obliczamy najpierw całkę nieoznaczoną $F(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$. Stąd

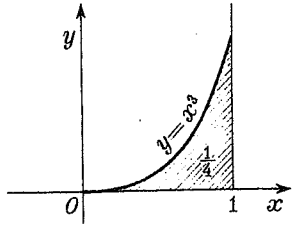
$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = 1 + 1 = 2.$$

Rachunek taki notujemy często w następujący sposób:

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$



Rys. 68



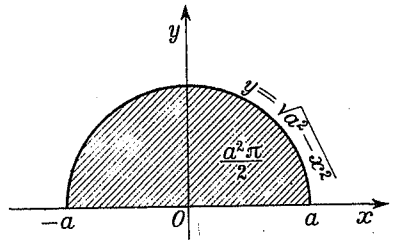
Rys. 69

PRZYKŁAD 2. Obliczyć całkę $\int_0^1 x^3\,dx$ (rys. 69).

$$\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

PRZYKŁAD 3. Obliczyć całkę $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $(a > 0)$ (rys. 70).

Korzystając ze znajomości całki nieoznaczonej dla funkcji $\sqrt{a^2 - x^2}$, znalezionej już w § 5 (str. 209), piszemy:



Rys. 70

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{2}.$$

W ostatnim przykładzie obliczyliśmy pole półkola o promieniu a. Wobec tego pole całego koła o promieniu a wynosi $a^2\pi$.

Ćwiczenia. Obliczyć następujące całki oznaczone:

$$\int_{-1}^{1} \arccos x\,dx, \quad \int_0^3 \frac{dx}{9 + x^2}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}, \quad \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\,dx, \quad \int_1^2 \ln x\,dx.$$

§ 9. Pewne twierdzenie o całkowalności

Udowodnimy twierdzenie ogólne:

TWIERDZENIE 9.1. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna w przedziałach $[a, b]$ i $[b, c]$, to jest też całkowalna w $[a, c]$ i*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dowód. Określamy w $[a, c]$ funkcję przedziału

$$\int_{x_1}^{x_2} f = \int_{x_1}^{b} f + \int_{b}^{x_2} f, \tag{9.1}$$

w której symbole po prawej stronie są całkami oznaczonymi. Funkcja ta jest addytywna, bo wobec (7.2)

$$\int_{x_1}^{x}+\int_{x}^{x_2}=\int_{x_1}^{b}+\int_{b}^{x}+\int_{x}^{b}+\int_{b}^{x_2}=\int_{x_1}^{b}+\int_{b}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}.$$

Jest też medialna, bo skoro f jest ograniczona w $[a, b]$ i $[b, c]$, to jest też ograniczona w przedziale $[a, c]$. Gdy x_1 i x_2 należą do tego samego z przedziałów $[a, b]$ lub $[b, c]$ i $x_1 < x_2$, to $\int_{x_1}^{x_2} f = \int_{x_1}^{x_2} f$ i tym samym warunek medialności jest spełniony. Gdy zaś $x_1 < b < x_2$, to niech m i M będą takimi liczbami, że $m \leqslant f(x) \leqslant M$ dla $x_1 < x < x_2$. Wtedy

$$(b-x_1)m \leqslant \int_{x_1}^{b} f \leqslant (b-x_1)M \quad \text{i} \quad (x_2-b)m \leqslant \int_{b}^{x_2} f \leqslant (x_2-b)M,$$

skąd wobec (9.1) otrzymujemy $(x_2-x_1)m \leqslant \int_{x_1}^{x_2} f \leqslant (x_2-x_1)M$.

Pozostaje więc udowodnić, że funkcja przedziału o tych własnościach istnieje tylko jedna. Ale każda funkcja addytywna i medialna w przedziale $[a, c]$ jest też addytywna i medialna w każdym z przedziałów częściowych $[a, b]$ i $[b, c]$, musi więc być identyczna z całką $\int_{x_1}^{x_2} f$, gdy x_1 i x_2 należą do jednego tylko z tych przedziałów. Gdy zaś należą do różnych przedziałów, to na podstawie addytywności musi być równa sumie $\int_{x_1}^{b} f+\int_{b}^{x_2} f$. Zatem jest jednoznacznie określona dla wszelkich x_1 i x_2 przedziału $[a, c]$, co dowodzi twierdzenia.

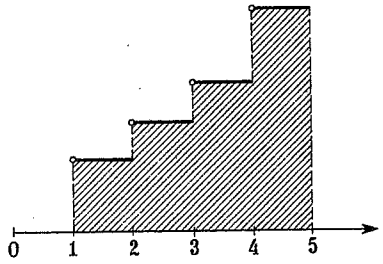
Twierdzenie to mimo pewnej abstrakcyjności ma częste zastosowania praktyczne, pozwala bowiem obliczyć całkę oznaczoną, gdy wiemy, że istnieją i potrafimy obliczyć całki oznaczone w przedziałach częściowych. W tym celu warto je wypowiedzieć dla dowolnej liczby przedziałów:

Jeżeli funkcja f jest całkowalna w przedziałach $[a_0, a_1], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$, to jest też całkowalna w przedziale $[a_0, a_n]$ i

$$\int_{a_0}^{a_1} f+\ldots+\int_{a_{n-1}}^{a_n} f=\int_{a_0}^{a_n} f.$$

Postać ta wynika od razu z twierdzenia 9.1 przez indukcję.

TWIERDZENIE 9.2. *Jeżeli $f(x) = a_n$ dla $n \leqslant x < n+1$ i n naturalnych (funkcja schodkowa), to* $\int_{1}^{m+1} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{m} a_n$ (rys. 71).



Rys. 71

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = a_n, \tag{9.2}$$

bo wtedy $\int_{1}^{m+1} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{m} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx$ na podstawie dowiedzionego twierdzenia. Równość (9.2) istotnie ma miejsce, bo z twierdzenia 8.1 wynika, że wartości funkcji na końcach przedziału nie grają przy całkowaniu roli; możemy więc przy obliczeniu całki (9.2) przyjąć, że $f(x) = a_n$ w całym przedziale $[n, n+1]$. Wtedy

$$\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = \int_{n}^{n+1} a_n\,dx = a_n,$$

co dowodzi twierdzenia.

Ćwiczenie. Obliczyć całkę $\int_{1}^{10} \frac{[x]}{x}\,dx$.

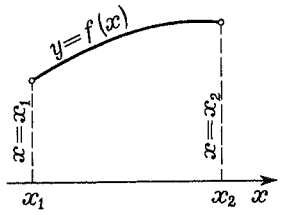
§ 10. Długość łuku krzywej

Oznaczmy ogólnie przez $\overset{x_2}{\underset{x_1}{\text{Ł}}}$ długość łuku krzywej $y = f(x)$ zawartego między prostymi $x = x_1$ i $x = x_2$ (rys. 72). Łuk ma następującą intuicyjną własność:

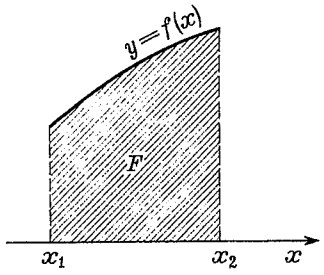
I. Gdy $x_1 < x < x_2$, to

$$\overset{x}{\underset{x_1}{\text{Ł}}} + \overset{x_2}{\underset{x}{\text{Ł}}} = \overset{x_2}{\underset{x_1}{\text{Ł}}}.$$

Własność tę możemy nazwać *addytywnością długości łuku*. Mówi ona, że jeżeli łuk rozetniemy na dwie części, to będą one miały łącznie tę samą długość, co cały łuk (rys. 73).



Rys. 72



Rys. 73

Przypuśćmy, że łuk ma w każdym punkcie styczną i że długość odcinka każdej z tych stycznych, zawartego między prostymi $x = x_1$ i $x = x_2$, jest nie mniejsza niż d i nie większa niż D (rys. 74). Wtedy zachodzi nierówność ([1])

$$d \leqslant \overset{x_2}{\underset{x_1}{\text{Ł}}} \leqslant D, \tag{10.1}$$

którą przyjmujemy za drugą podstawową własność łuku.

([1]) Podane rozumowanie motywacyjne wymaga założenia, że pochodna f' jest ograniczona. (Przyp. red.)

Własność tę możemy jeszcze napisać w innej postaci wziąwszy pod uwagę, że długość odcinka stycznego w punkcie x wynosi

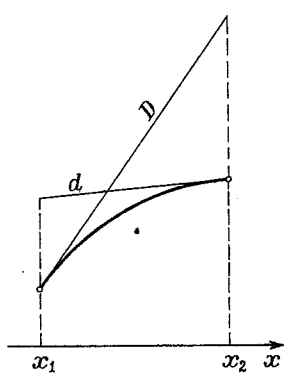
$$\sqrt{1+f'(x)^2}(x_2-x_1).$$

Wobec tego z nierówności (10.1) wynika:

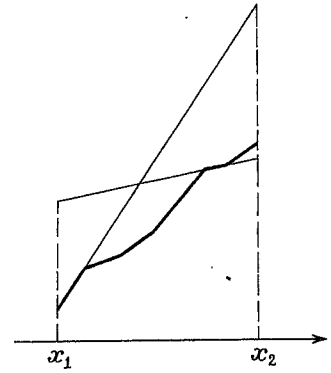
II. Gdy $m \leqslant \sqrt{1+f'(x)^2} \leqslant M$ w $[x_1, x_2]$, to

$$m(x_2-x_1) \leqslant \overset{x_2}{\underset{x_1}{\text{Ł}}} \leqslant M(x_2-x_1).$$

Własność II można nazwać *medialnością długości łuku*. Mówi ona, że długość łuku zawartego między dwiema prostymi pionowymi jest



Rys. 74



Rys. 75

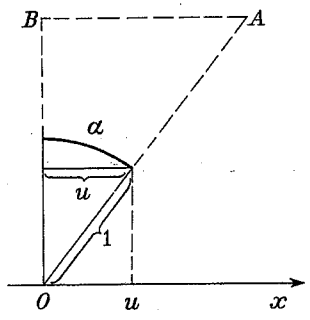
pośrednia między najkrótszym i najdłuższym odcinkiem stycznym rys. 75).

Medialność łuku nie jest w tym stopniu intuicyjna, co addytywność. Jest jednak oczywista dla linii łamanej: mianowicie długość tej łamanej jest zawarta między długościami najkrótszego i najdłuższego z odcinków, będących przedłużeniem odcinków danej łamanej aż do prostych $x = x_1$ i $x = x_2$.

Gdy teraz w łuk krzywej, mający wszędzie styczną, będziemy wpisywali coraz drobniejsze łamane, to ich długość będzie się zbli-

żała do długości łuku i będzie stale zawarta między długościami najkrótszego i najdłuższego z odcinków przedłużonych, które w granicy przejdą w styczne do łuku.

Argumentacji tej nie należy jednak uważać za rozumowanie matematyczne, ma ona tylko na celu ułatwić intuicyjne wyczucie medialności łuku.



Rys. 76

Z własności I i II wynika, że jeżeli funkcja $\sqrt{1+f'(x)^2}$ jest całkowalna, to długość łuku wyraża się wzorem

$$\mathrm{L}_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Obliczmy według tego wzoru długość łuku koła $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ zawartego między prostymi $x = 0$ i $x = u$ $(0 < u < 1)$. W tym przypadku jest

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wobec tego długość łuku, oznaczmy ją przez α, wyraża się wzorem

$$\alpha = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin u.$$

Stąd mamy związek

$$u = \sin\alpha.$$

Z rysunku 76 widać, że $u/1 = AB/AO$. Zatem

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AO},$$

co oznacza, że sinus kąta (mierzonego łukiem koła o promieniu 1) w trójkącie prostokątnym jest równy stosunkowi przyprostokątnej przeciwległej do przeciwprostokątnej.

W ten sposób przyjęta przez nas w § 37 rozdziału III (str. 173) definicja funkcji sinus została powiązana ze znaną definicją geometryczną.

Podobnie można wyrazić cosinus przez stosunek odpowiednich boków trójkąta:

$$\cos\alpha = \frac{BO}{AO},$$

co wynika dla $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ z twierdzenia Pitagorasa

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(\sin\alpha)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{AB}{AO}\right)^2} = \frac{\sqrt{AO^2-AB^2}}{AO} = \frac{BO}{AO}.$$

W omawianym przykładzie długość łuku koła była liczona od osi y na prawo. Na ogół jest zwyczaj liczyć łuk koła od osi x w górę, co formalnie odpowiada całce

$$\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

jednakże znaczenie takiego symbolu nie jest objęte dotychczasową definicją całki, gdyż funkcja podcałkowa $1/\sqrt{1-x^2}$ nie jest ograniczona w przedziale $[u, 1]$. Nasuwa to myśl takiego uogólnienia całki, które by objęło także powyższy przypadek. Uogólnienie to omówimy w następnym paragrafie.

Ćwiczenia. 1. Obliczyć długość łuku $y=\sqrt{a^2-x^2}$ w przedziale $[-a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}]$. (Łuk ten stanowi ćwiartkę okręgu o promieniu a).

2. Obliczyć długość łuku paraboli $y=x^2$ w przedziale $[0, 1]$.

3. Obliczyć długość łuku *linii łańcuchowej* $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ w przedziale $[a, b]$.

§ 11. Całki niewłaściwe

Przez *całkę niewłaściwą* funkcji f w przedziale $a \leqslant x < c$ rozumiemy granicę

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b\to c-} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{11.1}$$

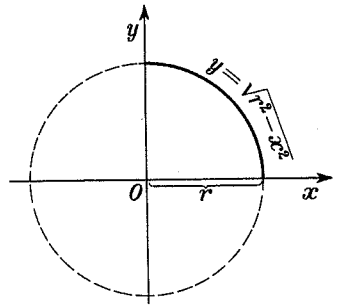
Całka niewłaściwa ma sens, gdy funkcja $f(x)$ jest całkowalna w każdym przedziale $[a, b]$, gdzie $b < c$ i gdy granica istnieje. Gdy granica nie istnieje, to całkę nazywamy *rozbieżną*. Można mówić o całce niewłaściwej w przedziale skończonym lub nieskończonym. W tym ostatnim przypadku we wzorze (11.1) zamiast c i c — piszemy ∞:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

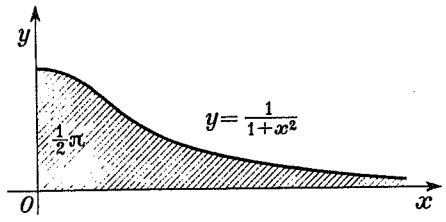
PRZYKŁAD 1.
$$\int_u^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \lim_{b\to r-} \int_u^b \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} =$$
$$= \lim_{b\to r-} r\left[\arcsin\frac{b}{r} - \arcsin\frac{u}{r}\right] =$$
$$= r\left(\frac{1}{2}\pi - \arcsin\frac{u}{r}\right) = r\arccos\frac{u}{r}.$$

PRZYKŁAD 2.
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{1}{2}\pi.$$

Gdy w przykładzie 1 przyjmiemy $u=0$, to obliczona całka będzie miała wartość $\frac{1}{2}r\pi$ i będzie wyrażała długość ćwiartki okręgu o promieniu r (rys. 77). Stąd długość całego okręgu wynosi $2r\pi$, a stosunek długości okręgu do długości średnicy ma wartość π. W ten sposób powiązaliśmy definicję liczby π podaną w § 39 rozdziału III (str. 177) ze znaną definicją geometryczną.



Rys. 77



Rys. 78

Całka w przykładzie 2 może być interpretowana geometrycznie jako pole w przedziale $(0, \infty)$, zawarte między krzywą $y=1/(1+x^2)$ a osią x (rys. 78). Pole to ma wartość skończoną, mimo że rozważany obszar jest nieograniczony.

TWIERDZENIE 11.1. *Całka niewłaściwa* $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ *jest zbieżna, gdy* $\alpha > 1$, *a rozbieżna, gdy* $\alpha \leqslant 1$.

Dowód. Gdy $\alpha \neq 1$, to

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha};$$

granica ta istnieje, gdy $\alpha > 1$, a nie istnieje, gdy $\alpha < 1$. Dla $\alpha = 1$ wykonujemy rachunek oddzielnie:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b;$$

stwierdzamy, że granica nie istnieje, co uzupełnia dowód.

Ćwiczenia. Obliczyć całki niewłaściwe

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}, \qquad \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

§ 12. O aproksymacji całek przez sumy skończone

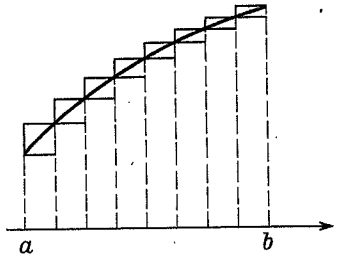
Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a, b]$. Podzielmy ten przedział na n dowolnych części punktami $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Załóżmy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ i $x_0 = a$, $x_n = b$. Oznaczmy przez m_i i M_i odpowiednio kres dolny i kres górny funkcji f w przedziale $[x_{i-1}, x_i]$. Wobec medialności całki jest

$$(x_i - x_{i-1})m_i \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqslant (x_i - x_{i-1})M_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Stąd przez zsumowanie stronami dostajemy (na podstawie addytywności całki) nierówności

$$(12.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})m_i \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})M_i.$$

Nierówności te mogą służyć do przybliżonego obliczania całki oznaczonej. Geometryczne ich znaczenie przedstawia rysunek 79. Pole między krzywą a osią x jest nie mniejsze od sumy prostokątów wpisanych i nie większe od sumy prostokątów opisanych.



Rys. 79

Sumy skończone występujące w nierównościach (12.1) mogą też służyć za punkt wyjścia dla definicji całki. Tak też robią autorowie przeważnej części podręczników [1].

§ 13. Granice niewłaściwe

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *prawostronną granicę* ∞ i piszemy

$$f(a+) = \infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \infty,$$

gdy dla każdej liczby A istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że dla $a < x < a+\varepsilon$ jest spełniona nierówność $f(x) > A$. Podobnie mówimy, że funkcja f ma w punkcie a *prawostronną granicę* $-\infty$ i piszemy

$$f(a+) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = -\infty,$$

gdy dla każdej liczby A istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że dla $a < x < a+\varepsilon$ jest spełniona nierówność $f(x) < A$.

Podobnie definiujemy *lewostronną granicę* ∞ *i lewostronną granicę* $-\infty$, należy wtedy nierówności $a < x < a+\varepsilon$ zastąpić przez $a-\varepsilon < x < a$, a symbol $a+$ przez $a-$.

Na przykład (rys. 80)

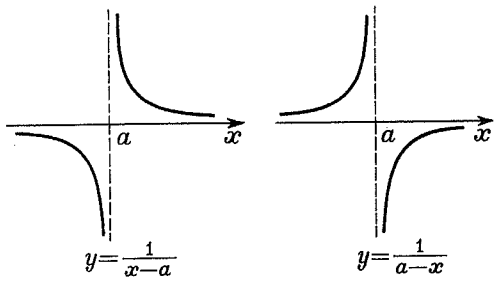
$$\lim_{x \to a+} \frac{1}{x-a} = \infty, \qquad \lim_{x \to a+} \frac{1}{a-x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to a-} \frac{1}{x-a} = -\infty, \qquad \lim_{x \to a-} \frac{1}{a-x} = \infty.$$

Granice ∞ i $-\infty$ nazywamy *granicami niewłaściwymi*. Można też mówić o *granicy niewłaściwej obustronnej*, pisząc $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, gdy $f(a+) = \infty$ i $f(a-) = \infty$ lub $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, gdy $f(a+) = -\infty$, $f(a-) = -\infty$.

---

[1] Dalsza analiza pojęcia całki pozwala dowieść, że wszystkie funkcje ciągłe są całkowalne. (Przyp. red.).



Rys. 80

Załóżmy, że w przedziale (a, b) jest $f(x) = 1/g(x) > 0$. Wtedy równości $g(a+) = 0$ i $f(a+) = \infty$ są równoważne, to znaczy z $g(a+) = 0$ wynika $f(a+) = \infty$ i odwrotnie, z $f(a+) = \infty$ wynika $g(a+) = 0$. Równoważność ta jest bezpośrednim wnioskiem z definicji granicy niewłaściwej. Podobnie równości $g(b-) = 0$ i $f(b-) = \infty$ są równoważne.

Gdy natomiast w przedziale (a, b) jest $f(x) = 1/g(x) < 0$, to równość $g(a+) = 0$ jest równoważna z równością $f(a+) = -\infty$, a równość $g(b-) = 0$ jest równoważna z równością $f(b-) = -\infty$.

Istnieje też pojęcie *granicy niewłaściwej w nieskończoności.* Mianowicie mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w nieskończoności granicę ∞, gdy dla każdej liczby A istnieje taka liczba δ, że dla $x > \delta$ jest $f(x) > A$. Piszemy wtedy

$$f(\infty) = \infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty. \tag{13.1}$$

Podobnie mówimy, że funkcja $f(x)$ ma w nieskończoności granicę $-\infty$, gdy dla każdej liczby A istnieje taka liczba δ, że dla $x > \delta$ jest $f(x) < A$. Piszemy wtedy

$$f(\infty) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty. \tag{13.2}$$

PRZYKŁADY.

$$e^{\infty} = \infty, \quad \ln\infty = \infty, \quad \log_{1/2}\infty = -\infty$$

$$\infty^a = \infty \quad (a > 0), \quad \infty^a = 0 \quad (a < 0).$$

Równości (13.1) są równoważne z równością $\lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$, a równości (13.2) są równoważne z równością $\lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

§ 14. Łatwe twierdzenie de l'Hôpitala

Przy obliczaniu granic często jest pożyteczne *twierdzenie de l'Hôpitala.* Ma ono dwie postacie, z których jedna jest łatwiejsza, a druga trudniejsza do udowodnienia. W zależności od tego rozróżniamy *łatwe* i *trudne* twierdzenie de l'Hôpitala.

TWIERDZENIE 14.1 (łatwe twierdzenie de l'Hôpitala). *Mamy równość*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

przy założeniu, że $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, *mianowniki napisanych ułamków są różne od zera i że istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa) po prawej stronie równości.*

Twierdzenie to jest prawdziwe także dla granicy lewostronnej, prawostronnej i dla granicy w nieskończoności, to znaczy gdy w nim symbol a zastąpimy wszędzie przez $a-$, $a+$ *lub* ∞.

Dowód przeprowadzimy najpierw dla granicy prawostronnej. Przypuśćmy więc, że funkcje $f(x)/g(x)$ i $f'(x)/g'(x)$ są określone w pewnym przedziale $a < x \leqslant t$. Wprowadzamy funkcję pomocniczą $\varphi(x) = f(t)g(x) - f(x)g(t)$; jest $\varphi(a+) = \varphi(t) = 0$. Gdy przyjmiemy, że $\varphi(a) = 0$, to funkcja φ będzie ciągła w przedziale $[a, t]$ i na podstawie twierdzenia o wartości średniej będzie $\varphi'(\xi) = 0$, czyli $f(t)g'(\xi) - f'(\xi)g(t) = 0$ dla pewnego punktu ξ między a i t. Stąd

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < t).$$

Z równości tej wynika, że

$$\lim_{t\to a+}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{\xi\to a+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

o ile tylko druga z tych granic istnieje.

Zastępując w powyższym dowodzie nierówności $a<x\leqslant t$ i $a<\xi<t$ przez $t\leqslant x<a$ i $t<\xi<a$, a symbol $a+$ *przez* $a-$, dostaniemy dowód dla granicy lewostronnej. Stąd wynika też prawdziwość twierdzenia dla granicy obustronnej.

Wreszcie w przypadku $a=\infty$ mamy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(1/x)}{g(1/x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{f'(1/x)(-1/x^2)}{g'(1/x)(-1/x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

i dowód jest zakończony.

W dowodzie dla granicy prawostronnej założyliśmy, że funkcje $f(x)/g(x)$ i $f'(x)/g'(x)$ istnieją w pewnym przedziale $a<x\leqslant t$. Założenie to jest naturalne, skoro w ogóle jest mowa o granicy prawostronnej. Można by wykazać, że z istnienia funkcyj f, g i f'/g' dla $a<x\leqslant t$ i założenia $\lim_{x\to a+} g(x)=0$ wynika już istnienie funkcji f/g dla $a<x\leqslant t$. Fakt ten jednak nie ma znaczenia praktycznego i można w twierdzeniu zawsze przyjmować istnienie funkcji f/g w takich przedziałach, by dla niej symbol granicy nie był pozbawiony sensu.

PRZYKŁAD 1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$

PRZYKŁAD 2. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a \quad (a>0).$

PRZYKŁAD 3. $\lim_{x\to 0+}\frac{x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sin x}=\infty.$

Ćwiczenia. Znaleźć następujące granice:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-2x^2+2x-1},\quad \lim_{x\to a+}\frac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}},\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\quad (a>0,\ b>0);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{(\sin x)^3},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}.$$

§ 15. Trudne twierdzenie de l'Hôpitala

Twierdzenie, które teraz wypowiemy, różni się od poprzedniego tym, że założenia $\lim_{x\to a} f(x)=0$ i $\lim_{x\to a} g(x)=0$ są zastąpione jednym założeniem: $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$. Pełne więc sformułowanie jest następujące:

TWIERDZENIE 15.1 (trudne twierdzenie de l'Hôpitala). *Mamy równość*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

przy założeniu, że $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, *mianowniki napisanych ułamków są różne od zera i że istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa) po prawej stronie równości.*

Twierdzenie to jest prawdziwe także dla granicy lewostronnej, prawostronnej i dla granicy w nieskończoności, to znaczy gdy w nim symbol a zastąpimy przez $a-$, $a+$ *lub* ∞.

Dowód. Udowodnimy twierdzenie najpierw przy założeniu, że $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$, gdzie k jest liczbą skończoną. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje taka liczba x_0, że

$$g(x)>0 \quad \text{i} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)}<k+\tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{dla} \quad x\geqslant x_0,$$

gdzie $g'(x)\neq 0$. Pochodna $g'(x)$ nie może zmieniać znaku dla $x\geqslant x_0$, jest więc $g'(x)>0$, bo $g(x)$ dąży do ∞. Stąd

$$f'(x)-(k+\tfrac{1}{2}\varepsilon)g'(x)<0 \quad \text{dla} \quad x\geqslant x_0 \tag{15.1}$$

i dalej

$$f(x)-f(x_0)-(k+\tfrac{1}{2}\varepsilon)(g(x)-g(x_0))<0 \quad \text{dla} \quad x>x_0, \tag{15.2}$$

ponieważ lewa strona nierówności (15.2) jest równa zeru dla $x=x_0$ i ma pochodną (15.1). Z nierówności (15.2) wynika

$$\frac{f(x)}{g(x)}<k+\tfrac{1}{2}\varepsilon+\frac{f(x_0)-(k+\tfrac{1}{2}\varepsilon)g(x_0)}{g(x)} \quad \text{dla} \quad x>x_0.$$

Istnieje taka liczba $x_1 \geqslant x_0$, że ostatni wyraz po prawej stronie jest $< \frac{1}{2}\varepsilon$ dla $x \geqslant x_1$. Wobec tego

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k+\varepsilon \quad \text{dla} \quad x \geqslant x_1. \tag{15.3}$$

Podobnie dowodzimy istnienia takiej liczby x_2, że

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k-\varepsilon \quad \text{dla} \quad x \geqslant x_2; \tag{15.4}$$

wystarczy w poprzednich nierównościach zmienić wszędzie znak $<$ na $>$ i liczbę $+\frac{1}{2}\varepsilon$ zastąpić przez $-\frac{1}{2}\varepsilon$. Z nierówności (15.3) i (15.4) wynika $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, co dowodzi twierdzenia.

Załóżmy teraz, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. Wtedy istnieje taka liczba x_0, że

$$g(x) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} > 1 \quad \text{dla} \quad x \geqslant x_0.$$

Stąd mamy

$$f'(x)-g'(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \geqslant x_0$$

i w konsekwencji

$$f(x)-f(x_0)-\big(g(x)-g(x_0)\big) > 0 \quad \text{dla} \quad x > x_0,$$

czyli

$$f(x) > g(x)-g(x_0)+f(x_0) \quad \text{dla} \quad x > x_0.$$

Stąd wynika, że $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, więc na podstawie poprzednio udowodnionego przypadku jest $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Stąd mamy ostatecznie $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Załóżmy na koniec, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$. Wtedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to\infty} \frac{-f(x)}{g(x)} = -\lim_{x\to\infty} \frac{-f'(x)}{g'(x)} = -\infty.$$

Twierdzenie jest więc udowodnione ogólnie dla $x\to\infty$.

Dla prawostronnej granicy w punkcie a twierdzenie wynika z równości

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{g\left(a+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'\left(a+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(a+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'\left(a+\frac{1}{x}\right)}{g'\left(a+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Podobnie otrzymamy twierdzenie dla granicy lewostronnej, zastępując w powyższych równościach $a+$ przez $a-$, $1/x$ przez $-1/x$ i $-1/x^2$ przez $1/x^2$.

Z twierdzeń dla granicy lewostronnej i dla granicy prawostronnej wynika od razu twierdzenie dla granicy obustronnej.

PRZYKŁAD 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

PRZYKŁAD 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$

Można udowodnić ogólniej, że jeżeli α jest dowolną liczbą dodatnią, to

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Istotnie,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}e^{x/\alpha}}{1}\right)^\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha^\alpha}e^x=\infty.$$

W ostatnim rachunku przed zastosowaniem twierdzenia de l'Hôpitala wykonaliśmy pewne przekształcenia wstępne(1). Bezpośrednie zastosowanie twierdzenia de l'Hôpitala nie doprowadziłoby tak prosto do celu.

Ćwiczenia. Obliczyć następujące granice:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\alpha}{x}\ (\alpha \text{ dowolne}),\qquad \lim_{x\to0+}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\ln\operatorname{tg}2x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}.$$

§ 16. Wnioski z twierdzenia de l'Hôpitala

Gdy $\lim f(x)=0$ i $\lim g(x)=\infty$ (znak lim może oznaczać którykolwiek z symboli $\lim_{x\to a}$, $\lim_{x\to a-}$, $\lim_{x\to a+}$ lub $\lim_{x\to\infty}$), to granicę iloczynu $f(x)g(x)$ możemy obliczać przedstawiając go w jednej z dwóch postaci

$$\frac{f(x)}{1/g(x)}\quad\text{lub}\quad\frac{g(x)}{1/f(x)}$$

i stosując następnie odpowiednią formę twierdzenia de l'Hôpitala.

PRZYKŁAD 1. $$\lim_{x\to0+}x\ln x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=$$
$$=\lim_{x\to0+}(-x)=0.$$

(1) Przekształcenie, podobne do wykonywanych przed chwilą, nie zawsze muszą być poprawne; np. $\lim_{x\to\infty}\sin 2\pi[x]=0$, natomiast symbol $\sin(\lim_{x\to\infty}2\pi[x])$ nie ma w ogóle sensu. Czytelnik zanalizuje poprawność naszych przekształceń (por. koniec § 13).

PRZYKŁAD 2. $$\lim_{x\to\infty}x(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{arctg}x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\pi-\operatorname{arctg}x}{1/x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

Podobnie, gdy $\lim f(x)=\infty$ i $\lim g(x)=\infty$, to granicę różnicy $f(x)-g(x)$ możemy obliczać, przedstawiając tę różnicę w postaci

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}}.$$

PRZYKŁAD 1. $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

PRZYKŁAD 2. $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1-1/x}{\ln x+(x-1)/x}=\lim_{x\to1}\frac{1/x^2}{1/x+1/x^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Często nie opłaca się stosować twierdzenia de l'Hôpitala, lecz wygodniej jest obliczać granicę inną drogą, np.

$$\lim_{x\to\infty}(\ln(1+x)-\ln x)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)=$$
$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)=\ln1=0.$$

Omówimy jeszcze dwa inne przypadki, w których twierdzenie de l'Hôpitala oddaje duże usługi.

Gdy $f(x) > 0$, $\lim f(x) = 0$ i $\lim g(x) = 0$, to

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)} \tag{16.1}$$

i możemy do wykładnika stosować twierdzenie de l'Hôpitala.

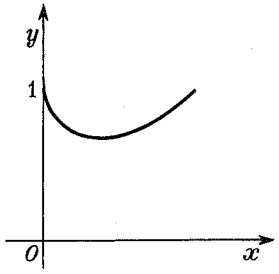
Jeżeli wykładnik W ma postać skomplikowaną, to zamiast e^W często pisze się $\exp W$. Przy tej umowie zamiast (16.1) można napisać

$$\lim f(x)^{g(x)} = \exp\lim \frac{\ln f(x)}{1/g(x)};$$

tutaj funkcja pod znakiem lim ma postać ilorazu, a więc postać dostosowaną do bezpośredniego stosowania twierdzenia de l'Hôpitala.

PRZYKŁAD 1. $$\lim_{x\to 0+} x^x = \exp \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} =$$

$$= \exp \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \exp 0 = 1 \text{ (rys. 81).}$$



Rys. 81

Bardzo pożyteczny jest wzór

$$\lim(1+f(x))^{1/g(x)} = \exp\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (\lim f(x) = 0,\ \lim g(x) = 0);$$

znak lim może oznaczać tu, podobnie jak we wzorach poprzednich, granicę lewostronną, prawostronną, obustronną lub granicę w nieskończoności. Wzór wynika z następującego rachunku.

$$\lim(1+f(x))^{1/g(x)} = \lim\exp\frac{\ln(1+f(x))}{g(x)} = \exp\lim\frac{\ln(1+f(x))}{g(x)} =$$

$$= \exp\lim\frac{\dfrac{f'(x)}{1+f(x)}}{g'(x)} = \exp\left(\lim\frac{1}{1+f(x)}\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) =$$

$$= \exp\left(1\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}\right).$$

PRZYKŁAD 1. $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \exp\lim_{x\to 0}\tfrac{1}{1} = e^1 = e.$$

PRZYKŁAD 2. $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{1/x^2} =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

PRZYKŁAD 3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0+}(1-x)^{1/x} = \exp\lim_{x\to 0+}\frac{-1}{1} =$$

$$= \exp(-1) = \frac{1}{e}.$$

Ćwiczenia. Obliczyć następujące granice:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right),\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x\operatorname{tg}x}\right),\quad \lim_{x\to \pi/2}(x-\tfrac{1}{2}\pi)\operatorname{tg}x,$$

$$\lim_{x\to 0+} x(-\ln x)^\alpha,\quad \lim_{x\to 0+} x^{\sin x},\quad \lim_{x\to 0}(1+mx)^{1/x},\quad \lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}.$$

§ 17. Obliczanie granic ciągów

Wiemy, że jeżeli $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ i $a^n = f(n)$, to $\lim_{n\to\infty} a^n = k$. Dzięki temu twierdzenie de l'Hôpitala może często służyć do znalezienia granicy ciągu. Tą drogą możemy na przykład łatwo znaleźć granicę ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Istotnie,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/x} = \exp\lim_{x\to 0+}\tfrac{1}{1} = e.$$

Wobec tego mamy wzór

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

który w wielu podręcznikach jest podawany za definicję liczby e.

Sprowadzenie granicy ciągu do granicy funkcji nie zawsze się udaje. Na przykład trudno tą drogą obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+1/n}{\ln n}.$$

W tym i podobnych przypadkach często prowadzi do celu twierdzenie podobne do trudnego twierdzenia de l'Hôpitala.

TWIERDZENIE 17.1 (twierdzenie o ilorazie różnic). *Mamy równość*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

przy założeniu, że $b_{n+1} > b_n$, $\lim b_n = \infty$ *i że granica (właściwa lub niewłaściwa) po prawej stronie wzoru istnieje.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że granica ta jest skończona i wynosi k. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje taki wskaźnik n_0, że

$$k-\tfrac{1}{2}\varepsilon < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < k+\tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Stąd

$$(17.1)\quad (k-\tfrac{1}{2}\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < (k+\tfrac{1}{2}\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0.$$

Dodając do siebie nierówności (17.1) o wskaźnikach $n = n_0, n_0+1, \ldots, p$, otrzymujemy nierówność

$$(k-\tfrac{1}{2}\varepsilon)(b_p-b_{n0}) < a_p-a_{n0} < (k+\tfrac{1}{2}\varepsilon)(b_p-b_{n0}).$$

Dodając jeszcze liczbę a_{n0} i dzieląc otrzymane nierówności przez b_p, mamy

$$k-\tfrac{1}{2}\varepsilon+\frac{a_{n0}-(k-\frac{1}{2}\varepsilon)b_{n0}}{b_p} < \frac{a_p}{b_p} < k+\tfrac{1}{2}\varepsilon+\frac{a_{n0}-(k+\frac{1}{2}\varepsilon)b_{n0}}{b_p}.$$

Istnieje taka liczba p_0, że dla $p > p_0$ ostatni wyraz po lewej stronie tych nierówności i ostatni wyraz po prawej stronie są mniejsze od $\frac{1}{2}\varepsilon$. Wobec tego

$$k-\varepsilon < \frac{a_p}{b_p} < k+\varepsilon \quad \text{dla} \quad p > p_0,$$

co dowodzi twierdzenia w przypadku granicy skończonej k.

Gdy $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \infty$, to wobec $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ jest też $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ i $a_{n+1} > a_n$ dla $n \geqslant n_0$. Wobec tego na podstawie udowodnionego już przypadku jest

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = 0$$

i w konsekwencji $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Gdy wreszcie $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{-a_n}{b_n} = -\infty$. Twierdzenie jest więc dowiedzione w zupełności.

PRZYKŁAD 1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+1/n}{\ln n}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/(n+1)}{\ln(n+1)-\ln n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n\ln(1+1/n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+1/n)^n}=$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

PRZYKŁAD 2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\exp\frac{\ln n!-n\ln n}{n}=$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln(n+1)!-(n+1)\ln(n+1))-(\ln n!-n\ln n)}{1}=$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\left(-n\ln\frac{n+1}{n}\right)=\exp\lim_{n\to\infty}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\exp(-\ln e)=$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

PRZYKŁAD 3. Gdy $\alpha>-1$, to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}}.$$

Pierwsza granica w ostatnim iloczynie jest równa 1, druga zaś jest równa granicy funkcji

$$\lim_{x\to0+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{\alpha+1}-\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{(1+x)^{\alpha+1}-1}=$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1}{(\alpha+1)(1+x)^\alpha}=\frac{1}{\alpha+1}.$$

Ostatecznie więc mamy wzór

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\ldots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha+1}\qquad(\alpha>-1).$$

Ćwiczenia. Obliczyć granice:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln1+\ln2+\ldots+\ln n}{n\ln n},\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots2n}}{n}.$$

§ 18. Badanie zbieżności szeregów

W § 10 rozdziału III podaliśmy twierdzenie (str. 124), które pozwala dowodzić zbieżności danego szeregu przez porównanie go z innym szeregiem, o którym wiemy, że jest zbieżny. W praktyce najwygodniej jest zaczynać badanie zbieżności szeregu, stosując następujące proste twierdzenie:

TWIERDZENIE 18.1 (kryterium d'Alemberta). *Szereg*

(18.1) $$a_1+a_2+a_3+\ldots$$

jest zbieżny, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$, *a rozbieżny, jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$.

Dowód. Niech $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=k$. Gdy $k<1$, to istnieje taka liczba q i taki wskaźnik n_0, że

$$k<q<1\quad\text{i}\quad\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<q\quad\text{dla } n\geqslant n_0.$$

Mamy więc nierówności

$$|a_{n_0+1}|<|a_{n_0}|q,$$

$$|a_{n_0+2}|<|a_{n_0+1}|q<|a_{n_0}|q^2$$

i ogólnie przez indukcję

$$|a_{n_0+n}|<|a_{n_0}|q^n.$$

Stąd widać, że moduły wyrazów szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0+n}$ są mniejsze od wyrazów szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q^n$. Zatem szereg ten jest zbieżny, a wraz z nim szereg (18.1).

Gdy $k > 1$, to istnieje taki wskaźnik n_0, że

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \quad \text{dla} \quad n \geqslant n_0;$$

przez indukcję mamy nierówności

$$|a_{n_0+n}| > |a_{n_0}| > 0;$$

wobec tego ciąg a_n nie dąży do zera i szereg (19.1) nie może być zbieżny (na podstawie twierdzenia 8.1 z rozdziału III, str. 122).

PRZYKŁAD 1. Dla $a_n = \frac{n!}{n^n}$ jest $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{(1+1/n)^n}$, wobec czego $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$. Stąd wynika, że szereg

$$\frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots$$

jest zbieżny.

PRZYKŁAD 2. Dla $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ jest $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{(1+1/n)^n}$ i wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{e} > 1.$$

To dowodzi, że szereg

$$\frac{3^1 \cdot 1!}{1^1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots$$

jest rozbieżny.

PRZYKŁAD 3. Dla $a_n = \frac{1}{n^2}$ jest $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$.

Wobec tego dla szeregu

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

kryterium d'Alemberta nie daje żadnej informacji o zbieżności lub rozbieżności.

Ćwiczenia. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n n!}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

§ 19. Porównywanie zbieżności szeregów i całek niewłaściwych

Znaczenie kryterium d'Alemberta polega na tym, że jest ono bardzo proste i wygodne. Nie zawsze jednak daje ono odpowiedź, jak to widać z ostatniego przykładu w poprzednim paragrafie. Kryterium to zawodzi również, gdy granica ciągu $|a_{n+1}/a_n|$ nie istnieje. W takich przypadkach próbujemy rozstrzygnąć kwestię zbieżności za pomocą twierdzenia o porównywaniu (tw. 10.1, rozdział III, str. 124), które jest ogólniejsze. Do tego celu są potrzebne pewne szeregi wzorcowe, z którymi moglibyśmy porównywać szeregi badane. Dotychczas wystarczył nam jeden szereg wzorcowy: geometryczny. Aby znaleźć nowe szeregi wzorcowe, udowodnimy najpierw następujące twierdzenie ważne w zastosowaniach.

TWIERDZENIE 19.1. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest dodatnia i nierosnąca*(1) *dla $x \geqslant 1$, to całka i szereg*

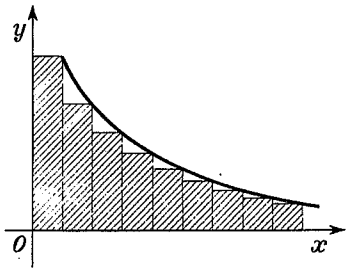
$$\int_1^{\infty} f(x)dx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne (to znaczy, gdy całka jest zbieżna, to szereg jest zbieżny, a gdy całka jest rozbieżna, to szereg jest rozbieżny).

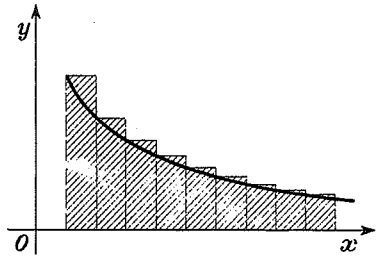
---

(1) Funkcja monotoniczna jest całkowalna w każdym przedziale $[a, b]$. (Przyp. red.).

Geometryczny sens tego twierdzenia wyjaśniają rysunki 82 i 83. Pole zakreskowane odpowiada sumie szeregu, pole zaś zawarte między linią krzywą a osią x odpowiada wartości całki niewłaściwej.



Rys. 82



Rys. 83

Dowód. Wobec medialności całki mamy

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant f(n),$$

a zatem

$$\sum_{n=1}^{m} f(n+1) \leqslant \int_1^{m+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{m} f(n).$$

Z lewej nierówności wynika, że jeżeli całka jest zbieżna, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ i tym samym szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny; z prawej zaś nierówności wynika, że jeżeli szereg jest zbieżny, to i całka jest zbieżna (bo funkcja $F(t) = \int_1^t f(x)dx$ jest rosnąca i ograniczona przez $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$). Wobec tego twierdzenie jest udowodnione.

Z twierdzenia tego wynika na przykład, że szereg

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots \tag{19..1}$$

jest zbieżny dla $\alpha > 1$, a rozbieżny dla $0 < \alpha \leqslant 1$, ponieważ całka $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

jest zbieżna dla $\alpha > 1$, a rozbieżna dla $0 < \alpha \leqslant 1$. W szczególności więc szereg

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

(zwany *szeregiem harmonicznym*) jest rozbieżny, natomiast szereg

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$$

jest zbieżny.

Przez porównanie z szeregiem (19.1) można udowodnić zbieżność lub rozbieżność wielu szeregów, dla których porównanie z szeregiem geometrycznym zawodzi.

PRZYKŁAD 1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ jest zbieżny, ponieważ jego wyrazy są mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

PRZYKŁAD 2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ jest rozbieżny, ponieważ jego wyrazy są większe od odpowiednich wyrazów szeregu rozbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$.

Porównanie z szeregiem (19.1) stanowi metodę subtelniejszą niż porównanie z szeregiem geometrycznym. W pewnych przypadkach (choć w praktyce zdarza się to rzadko) może być nie wystarczające. Wtedy do celu może prowadzić porównanie z szeregiem

$$\frac{1}{2(\ln 2)^\alpha}+\frac{1}{3(\ln 3)^\alpha}+\frac{1}{4(\ln 4)^\alpha}+\dots, \tag{19.2}$$

stanowiące metodę jeszcze subtelniejszą. Szereg (19.2) jest zbieżny dla $\alpha > 1$, a rozbieżny dla $0 < \alpha \leqslant 1$. Istotnie, szereg ten jest zbieżny lub rozbieżny jednocześnie z całką

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}, \tag{19.3}$$

którą możemy obliczyć przez podstawienie $x = e^t$. Ponieważ dla $\alpha \neq 1$ jest

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \int \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

więc

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty} \left((\ln b)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right).$$

Granica po prawej stronie równości istnieje, gdy $\alpha > 1$, nie istnieje zaś, gdy $\alpha < 1$. Pozostaje jeszcze przypadek $\alpha = 1$. Wtedy

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln\ln x$$

i

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} (\ln\ln b - \ln\ln 2) = \infty.$$

Wobec tego całka (19.3), a wraz z nią szereg (19.2) jest zbieżny dla $\alpha > 1$, a rozbieżny dla $0 < \alpha \leqslant 1$.

Ćwiczenia. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+n^3}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \quad \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(1+\frac{1}{2}+\ldots+1/n)n\ln n}.$$

§ 20. Przykłady szeregów trygonometrycznych

W §§ 18 i 19 mówiliśmy o badaniu zbieżności szeregów. Skoro uda nam się udowodnić, że jakiś szereg jest zbieżny, to wcale jeszcze nie wiemy, jaka jest jego suma. Przybliżoną wartość sumy można nieraz znaleźć, biorąc pewną liczbę początkowych wyrazów szeregu. Sposób ten byłby dość żmudny przy obliczaniu np. sumy szeregu

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots;$$

a już w żadnym razie nie znaleźlibyśmy tą drogą interesującego związku, jaki zachodzi między tym szeregiem a liczbą π:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Udowodnienie tej równości jest o wiele trudniejsze niż udowodnienie zbieżności rozważanego szeregu. Najprościej można to zrobić za pomocą szeregów trygonometrycznych.

Szeregiem trygonometrycznym nazywamy szereg postaci

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Istnieją ogólne warunki pozwalające stwierdzić w wielu przypadkach, czy dana funkcja daje się przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego. Znane też są od dawna wzory na współczynniki tego szeregu. Tutaj nie będziemy omawiali teorii ogólnej, natomiast ograniczymy się do rozpatrzenia pewnych prostych przypadków.

Udowodnimy najpierw, że

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi \tag{20.1}$$

i że zbieżność tego szeregu jest jednostajna w każdym przedziale domkniętym $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ zawartym w $(0, 2\pi)$.

Na podstawie równości

$$2\cos kx\sin\tfrac{1}{2}x = -\sin(k-\tfrac{1}{2})x + \sin(k+\tfrac{1}{2})x$$

mamy

$$2(\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos kx)\sin\tfrac{1}{2}x = (-\sin\tfrac{1}{2}x+\sin\tfrac{3}{2}x)+$$
$$+(-\sin\tfrac{3}{2}x+\sin\tfrac{5}{2}x)+\ldots+(-\sin(k-\tfrac{1}{2})x+\sin(k+\tfrac{1}{2})x) =$$
$$= -\sin\tfrac{1}{2}x+\sin(k+\tfrac{1}{2})x,$$

a stąd

$$\sum_{n=1}^k \cos nx = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Całkując ostatnią równość w granicach od π do x, mamy

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} + I_k(x) \qquad (0 < x < 2\pi),$$

gdzie

$$I_k(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Całkowanie przez części daje nam równość

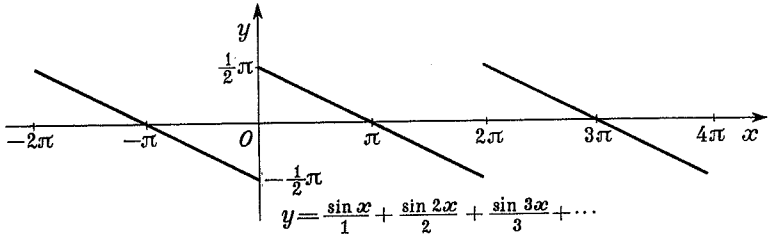
$$I_k(x) = -\frac{1}{2k+1}\left(\frac{\cos(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{x} \frac{\cos\frac{1}{2}t\cos(k+\frac{1}{2})t}{(\sin\frac{1}{2}t)^2}\,dt\right),$$

z której wynika

$$|I_k(x)| < \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon} + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{dt}{(\sin\frac{1}{2}t)^2}\right).$$

Nierówność ta dowodzi, że ciąg $I_k(x)$ dąży przy $k \to \infty$ do zera jednostajnie w przedziale $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, skąd wynika też zbieżność jednostajna szeregu (20.1) w tym przedziale.

Dla $x = 0$ szereg (20.1) jest, jak od razu widać, również zbieżny, lecz już nie do $(\pi - x)/2$, lecz do zera. Ponadto z periodyczności $\sin nx$ widać, że szereg (20.1) jest zbieżny dla każdego x do funkcji przedstawionej na rysunku 84.



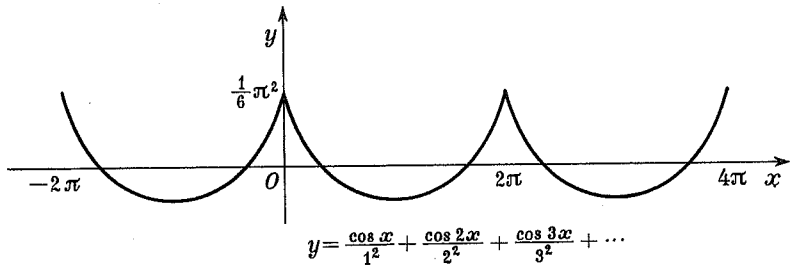
Rys. 84

Szereg (20.1) jest pochodną szeregu

$$H(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \tag{20.2}$$

(rys. 85), który jest zbieżny jednostajnie w przedziale nieskończonym $(-\infty, \infty)$. Stąd wynika, że

$$H(x) = -\frac{(\pi - x)^2}{4} + C \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi, \tag{20.3}$$



Rys. 85

gdzie C jest pewną stałą. Stałą tę możemy wyznaczyć podstawiając w (20.3) $x = \pi$, co wobec (20.2) daje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = C$.

Wobec tego mamy równość

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = -\frac{(\pi - x)^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi,$$

czyli po zmianie znaków

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots = \tag{20.4}$$

$$= \frac{(\pi - x)^2}{4} - \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots\right) \quad \text{dla} \quad 0 < x < 2\pi.$$

Ale szereg po lewej stronie, jako zbieżny jednostajnie, przedstawia

funkcję ciągłą dla wszelkich x, wobec tego równość (20.4) zachodzi także dla $x = 0$:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{4}-\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots\right). \tag{20.5}$$

Stąd znajdujemy z łatwością

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Równość tę znalazł Euler. Korzystając z niej, możemy napisać

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right),$$

skąd już łatwo wyliczyć, że

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots = \frac{\pi}{6}. \tag{20.6}$$

Równość tę również podał Euler.
Z równości (20.6) i (20.5) wynika też równość

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots = \frac{\pi^2}{12},$$

która podstawiona do (20.4) prowadzi do wzoru

$$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots = \frac{(\pi-x)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}. \tag{20.7}$$

Ćwiczenia. 1. Na podstawie wzoru (20.1) wyprowadzić wzory

$$\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots = \frac{x}{2} \quad \text{dla} \quad -\pi < x < \pi,$$

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots = \begin{cases} -\frac{1}{4}\pi & \text{dla} \quad -\pi < x < 0, \\ \frac{1}{4}\pi & \text{dla} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

2. Na podstawie (20.7) udowodnić wzór

$$\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\ldots = \frac{x(\pi-x)(2\pi-x)}{12} \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

3. Udowodnić wzór

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots = \frac{\pi^3}{32}.$$

§ 21. Twierdzenie Abela

Może się zdarzyć, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny. Wtedy szereg nazywamy *warunkowo zbieżnym*. Jest oczywiste, że zbieżność szeregów warunkowo zbieżnych nie da się nigdy udowodnić przez kryterium o porównywaniu szeregów. Często natomiast w tych przypadkach jest pożyteczne kryterium Leibniza (§ 45, rozdz. III, str. 190), które mówi, że jeżeli ciąg a_n jest malejący i zbieżny do zera, to szereg $a_1-a_2+a_3-\ldots$ jest zbieżny. Wynika stąd, że na przykład szeregi

$$\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots \quad \text{i} \quad \tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\ldots \tag{21.1}$$

są zbieżne. Kryterium Leibniza nie daje jednak żadnej informacji jakie są sumy tych szeregów. Obliczenie tych sum jest trudniejsze niż udowodnienie zbieżności. Można to zrobić w oparciu o następujące

TWIERDZENIE 21.1 (Abela). *Jeżeli szereg* $a_0+a_1+a_2+\ldots$ *jest zbieżny, to funkcja* $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ *jest ciągła lewostronnie w punkcie* $x = 1$.

Dowód. Ciąg $s_n = a_0+a_1+\ldots+a_n$ jako zbieżny jest ograniczony. Stąd wynika, że szereg $s_0+s_1x+s_2x^2+\ldots$ jest zbieżny dla $|x| < 1$ i

$$(1-x)(s_0+s_1x+s_2x^2+\ldots) = (s_0+s_1x+s_2x^2+\ldots)-$$

$$-(s_0x+s_1x^2+s_2x^3+\ldots) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

Wobec tego

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_nx^n. \tag{21.2}$$

Niech $s=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Ponieważ $1/(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, więc

$$s=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} sx^n. \tag{32.3}$$

Z (21.2) i (21.3) wynika

$$f(x)-s=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n-s)x^n. \tag{21.4}$$

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} s_n=s$, więc istnieje taki wskaźnik m, że $|s_n-s|<\frac{1}{2}\varepsilon$ dla $n>m$. Równość (21.4) możemy napisać w postaci

$$f(x)-s=(1-x)\sum_{n=0}^{m}(s_n-s)x^n+(1-x)\sum_{n=m+1}^{\infty}(s_n-s)x^n.$$

Gdy $p=\sum_{n=0}^{m}|s_n-s|$ i $0<x<1$, to

$$|f(x)-s|\leqslant(1-x)p+(1-x)\sum_{n=m+1}^{\infty}\tfrac{1}{2}\varepsilon x^n<(1-x)p+\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Istnieje taka liczba $\delta>0$, że $(1-x)p<\frac{1}{2}\varepsilon$ dla $1-\delta<x<1$. Wobec tego

$$|f(x)-s|<\varepsilon \quad \text{dla} \quad 1-\delta<x<1,$$

co dowodzi, że $\lim_{x\to 1-} f(x)=s$.

W § 30 rozdziału III (str. 159) wyprowadziliśmy wzór

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad \text{dla} \quad -1<x<1. \tag{21.5}$$

Na podstawie twierdzenia Abela wzór ten musi zachodzić także dla $x=1$, ponieważ funkcja $\ln(1+x)$ jest ciągła w punkcie $x=1$. Zatem

$$\ln 2=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Tak samo z równości

$$\operatorname{arctg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

wynika na podstawie twierdzenia Abela

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Szeregi te, znane już Leibnizowi, mają bardzo elegancką formę, jednakże zupełnie nie nadają się do przybliżonego obliczania wartości $\ln 2$ lub π. Chcąc na przykład znaleźć tą drogą 5 miejsc dziesiętnych liczby π musielibyśmy wziąć przeszło 100 000 wyrazów szeregu, obliczyć je z przybliżeniem co najmniej 10 znaków po przecinku, a następnie wszystko zsumować (z odpowiednim znakiem).

Ćwiczenie. Udowodnić wzór

$$\frac{1}{2\cdot 1!}-\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}+\ldots=\sqrt{2}-1.$$

(Wskazówka. Skorzystać z rozwinięcia funkcji $\sqrt{1+x}$ w szereg potęgowy).

§ 22. Stała Eulera

Szereg $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ nazywa się *szeregiem harmonicznym*. W § 19 udowodniliśmy, że ten szereg jest rozbieżny. Znaczy to, że ciąg jego sum częściowych

$$\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n}$$

dąży do nieskończoności. Natomiast można udowodnić, że ciąg

$$c_n=\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$$

jest zbieżny. Jego granicę oznaczamy przez γ i nazywamy *stałą Eulera*. Obok liczb e i π jest to jedna z najważniejszych stałych w analizie matematycznej.

Aby obliczyć przybliżoną wartość γ (i zarazem udowodnić zbieżność ciągu c_n), bierzemy pod uwagę ciąg

$$\gamma_n = c_n + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2}$$

i dobieramy stałe α i β tak, żeby otrzymać ciąg szybko zbieżny; wybór stałych α i β nie ma oczywiście żadnego wpływu na zbieżność ciągu i na wartość jego granicy. Jeżeli udowodnimy, że ciąg γ_n jest zbieżny, to tym samym udowodnimy, że ciąg c_n jest zbieżny i ma tę samą granicę.

Przekształcamy różnicę

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} + \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha+1}{n+1} + \frac{\beta}{n^2} - \frac{\beta}{(n+1)^2} =$$

$$= \int_n^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha+1}{(x+1)^2} + \frac{2\beta}{x^3} - \frac{2\beta}{(x+1)^3}\right) dx =$$

$$= \int_n^\infty \frac{(2\alpha+1)x^3 + (3\alpha+6\beta+1)x^2 + (\alpha+6\beta)x + 2\beta}{x^3(x+1)^3} dx;$$

wyrażenie to szczególnie korzystnie się uprości, jeżeli przyjmiemy $\alpha = -\frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{1}{12}$:

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \frac{1}{6}\int_n^\infty \frac{dx}{x^3(x+1)^3}. \tag{22.1}$$

Ponieważ

$$\frac{1}{x^3(x+1)^3} = \frac{x^2(x+1)^2}{x^5(x+1)^5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5x^4+10x^3+5x^2}{x^5(x+1)^5} <$$

$$< \frac{1}{5}\cdot\frac{(x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1)-x^5}{x^5(x+1)^5} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{(x+1)^5-x^5}{x^5(x+1)^5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5}\right),$$

więc

$$\frac{1}{6}\int_n^\infty \frac{dx}{x^3(x+1)^3} < \frac{1}{30}\int_n^\infty \left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{(x+1)^5}\right) dx = \frac{1}{30}\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^5}$$

i wobec (22.1)

$$0 < \gamma_n - \gamma_{n+1} < \frac{1}{30}\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^5}.$$

Stąd widać, że szereg

$$(\gamma_n - \gamma_{n+1}) + (\gamma_{n+1} - \gamma_{n+2}) + \dots \tag{22.2}$$

jest zbieżny, bo jego wyrazy są dodatnie i mniejsze od wyrazów szeregu zbieżnego

$$\sum_{m=n}^\infty \frac{1}{30}\int_m^{m+1} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{30}\int_n^\infty \frac{dx}{x^5}.$$

Suma częściowa szeregu (22.2) ma postać $s_m = (\gamma_n - \gamma_{n+1}) + \dots + (\gamma_{n+m-1} - \gamma_{n+m}) = \gamma_n - \gamma_{n+m}$; stąd wynika istnienie granicy $\gamma = \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_{n+m} = \gamma_n - \lim\limits_{m\to\infty} s_m$. Ponieważ

$$0 < \gamma_n - \gamma_{n+m} < \frac{1}{30}\int_n^{n+m} \frac{dx}{x^5},$$

więc przy $m \to \infty$, otrzymujemy

$$0 < \gamma_n - \gamma \leqslant \frac{1}{30}\int_n^\infty \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{120n^4}.$$

W ten sposób udowodniliśmy, że biorąc za γ wyrażenie

$$\gamma_n = \left(\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \ln n \tag{22.3}$$

popełnimy błąd z nadmiarem, nie przekraczający liczby $1/120n^4$. Gdy przyjmiemy na przykład $n = 10$, popełnimy błąd nie większy niż 1/1200 000.

W poniższym rachunku wszystkie liczby przybliżone zostały wzięte z niedomiarem.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}=\frac{21}{8}$$

$$\begin{aligned} 21/8 &\approx 2{,}625 \\ 1/7 &\approx 0{,}142\,857 \\ 1/9 &\approx 0{,}111\,111 \\ 1/1200 &\approx 0{,}000\,833 \\ \hline & 2{,}879\,801 \\ -\ln 10 &\approx -2{,}302\,585 \\ \hline & 0{,}577\,216 \end{aligned}$$

Biorąc więc pod uwagę nierówność $\frac{1}{1\,200\,000} < \frac{1}{10^6}$, widzimy, że

$$0{,}577\,216-\frac{2}{10^6}<\gamma<0{,}577\,216+\frac{3}{10^6}.$$

Stąd wynika, że nasz rachunek dał 5 miejsc dziesiętnych pewnych.

Dokładniejsza wartość wynosi

$$\gamma \approx 0{,}577\,215\,664\,9.$$

Mimo dość prostych ostatecznych rachunków liczbowych, metoda obliczania przybliżonej wartości jest — jak widać — trudniejsza dla stałej γ niż dla stałych e i π. Również inne badania dotyczące stałej γ są trudniejsze. Na przykład można się spodziewać, że jest ona — podobnie jak e i π — liczbą niewymierną (to znaczy nie jest ilorazem m/n liczb całkowitych m i n), dotąd jednak nikomu nie udało się tego udowodnić.

Ćwiczenia. 1. Jaką liczbę należy przyjąć za n, żeby ze wzoru (22.3) znaleźć 10 miejsc dziesiętnych liczby γ? Sprawdzić odpowiedź przez porównanie z podaną wyżej wartością przybliżoną.

2. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\ln\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}\gamma-\ln 2.$$

LITERATURA ZALECANA

S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I i II, Warszawa 1957.
A. Birkholc, *Analiza matematyczna dla nauczycieli*, Warszawa 1980.
K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1979.
F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1979.
W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Warszawa 1982.

ZBIORY ZADAŃ

K. Borsuk, *Ćwiczenia z analizy matematycznej*, Warszawa 1951 (rozdz. I–III, V, VII–XIV i część rozdz. XVII) (z odpowiedziami).
W. Krysicki i L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I i II, Warszawa 1983.
W. Nikliborc i H. Steinhaus, *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego* (z pełnymi rozwiązaniami), Warszawa 1930.

SKOROWIDZ

Abela twierdzenie 253
addytywność pola 211
d'Alemberta kryterium 243
algebra symboli $o(1)$ i $O(1)$ 62
Archimedesa zasada 47

Całka nieoznaczona 202
– niewłaściwa 226
– oznaczona 215
– rozbieżna 226
całkowanie przez części 206
– – podstawienie 205
– – przekształcenie 208
ciąg funkcyjny 130
– – zbieżny jednostajnie 131
– geometryczny 118
– malejący 118
– monotoniczny 117
– niemalejący 117
– nierosnący 117
– nieskończony 111
– ograniczony 115
– rosnący 118
– wybrany 118
– zbieżny 116
cyfry 25

Dedekinda zasada 44
definicja indukcyjna (rekurencyjna) 74
– rekurencyjna (indukcyjna) 74
długość łuku krzywej 222
– – –, addytywność 222
– – –, medialność 223
dodatność 36
dodawanie 9
–, własności 10
dwumian Newtona 194
dzielenie 17

Ekstremum 82
element (wyraz) ciągu 111
Eulera stała 255

Funkcja 48
– arcus cosinus 196
– – sinus 196
– – tanges 184
– – –, pochodna 186
– całkowalna 215
– całości $[x]$ 49
– ciągła w przedziale domkniętym 76
– – – – otwartym 76
– – – punkcie 72, 83
– – – – lewostronnie 71, 83
– – – – prawostronnie 71, 83
– cosinus 175
– –, własności 179
– malejąca 103
– monotoniczna 105
– niemalejąca 105
– nierosnąca 105
– nieskończenie mała 57
– ograniczona w otoczeniu punktu 59
– – – przedziale 79
– pierwotna 202
– potęgowa 162

funkcja przedziału 213
– – addytywna 213
– – medialna 213
– rosnąca 103
– różniczkowalna w punkcie 90
– różnowartościowa 154
– schodkowa 112
– sinus 175
– –, własności 179
– stała 61
– tanges 182
– wykładnicza naturalna 143
– – o podstawie a 150
– złożona 84
funkcje odwrotne 154

Granica ciągu 113, 116
– funkcji 66
– – lewostronna 65
– – prawostronna 66
– – w nieskończoności 107
– lewostronna ∞ $(-\infty)$ 229
– niewłaściwa 229
– – obustronna 229
– – w nieskończoności 230
– prawostronna ∞ $(-\infty)$ 229

de l'Hôpitala twierdzenie łatwe 231
– – trudne 233

Iloczyn 15
iloraz 17
– różnicowy 145
– różniczkowy 145

Jedynka 16

Końce przedziału 76
kres dolny 45
– górny 44
kryterium d'Alemberta 243
– Leibniza 190
kwantyfikator duży 58
– mały 58

Leibniza kryterium 190
liczba najmniejsza zbioru 43
– odwrotna 19
– π 177
– przeciwna 14
liczby całkowite 34
– dodatnie 36
– naturalne 31
– ujemne 36
– wymierne 35
logarytm dziesiętny 170
– naturalny 153
– o podstawie a 160

Łączność dodawania 10
– mnożenia 15

Maksimum 82
medialność pola 211
minimum 82
metoda całkowania przez podstawienie 205
mnożenie 9, 15
moduł (wartość bezwzględna) 52

Newtona dwumian 194
nierówności 37
nierówność słaba 40

Odejmowanie 13
odwrotność liczby 19
oś liczbowa 52

Pierwiastek n-ty 150
pochodna druga 172
– funkcji 90
– – w punkcie 90
podstawa logarytmów naturalnych 152
pole, addytywność 211
– figury 210
–, medialność 211
ponumerowanie elementów zbioru 41
potęga a^n 74
prawo łączności dodawania 10

prawo łączności mnożenia 15
prawo przemienności dodawania 10
— — mnożenia 15
— rozdzielności mnożenia względem dodawania 19
promień zbieżności 129
przedział domknięty 75
— otwarty 75
— zbieżności 129
przedziały nieskończone 76
przemienność dodawania 10
— mnożenia 15
przybliżenie dziesiętne 127
— z nadmiarem 169
— — niedomiarem 169
przyporządkowanie 48
— jednoznaczne 49
punkty wewnętrzne przedziału 76

Reguła różniczkowania iloczynu 92
— — ilorazu 94
— — różnicy 93
— — sumy 93
rozdzielność mnożenia względem dodawania 19
równanie funkcyjne cosinusa 176
— — sinusa 176
równość liczb 8
różnica 12
— zmiennej 145
różniczkowanie 90
— ciągów funkcyjnych 136
— szeregów potęgowych 139
różniczka 145
— funkcji w punkcie 146

Stała Eulera 255
— sprężyny 171
stromość drogi 87
suma szeregu 122
sumy częściowe szeregu 122
szereg geometryczny 119
— harmoniczny 247, 255
szereg potęgowy 128
— — zbieżny jednostajnie 135
— trygonometryczny 249
— zbieżny 124
— — bezwzględnie 130
— — warunkowo 253

Tabliczka dodawania 26
— mnożenia 28
twierdzenie Abela 253
— de l'Hôpitala łatwe 231
— — trudne 233
— o ciągach wybranych 118
— — działaniach arytmetycznych na ciągach 114
— — ilorazie różnic 240
— — pochodnej funkcji złożonej 143
— — porównywaniu szeregów 124
— — przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie 79
— — różniczkowaniu funkcji odwrotnej 157
— — trzech ciągach 115
— — — funkcjach 70
— — wartości średniej 101
— — zachowaniu nierówności 70, 115

Ułamek 17
ułamki proste 208

Wartość bezwzględna (moduł) 52
własności funkcji cosinus 179
— — sinus 179
wykonalność dzielenia 15
— odejmowania 10
wykres funkcji 52
wyraz (element) ciągu 111

Zasada Archimedesa 47
— ciągłości (zasada Dedekinda) 44
— Dedekinda (zasada ciągłości) 44
— indukcji matematycznej 32, 172
— minimum 47

zbieżność jednostajna 131
zbiór izomorficzny ciągów 113
—, liczba najmniejsza 43
—, — największa 42
— liczb naturalnych 31
— liczbowy ograniczony z dołu 42
— — — — góry 42
— nieskończony 42
zbiór ograniczony 42
— określoności 49
— par 49
— pusty 43
— skończony 41
— wartości 49
zero 12
zmienna 48

SPIS RZECZY

Przedmowa 5
Przedmowa do wydania drugiego 6
Rozdział I. Liczby 7
§ 1. Oznaczenia literowe 7
§ 2. Równość 8
§ 3. Dodawanie 10
§ 4. Odejmowanie 12
§ 5. Liczba przeciwna 14
§ 6. Mnożenie 15
§ 7. Dzielenie 17
§ 8. Liczba odwrotna 19
§ 9. Rozdzielność mnożenia względem dodawania 19
§ 10. Cyfry 25
§ 11. Tabliczka dodawania 26
§ 12. Tabliczka mnożenia 28
§ 13. Ogólne uwagi o pojęciu liczby 30
§ 14. Liczby naturalne 31
§ 15. Zasada indukcji matematycznej 32
§ 16. Liczby całkowite 34
§ 17. Liczby wymierne 35
§ 18. Liczby dodatnie 36
§ 19. Nierówność 37
§ 20. Słabe nierówności 40
§ 21. Zbiory skończone i zbiory ograniczone 41
§ 22. Kres górny i zasada Dedekinda 44
§ 23. Kres dolny 45
§ 24. Zasada minimum i zasada Archimedesa 46
Rozdział II. Funkcje 48
§ 1. Pojęcie funkcji 48
§ 2. Zapisywanie funkcji 50
§ 3. Geometryczna interpretacja liczb i funkcyj 51
§ 4. Moduł 52

§ 5. Funkcje nieskończenie małe 56
§ 6. Funkcje ograniczone w otoczeniu punktu 59
§ 7. Symbole $o(1)$ i $O(1)$ 60
§ 8. Algebra symboli $o(1)$ i $O(1)$ 62
§ 9. Granica funkcji 65
§ 10. Działania arytmetyczne na granicach 68
§ 11. Granice a nierówności 70
§ 12. Ciągłość funkcji 71
§ 13. Potęgi 74
§ 14. Przedziały otwarte i domknięte 75
§ 15. Funkcje ciągłe w przedziale 76
§ 16. Funkcje ograniczone 79
§ 17. Najmniejsza i największa wartość funkcji 81
§ 18. Bezpośrednia definicja ciągłości funkcji 83
§ 19. Funkcje złożone 84
§ 20. Stromość i prędkość 87
§ 21. Pochodna 90
§ 22. Różniczkowalność z ciągłość 91
§ 23. Różniczkowanie iloczynu 92
§ 24. Różniczkowanie sumy i różnicy 93
§ 25. Różniczkowanie ilorazu 94
§ 26. Najmniejsza i największa wartość funkcji (dalszy ciąg) 96
§ 27. Twierdzenie o wartości średniej 100
§ 28. Funkcje rosnące i malejące 103
§ 29. Funkcje nierosnące i niemalejące 105
§ 30. Zachowanie się funkcji w nieskończoności 106
§ 31. Granica funkcji w nieskończoności 107
§ 32. Funkcje monotoniczne i ograniczone 109
Rozdział III. Ciągi i szeregi 111
§ 1. Pojęcie ciągu 111
§ 2. Funkcje schodkowe 112
§ 3. Bezpośrednia definicja granicy ciągu 116
§ 4. Ciągi monotoniczne 117
§ 5. Ciągi wybrane 118
§ 6. Ciąg geometryczny 118
§ 7. Szereg geometryczny 119
§ 8. Ogólne pojęcie szeregu 120
§ 9. Użycie symbolu sumy 123
§ 10. Twierdzenie o porównywaniu szeregów 124
§ 11. Przybliżenia dziesiętne 126
§ 12. Szeregi potęgowe 128
§ 13. Promień zbieżności i przedział zbieżności 129
§ 14. Ciągi funkcyjne 130

§ 15. Zbieżność jednostajna . . . 131
§ 16. Symbol sumy z dowolnymi granicami sumowania . . . 133
§ 17. O zbieżności jednostajnej szeregów potęgowych . . . 135
§ 18. O różniczkowaniu ciągów funkcyjnych . . . 136
§ 19. Ciąg nq^n . . . 138
§ 20. Różniczkowanie szeregów potęgowych . . . 139
§ 21. Funkcje równe swej pochodnej . . . 140
§ 22. Pochodna funkcji złożonej . . . 143
§ 23. Ilorazy różnicowe i ilorazy różniczkowe . . . 145
§ 24. Funkcje równe swej pochodnej (dalszy ciąg) . . . 146
§ 25. Funkcja e^x i jej własności . . . 147
§ 26. Dowolne funkcje wykładnicze i ich związek z potęgami . . . 149
§ 27. Liczba e . . . 152
§ 28. Funkcje odwrotne . . . 153
§ 29. Pochodna funkcji odwrotnej . . . 157
§ 30. Logarytm naturalny . . . 158
§ 31. Logarytmy o dowolnej podstawie . . . 160
§ 32. Pochodne funkcyj potęgowych . . . 162
§ 33. Obliczanie logarytmów naturalnych liczb naturalnych . . . 165
§ 34. Obliczanie logarytmów dziesiętnych . . . 170
§ 35. Funkcje równe swej drugiej pochodnej ze znakiem przeciwnym . . . 171
§ 36. Pewna odmiana zasady indukcji matematycznej . . . 172
§ 37. Funkcje cosinus i sinus . . . 173
§ 38. Równania funkcyjne cosinusa i sinusa . . . 176
§ 39. Liczba π . . . 177
§ 40. Własności funkcyj cosinus i sinus . . . 179
§ 41. Funkcja tangens . . . 182
§ 42. Funkcja arcus tangens . . . 184
§ 43. Pochodna funkcji arcus tangens . . . 186
§ 44. Obliczanie przybliżonej wartości liczby π . . . 187
§ 45. Szeregi o zmiennych znakach . . . 189
§ 46. Dwumian Newtona . . . 191
§ 47. Dwumian Newtona dla naturalnych wykładników . . . 195
§ 48. Funkcje arcus cosinus i arcus sinus . . . 196
§ 49. Zebranie najważniejszych wzorów . . . 199
Rozdział IV. Całki i uzupełnienia z teorii granic . . . 202
§ 1. Całki nieoznaczone . . . 202
§ 2. Całkowanie sumy, różnicy i wyłączanie czynnika stałego . . . 204
§ 3. Całkowanie przez podstawienie . . . 205
§ 4. Całkowanie przez części . . . 206
§ 5. Całkowanie przez przekształcenie . . . 208
§ 6. Pole pod krzywą . . . 210
§ 7. Pojęcie całki oznaczonej . . . 213

§ 8. Związek między całką oznaczoną a całką nieoznaczoną . . . 217
§ 9. Pewne twierdzenie o całkowalności . . . 219
§ 10. Długość łuku krzywej . . . 222
§ 11. Całki niewłaściwe . . . 226
§ 12. O aproksymacji całek przez sumy skończone . . . 228
§ 13. Granice niewłaściwe . . . 229
§ 14. Łatwe twierdzenie de l'Hôspitala . . . 231
§ 15. Trudne twierdzenie de l'Hôspitala . . . 233
§ 16. Wnioski z twierdzenia de l'Hôspitala . . . 236
§ 17. Obliczanie granic ciągów . . . 240
§ 18. Badanie zbieżności szeregów . . . 243
§ 19. Porównywanie zbieżności szeregów i całek niewłaściwych . . . 245
§ 20. Przykłady szeregów trygonometrycznych . . . 248
§ 21. Twierdzenie Abela . . . 253
§ 22. Stała Eulera . . . 255
Literatura zalecana . . . 259
Skorowidz . . . 260