BIBLIOTEKA MATEMATYCZNA

TOM 75

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

HANNA MARCINKOWSKA

Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe

WARSZAWA 1993

ROZDZIAŁ I

WSTĘPNE WIADOMOŚCI Z TEORII DYSTRYBUCJI

1. Rozszerzenie operacji różniczkowania

Zajmiemy się takim uogólnieniem operacji różniczkowania, by można ją było stosować do funkcji nie mających pochodnej w zwykłym sensie. Wykażemy na przykładach, że potrzeba takiego uogólnienia istnieje przy rozważaniu prostych zagadnień fizycznych prowadzących do równań różniczkowych z warunkami brzegowymi.

1.1. Wyznaczanie drgań struny metodą Fouriera. Rozważmy następujące zagadnienie: wyznaczyć drgania swobodne (tzn. bez udziału sił zewnętrznych) struny sprężystej zamocowanej na końcach, którą w chwili początkowej wychylono z położenia równowagi, nadając jej jednocześnie pewną prędkość. Umówmy się, że w położeniu równowagi struna wypełnia odcinek $[0, a]$ osi x-ów i oznaczmy przez $u(x,t)$ wychylenie punktu x struny w chwili t. Przy założeniu, że wychylenie to jest małe oraz że struna zrobiona jest z materiału o stałej gęstości ϱ, dowodzi się ([31], rozdz. II, § 1), że funkcja u spełnia liniowe równanie różniczkowe

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 \qquad (0 < x < a, t > 0), \tag{1.1}$$

gdzie $c^2 = \varrho T^{-1}$, a T oznacza wielkość naprężenia początkowego struny.

Zależność (1.1) jest nazywana *równaniem struny drgającej*, które jest szczególnym przypadkiem *równania falowego*

$$\Delta_x u - \frac{1}{c^2}u_{tt} = f \qquad (x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}), \tag{1.2}$$

gdzie $\Delta_x u = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}$ oznacza laplasjan funkcji u względem zmiennej przestrzennej $x \in \mathbf{R}^n$ (równanie różniczkowe $\Delta w = 0$, gdzie $\Delta w = \sum_{j=1}^{n} w_{x_j x_j}$, nazywamy *równaniem Laplace'a*, wyrażenie Δw nosi nazwę *laplasjanu*, a operator różniczkowy Δ jest *operatorem Laplace'a*).

Operator różniczkowy, występujący po lewej stronie równania (1.2) nosi nazwę *operatora d'Alemberta* i jest oznaczany symbolem $\Box_n$ lub $\Box$, gdy nie ma potrzeby podkreślania wymiaru przestrzeni. Wyrażenie $\Box_n u$ nazywamy *dalembertianem* funkcji u.

Z danych zadania wynika warunek brzegowy

$$u(0,t) = u(a,t) = 0 \tag{1.3}$$

oraz warunki początkowe

$$u(x,0) = g(x), \qquad u_t(x,0) = h(x), \tag{1.4}$$

gdzie g i h są danymi funkcjami.

Zagadnienie (1.1), (1.3), (1.4) jest przykładem *zagadnienia mieszanego* (inna nazwa: *zagadnienie brzegowo-początkowe*). Do rozwiązania tego zagadnienia zastosujemy metodę pochodzącą od matematyka francuskiego J. Fouriera. Zaczniemy od znalezienia rozwiązań równania (1.1) pewnej specjalnej postaci, a mianowicie

$$u(x,t) = v(x)z(t). \tag{1.5}$$

Równanie (1.1) przyjmuje wówczas równoważną postać

$$\frac{v''}{v} = \frac{z''}{c^2 z}, \tag{1.6}$$

skąd wynika, że obie strony muszą być równe stałej, którą oznaczymy przez λ. Dla funkcji v otrzymujemy w ten sposób równanie różniczkowe zwyczajne (zawierające parametr)

$$v'' = \lambda v \tag{1.7}$$

oraz wynikający z (1.3) warunek brzegowy

$$v(0) = v(a) = 0. \tag{1.8}$$

Jedno z rozwiązań zagadnienia brzegowego (1.7), (1.8) możemy podać natychmiast: jest to funkcja $v = 0$. Rozwiązanie to jest jednak nieprzydatne, gdyż prowadzi do funkcji $u = 0$, która na ogół nie spełnia warunków początkowych (1.4). Wobec tego zajmiemy się wyznaczeniem rozwiązań nietrywialnych, tj. nie znikających tożsamościowo. Rozwiązania te nazywamy *funkcjami własnymi* zagadnienia (1.7), (1.8), a wartości parametru λ, dla których rozwiązanie istnieje, *wartościami własnymi*.

Z teorii liniowych równań różniczkowych zwyczajnych (por. [28], rozdz. VI, § 1) wiadomo, że wystarczy szukać rozwiązań równania (1.7) w postaci $v(x) = e^{\alpha x}$, gdzie liczba α jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego $\alpha^2 = \lambda$.

Po uwzględnieniu warunku brzegowego (1.8) łatwo sprawdzić, że wartościami własnymi są liczby $\lambda_k = -k^2\pi^2/a^2$ ($k = 1, 2, \ldots$) oraz że każdej wartości własnej

odpowiada jedyna (z dokładnością do stałego czynnika) funkcja własna $v_k(x) =$ $\sin(k\pi x/a)$. Przyjmując $\lambda = \lambda_k$ otrzymujemy dla funkcji z równanie różniczkow $z'' = c^2\lambda_k z$, którego całka ogólna ma postać

$$z_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi c}{a}t + B_k \sin\frac{k\pi c}{a}t. \tag{1.9}$$

Wracając do (1.5) widzimy, że otrzymaliśmy nieskończony ciąg rozwiązań równania cząstkowego (1.1),

$$u_k(x,t) = v_k(x)z_k(t), \tag{1.10}$$

spełniających warunek brzegowy (1.3), z których każde zależy od dwóch stałych całkowania A_k i B_k.

Rozwiązanie zagadnienia mieszanego sprowadza się teraz do wyznaczenia tych stałych. Zauważmy, że nie wykorzystaliśmy jeszcze warunków początkowych (1.4). Stosując je do funkcji u_k dostajemy:

$$A_k \sin\frac{k\pi}{a}x = g(x), \qquad \frac{k\pi c}{a}B_k \sin\frac{k\pi}{a}x = h(x),$$

co narzuca specjalną postać funkcji g i h. Aby rozwiązać zagadnienie dla dostatecznie obszernej klasy warunków początkowych, musimy wobec tego postąpić inaczej. Wykorzystując liniowość równania i warunku brzegowego, będziemy szukali rozwiązania u w postaci szeregu nieskończonego

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t). \tag{1.11}$$

Jeżeli szereg ten jest zbieżny dla $0 \leqslant x \leqslant a$, $t \geqslant 0$ i można go dwukrotnie różniczkować wyraz za wyrazem, to (1.11) określa rozwiązanie równania (1.1) spełniające warunki (1.3). Wykorzystując warunki początkowe (1.4), dostajemy

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{a}x, \qquad h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi c}{a}B_k \sin\frac{k\pi}{a}x. \tag{1.12}$$

Aby wyznaczyć stałe całkowania A_k i B_k, wystarczy teraz rozwinąć funkcje początkowe w szereg trygonometryczny w przedziale $[0, a]$ i przyrównać współczynniki.

PRZYKŁAD 1.1. Przyjmijmy, że $a = c = 1$ i niech $g(x) = x(1-x)$, $h(x) = 0$. Współczynniki rozwinięcia funkcji g wyrażają się wzorami

$$a_k = 2\int_0^1 x(1-x)\sin k\pi x\,dx,$$

co po obliczeniu całki daje

$$a_k = \frac{4}{k^3\pi^3}(1 - \cos k\pi),$$

czyli

$$a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = \frac{8}{(2n+1)^3\pi^3} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ponieważ współczynniki rozwinięcia funkcji h znikają, ze związków (1.12) dostajemy $A_k = a_k$, $B_k = 0$ i zgodnie z wzorem (1.11) szukane wychylenie struny ma następującą postać:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)\pi x\cos(2n+1)\pi t\,. \tag{1.13}$$

Zbadajmy, czy otrzymana funkcja jest rozwiązaniem zagadnienia mieszanego. Z nierówności $|u_{2n+1}(x,t)| \leqslant 1/(2n+1)^3$ wynika natychmiast jednostajna zbieżność szeregu. Funkcja u jest więc ciągła w prostokącie $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t \geqslant 0$. Warunki brzegowe i pierwszy z warunków początkowych sprawdzamy przez zwykłe podstawienie odpowiednich wartości na x i t. Oszacowanie

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}u_{2n+1}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{(2n+1)^2}$$

zapewnia jednostajną zbieżność szeregu formalnie zróżniczkowanego względem t. Wobec tego pochodną u_t możemy obliczyć różniczkując kolejno wyrazy szeregu. Podstawiając $t = 0$ stwierdzamy natychmiast, że spełniony jest również drugi warunek początkowy.

Aby sprawdzić, czy funkcja u określona wzorem (1.13) spełnia równanie (1.1), zbadamy najpierw, stosując kryterium Dirichleta, jednostajną zbieżność szeregu powstałego przez dwukrotne zróżniczkowanie. Mamy

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{2n+1}(x,t) = \frac{-8}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi x\cos(2n+1)\pi t\,,$$

a więc (po prostym przekształceniu trygonometrycznym)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{2n+1}(x,t) = a_n v_n(x,t), \quad \text{gdzie } a_n = \frac{-4}{(2n+1)\pi}\,,$$

oraz

$$v_n(x,t) = \sin(2n+1)\pi(x+t) + \sin(2n+1)\pi(x-t).$$

Ciąg $\{a_n\}$ dąży monotonicznie do zera. Oznaczmy:

$$S_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} v_n(x,t).$$

Przyjmując, że $y = \pi(x \pm t)$ w tożsamości trygonometrycznej

$$2\sum_{n=0}^{N}\sin(2n+1)y = \frac{1 - \cos 2(N+1)y}{\sin y}\,,$$

widzimy, że ciąg S_N jest ograniczony w każdym zbiorze

$$\Omega_{r,s,\varepsilon} = \{(x,t): r+\varepsilon \leqslant x+t \leqslant r+1-\varepsilon,\ s+\varepsilon \leqslant x-t \leqslant s+1-\varepsilon\}$$

(r, s całkowite, $\varepsilon > 0$), co zapewnia jednostajną w $\Omega_{r,s,\varepsilon}$ zbieżność szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{2n+1}(x,t)\,.$$

Podobne rozumowanie można zastosować do szeregu otrzymanego przez dwukrotne różniczkowanie względem x. Zatem szereg (1.13) może być dwukrotnie różniczkowany w każdym prostokącie

$$D_{r,s} = \{(x,t): r < x+t < r+1,\ s < x-t < s+1\}$$

i jego suma spełnia w tym prostokącie równanie (1.1). Zauważmy, że przeprowadzone rozumowanie nie pozwala stwierdzić, czy suma szeregu (1.13) ma pochodne i czy spełnia równanie na brzegu zbioru $D_{r,s}$.

PRZYKŁAD 1.2. Niech

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant d, \\ \dfrac{d(1-x)}{1-d} & \text{dla } d < x \leqslant 1 \end{cases}$$

(pozostałe dane jak w przykładzie 1.1).

Stosując metodę Fouriera otrzymujemy wychylenie struny w postaci szeregu:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi^2(1-d)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin k\pi d\sin k\pi x\cos k\pi t\,. \tag{1.14}$$

Ponieważ $|u_k(x,t)| < \mathrm{const}/k^2$, szereg ten jest jednostajnie zbieżny, przedstawia więc funkcję ciągłą. Po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem x lub t dostajemy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\pi d\sin k\pi x\sin k\pi t\,,$$

rozbieżny wszędzie z wyjątkiem punktów o jednej ze współrzędnych całkowitej. Zastosowanie formalnej metody nie daje wobec tego odpowiedzi na pytanie, czy suma szeregu jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną, ani, tym bardziej, czy jest rozwiązaniem równania.

Z podanych przykładów widać, że metoda Fouriera nie zawsze prowadzi do rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego, przynajmniej jeżeli słowo „rozwiązanie" pojmujemy w sensie tradycyjnym, tzn. jako funkcję, która po zróżniczkowaniu i podstawieniu do równania, spełnia je w każdym punkcie. Można by jednak rozszerzyć nieco pojęcie rozwiązania, umawiając się np., że każdą granicę jednostajnie zbieżnego ciągu rozwiązań tradycyjnych będziemy uważali za rozwiązanie uogólnione. W takim sensie sumy szeregów otrzymanych w przykładach 1.1 i 1.2 będą rozwiązaniami równania struny.

W dalszym ciągu zobaczymy, że można to zrobić jeszcze inaczej: rozszerzyć operację różniczkowania tak, by dało się ją stosować do funkcji „niegładkich", a następnie umówić się, że pochodne występujące w równaniu różniczkowym rozumiemy w takim właśnie uogólnionym sensie.

1.2. Klasa $C_0^\infty(\mathbf{R})$ i definicja uogólnionej pochodnej. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że wszystkie rozważane funkcje mogą przyjmować wartości zespolone.

Niech f i φ będą funkcjami klasy $C^1(\mathbf{R})$, przy czym o funkcji φ zakładamy, że znika tożsamościowo poza pewnym skończonym przedziałem. Całkując przez części, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi'\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'\varphi\,dx\,. \tag{1.15}$$

Zauważmy, że lewa strona (1.15) ma sens przy dużo słabszych założeniach o funkcji f — wystarczy założyć, że jest ona całkowalna na każdym ograniczonym przedziale. Można by wobec tego użyć równości (1.15) do zdefiniowania uogólnionej pochodnej Df przyjmując, że jest to taka funkcja $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, że dla dowolnej funkcji φ spełniającej wymienione warunki mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi'\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g\varphi\,dx\,. \tag{1.16}$$

Gdybyśmy chcieli zastosować takie samo postępowanie do zdefiniowania uogólnionej drugiej pochodnej $D^2 f$ funkcji $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, należałoby wzmocnić założenia o regularności φ, zakładając, że jest ona klasy $C^2(\mathbf{R})$. Dlatego najwygodniej będzie przyjąć, że ma ona pochodne wszystkich rzędów.

Nazwijmy *nośnikiem* funkcji ciągłej φ domknięcie zbioru $\{x : \varphi(x) \neq 0\}$ (przyjęte są oznaczenia $\underset{\sim}{\varphi}$ lub $\operatorname{supp}\varphi$). Symbolem $C_0^\infty(\mathbf{R})$ będziemy oznaczali klasę funkcji $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ mających zwarty nośnik.

Niech $[a, b] = \operatorname{supp}\varphi$. Z założonej regularności wynika, że oś x-ów jest w punktach $x = a$ i $x = b$ styczną „nieskończonego rzędu" do wykresu funkcji φ. Nie jest zupełnie oczywiste, czy takie funkcje istnieją, wykażemy jednak, że można je łatwo skonstruować. Niech np.

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Funkcja h jest klasy $C^\infty(\mathbf{R})$, a jej nośnikiem jest półprosta $[0, \infty)$. Obierając stałą $a > 0$, określamy teraz

$$\varphi_a(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \tag{1.18}$$

czyli

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{a^2/(x^2-a^2)} & \text{dla } |x| \leqslant a, \\ 0 & \text{dla } |x| > a\,. \end{cases} \tag{1.19}$$

Z definicji (1.18) wynika, że φ_a ma pochodne wszystkich rzędów (jako superpozycja dwóch funkcji o tej własności), (1.19) zaś pokazuje, że $\operatorname{supp}\varphi = [-a, a]$.

Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na $\mathbf{R}$. Funkcję $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ nazwiemy *uogólnioną pochodną* funkcji f, jeżeli (1.16) zachodzi dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Dla oznaczenia uogólnionej pochodnej użyjemy w tym paragrafie zapisu $g = Df$.

PRZYKŁAD 1.3. Niech $f(x) = x \cdot 1_+(x)$, gdzie

$$1_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Całkowanie przez części daje

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_+(x)x\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx\,,$$

co oznacza, że $Df = 1_+(x)$. Ponieważ jest to funkcja lokalnie całkowalna, spróbujmy znaleźć z kolei jej pochodną uogólnioną, czyli $D^2 f$. Po obliczeniu całki mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_+(x)\varphi'(x)\,dx = -\varphi(0)\,, \tag{1.20}$$

pozostaje więc przedstawić prawą stronę (1.20) w postaci całki występującej po prawej stronie (1.16). Łatwo jednak wykazać, że jest to niemożliwe. Przypuśćmy bowiem, że znaleźliśmy taką funkcję $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\varphi\, dx = \varphi(0) \quad \text{dla dowolnej } \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})\,. \tag{1.21}$$

W szczególności obierzmy $\varphi = \varphi_a$ i niech $a \to 0$. Wówczas prawa strona (1.21) jest stała, równa e^{-1}, natomiast lewa strona dąży do zera, co wynika z oszacowania

$$\Big|\int_{-a}^{a} g\varphi_a\, dx\Big| \leqslant e^{-1}\int_{-a}^{a} |g|\, dx\,.$$

Przedstawiony przykład wskazuje, że nie każda funkcja lokalnie całkowalna ma pochodną uogólnioną w $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. Inaczej mówiąc, kolejne powtarzanie operacji uogólnionego różniczkowania, czyli znajdowanie pochodnych uogólnionych wyższych rzędów, nie jest na ogół wykonalne. Jest to wada wprowadzonej przez nas definicji. Zło tkwi nie tyle w formule (1.16), stanowiącej naturalne rozszerzenie wzoru na całkowanie przez części, co w przyjętym założeniu, że pochodna uogólniona ma być funkcją. W następnym paragrafie pokażemy jak można skonstruować ogólniejszą klasę obiektów, zwanych dystrybucjami, na których rozszerzona operacja różniczkowania jest wykonalna bez żadnych ograniczeń.

2. Dystrybucje jednej zmiennej

Spróbujmy nieco inaczej odczytać tożsamość (1.16). Klasa $C_0^\infty(\mathbf{R})$ jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych, a całka po prawej stronie (1.16) określa na niej funkcjonał liniowy l_g, mianowicie

$$l_g(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g\varphi\, dx\,.$$

Przy użyciu wprowadzonego oznaczenia możemy zapisać tożsamość (1.16) w innej postaci:

$$l_f(\varphi') = -l_g(\varphi) \qquad (\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})). \tag{2.1}$$

Wróćmy do przykładu 1.3. Różniczkując dwukrotnie w sensie uogólnionym funkcję f otrzymaliśmy funkcjonał liniowy $C_0^\infty(\mathbf{R}) \ni \varphi \to \varphi(0)$. Nasuwa to myśl, by jako podstawę definicji uogólnionego różniczkowania przyjąć nie tożsamość (1.16), a raczej jej wariant (2.1), zakładając jedynie, że wynik ma być funkcjonałem liniowym na przestrzeni $C_0^\infty(\mathbf{R})$. Idea ta pochodzi od współczesnych matematyków S. L. Sobolewa [26] oraz L. Schwartza — twórcy teorii dystrybucji [...]. Okazała się ona bardzo użyteczna w teorii liniowych równań różniczkowych cząstkowych (por. [11], [32]).

2.1. Przestrzeń $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Jak już wspomnieliśmy, klasa $C_0^\infty(\mathbf{R})$ jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych. Aby więc określić w niej klasę ciągów zbieżnych, wystarczy wprowadzić pojęcie ciągu zbieżnego do zera, czyli do funkcji równej tożsamościowo zeru, a następnie przyjąć, że ciąg $\{\varphi_k\}$ jest zbieżny do funkcji φ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg różnic $\{\varphi_k - \varphi\}$ dąży do zera.

Przyjmiemy następującą definicję: Ciąg $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R})$ jest *zbieżny do zera*, jeżeli

($\mathrm{w}_{2.1}$) nośniki wszystkich funkcji φ_k są zawarte w pewnym ograniczonym przedziale $[a, b]$ oraz

($\mathrm{w}_{2.2}$) dla dowolnego $j = 0, 1, 2, \ldots$ ciąg zróżniczkowany $\{\varphi_k^{(j)}\}$ jest zbieżny do zera jednostajnie na $\mathbf{R}$.

Klasę $C_0^\infty(\mathbf{R})$ z określoną w taki sposób zbieżnością będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

2.2. Definicja i przykłady dystrybucji. *Dystrybucją* będziemy nazywali funkcjonał $l\colon \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ spełniający następujące warunki:

($\mathrm{w}_{2.3}$) $l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 l(\varphi_1) + c_2 l(\varphi_2)$, gdzie $c_j \in \mathbf{C}$, $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $j = 1, 2$;
($\mathrm{w}_{2.4}$) dla każdego ciągu $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R})$, zbieżnego do zera, mamy $l(\varphi_k) \to 0$.

Warunek ($\mathrm{w}_{2.3}$) oznacza, że funkcjonał l jest *liniowy*, a warunek ($\mathrm{w}_{2.4}$) mówi, że jest on *ciągły* ze względu na zbieżność wprowadzoną w przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Zbiór wszystkich dystrybucji na prostej rzeczywistej $\mathbf{R}$ (czyli wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych na przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbf{R})$) oznaczamy symbolem $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Dla oznaczenia wartości funkcjonału $l \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ na funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ będziemy używali symbolu $\langle l, \varphi\rangle$ lub $l(\varphi)$. Funkcje klasy $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ są nazywane *funkcjami próbnymi*. Podamy parę przykładów dystrybucji (proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie, że warunki ($\mathrm{w}_{2.3}$) i ($\mathrm{w}_{2.4}$) są spełnione).

PRZYKŁAD 2.1. Każdej funkcji $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ możemy przyporządkować dystrybucję l_f określoną następująco:

$$\langle l_f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi\, dx \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})). \tag{2.2}$$

Dwie dystrybucje f i g będziemy uważali za *równe*, jeżeli są one identyczne jako funkcjonały na przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, tzn. gdy $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ dla wszystkich funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

STWIERDZENIE 2.1. *Odwzorowanie $C^0(\mathbf{R}) \ni f \to l_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ jest wzajemnie jednoznaczne.*

Ze względu na liniowość wystarczy wykazać, że z warunku

$$\langle l_f, \varphi\rangle = 0 \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})) \tag{2.3}$$

wynika tożsamościowe znikanie funkcji f. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wobec tego dla pewnego $x_0 \in \mathbf{R}$ mamy $f(x_0) \neq 0$. Niech będzie $f(x_0) > 0$. Ze względu na ciągłość f istnieje taka liczba $\eta > 0$, że $f(x) > 0$ dla $|x - x_0| < \eta$. Niech $\varphi(x) = \varphi_\eta(x - x_0)$ (por. (1.17)). Mamy wówczas

$$\langle l_f, \varphi \rangle = \int_{|x-x_0|<\eta} f(x)\varphi_\eta(x - x_0)\,dx > 0$$

wbrew (2.3), co kończy dowód. □

Stwierdzenie 2.1 daje się uogólnić na przypadek, gdy f jest dowolną funkcją lokalnie całkowalną. Wówczas z warunku (2.3) wynika, że f jest funkcją równą zeru prawie wszędzie, tj. poza, być może, pewnym zbiorem o mierze Lebesgue'a zero.

Dystrybucje dające się przedstawić w postaci (2.2), nazywamy *regularnymi*. W dalszym ciągu dystrybucję l_f będziemy utożsamiali z funkcją f. W tym sensie wszystkie funkcje ciągłe i, ogólniej, wszystkie funkcje lokalnie całkowalne możemy uważać za szczególne przypadki dystrybucji. W związku z tym obok terminu „dystrybucja" przyjął się w literaturze termin „funkcja uogólniona", który ma jednak nieco szersze znaczenie.

PRZYKŁAD 2.2. Dystrybucja

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})), \tag{2.4}$$

zwana *deltą Diraca*, nie jest regularna, gdyż — jak stwierdziliśmy w przykładzie 1.3 — nie można zapisać jej w postaci całkowej (2.2). Chociaż delty Diraca nie można identyfikować z żadną funkcją lokalnie całkowalną, w literaturze fizycznej i technicznej przyjął się termin „funkcja delta". Równość definicyjna (2.4) jest często zapisywana w postaci „całkowej":

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Zapis ten należy oczywiście traktować jako czysto formalny.

PRZYKŁAD 2.3. Funkcja $f(x) = 1/x$ nie jest lokalnie całkowalna, gdyż jej całka po każdym przedziale $[0, a]$ jest rozbieżna. Mimo to możemy jej przyporządkować dystrybucję, którą oznaczamy przez $P\frac{1}{x}$, zdefiniowaną przez tożsamość

$$\left\langle P\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})), \tag{2.5}$$

gdzie po prawej stronie występuje wartość główna całki (na ogół rozbieżnej) określona wzorem

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \tag{2.6}$$

Wykażemy najpierw, że funkcjonał $P\frac{1}{x}$ jest dobrze określony na całej przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, tzn. że granica po prawej stronie (2.6) ma skończoną wartość dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Funkcję φ można przedstawić w postaci

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x), \tag{2.7}$$

gdzie ψ jest funkcją ciągłą. Dla $x \neq 0$ możemy bowiem wyliczyć wartość $\psi(x)$ z równości (2.7), a dla $x = 0$ przyjmiemy $\psi(0) = \varphi'(0)$. Funkcja φ ma nośnik zawarty w pewnym przedziale $[-a, a]$, zatem

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant a} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant a} \psi(x)\,dx. \tag{2.8}$$

Pierwsza z całek po prawej stronie (2.8) znika. Przechodząc do granicy, gdy $\varepsilon \to 0+$, dostajemy więc

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|\leqslant a} \psi(x)\,dx.$$

Liniowość funkcjonału (2.5) jest oczywista, pozostaje więc do wykazania, że jest on ciągły ze względu na zbieżność wprowadzoną w przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, tzn. że spełniony jest warunek ($\mathrm{w}_{2.4}$). Jest to łatwe do udowodnienia, jeżeli do ciągu $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R})$, zbieżnego do zera, zastosujemy twierdzenie o wartości średniej i przedstawimy go w następującej postaci:

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(0) + x\varphi_k'(\theta_k x) \quad (0 < \theta_k < 1).$$

Szczegółowy dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

3. Działania na dystrybucjach jednej zmiennej

Jak już wspominaliśmy, wszystkie funkcje ciągłe, w szczególności funkcje różniczkowalne pewną liczbę razy, mogą być traktowane jako dystrybucje. W związku z tym nasuwa się myśl, by rozszerzyć na klasę $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ działania, które w klasycznej analizie wykonujemy tylko na funkcjach spełniających pewne założenia regularności. Celem niniejszego paragrafu będzie wprowadzenie tych działań w sposób formalny i zbadanie ich własności.

3.1. Dodawanie dystrybucji i mnożenie przez liczbę. Działania te można określić na przestrzeni funkcjonałów liniowych na dowolnej przestrzeni liniowej Φ (nad ciałem liczb zespolonych), przyjmując:

$$(f+g)(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi), \quad (cf)(\varphi) = cf(\varphi) \quad (\varphi \in \Phi)$$

dla dowolnej liczby zespolonej c i dowolnych funkcjonałów f, g. Interesować nas będzie jedynie przypadek, gdy $\Phi = \mathcal{D}(\mathbf{R})$ oraz $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Pozostawiamy Czytelnikowi łatwe sprawdzenie, że funkcjonały $f+g$ oraz cf są dystrybucjami.

3.2. Mnożenie dystrybucji przez funkcję gładką. Niech $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $p \in C^\infty(\mathbf{R})$. Iloczyn pf określimy jako nowy funkcjonał:

$$\langle pf, \varphi\rangle = \langle f, p\varphi\rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})). \tag{3.1}$$

Ponieważ wraz z funkcją φ również iloczyn $p\varphi$ należy do $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, więc prawa strona (3.1) ma sens i przyjęta definicja jest poprawna. Sprawdzimy, że funkcjonał pf jest dystrybucją. Liniowość jest oczywista. Wykażemy, że spełniony jest warunek ($\mathrm{w}_{2.4}$).

Niech $\varphi_k \to 0$ w sensie zbieżności w przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Oczywiście $\underline{p\varphi_k} \subset \underline{\varphi_k}$, zatem nośniki wszystkich funkcji $p\varphi_k$ zawierają się w ustalonym przedziale $[a,b]$ i ciąg $\{p\varphi_k\}$ spełnia warunek ($\mathrm{w}_{2.1}$). Stosując wzór Leibniza, mamy

$$(p\varphi_k)^{(j)} = \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} p^{(j-r)} \varphi_k^{(r)},$$

zatem

$$\sup_{\mathbf{R}} |p\varphi_k^{(j)}| = \sup_{[a,b]} |p\varphi_k^{(j)}| \leqslant c \max_{0 \leqslant r \leqslant j} \sup_{[a,b]} |\varphi_k^{(r)}|, \tag{3.2}$$

gdzie stała c zależy od maksymalnej wartości współczynników dwumianowych oraz od kresów górnych funkcji $|p^{(r)}|$ na przedziale $[a,b]$ dla $r = 0, 1, \dots, j$ (z ciągłości funkcji $p^{(r)}$ wynika, że kresy te są skończone).

Jeżeli ciąg $\{\varphi_k\}$ spełnia warunek ($\mathrm{w}_{2.2}$), to z (3.2) wynika, że dla dowolnie ustalonego j ciąg $\{p\varphi_k^{(j)}\}$ jest jednostajnie zbieżny do zera na $\mathbf{R}$. Zatem ciąg $\{p\varphi_k\}$ spełnia warunki ($\mathrm{w}_{2.1}$) i ($\mathrm{w}_{2.2}$), jest więc zbieżny do zera w przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Ponieważ, zgodnie z (3.1),

$$\langle pf, \varphi_k\rangle = \langle f, p\varphi_k\rangle, \tag{3.3}$$

a f jest z założenia funkcjonałem ciągłym na $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, więc prawa strona (3.3) dąży do zera, gdy $k \to \infty$, co kończy dowód. □

Niech teraz f będzie funkcją ciągłą. Iloczyn pf określa się w analizie jako nową funkcję:

$$(pf)(x) = p(x)f(x) \quad (x \in \mathbf{R}). \tag{3.4}$$

Obierzmy dowolnie funkcję $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Mnożąc przez φ obustronnie równość (3.4), a następnie całkując, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (pf)\varphi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(p\varphi)\, dx,$$

co można również zapisać w postaci „funkcjonałowej" (3.1), jeżeli skorzystamy z faktu, że obie funkcje f i pf mogą być traktowane jako dystrybucje. A zatem przyjęta definicja mnożenia dystrybucji przez funkcję gładką jest nie tylko formalnie poprawna, ale ma jeszcze inną ważną zaletę: w przypadku dystrybucji regularnej nowe działanie jest identyczne ze znanym już „zwykłym" mnożeniem funkcji.

3.3. Różniczkowanie dystrybucji. Niech $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. *Pochodną f' dystrybucji f* będziemy nazywali funkcjonał

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})). \tag{3.5}$$

Czytelnik z łatwością zauważy, że dla dystrybucji regularnej $f \in C^1(\mathbf{R})$ tożsamość definicyjna (3.5) staje się po prostu formułą całkowania przez części (1.15), w której f' oznacza pochodną w zwykłym sensie. A więc w klasie $C^1(\mathbf{R})$ różniczkowanie w sensie dystrybucyjnym i w sensie klasycznym pokrywają się. Warto od razu zauważyć, że twierdzenie to przestaje być prawdziwe, jeżeli osłabimy założenia o funkcji f, jak wskazuje

PRZYKŁAD 3.1. Dla danych $g, h \in C^1(\mathbf{R})$ określimy nową funkcję f, przyjmując:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dla } x < 0, \\ h(x) & \text{dla } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie różnym od zera. Jej pochodna w zwykłym sensie, df/dx, jest funkcją określoną i ciągłą dla $x \neq 0$ oraz mającą w zerze skończone granice lewo- i prawostronną. Wobec tego jest to funkcja lokalnie całkowalna, może więc być traktowana jako dystrybucja regularna. Obliczmy teraz pochodną dystrybucyjną funkcji f. Zapisując prawą stronę (3.5) w postaci całkowej, mamy

$$\langle f', \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{0} g\varphi'\,dx - \int_{0}^{\infty} h\varphi'\,dx\,,$$

a stąd, całkując przez części prawą stronę, dostajemy

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{0} \frac{dg}{dx}\varphi\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{dh}{dx}\varphi\,dx + [h(0) - g(0)]\varphi(0)\,. \tag{3.6}$$

Prawą stronę (3.6) możemy zapisać w postaci funkcjonałowej

$$\langle f', \varphi \rangle = \left\langle \frac{df}{dx}, \varphi \right\rangle + [h(0) - g(0)]\,\langle \delta, \varphi \rangle\,,$$

lbo krócej

$$f' = \frac{df}{dx} + [f]_0\delta\,, \tag{3.7}$$

dzie

$$[f]_0 = \lim_{x\to 0+} f(x) - \lim_{x\to 0-} f(x) \tag{3.8}$$

znacza skok funkcji f w zerze. Z równości (3.7) widać, że pochodne df/dx i f' ą równe wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła w zerze. W przypadku skokowej ieciągłości przy różniczkowaniu pojawia się dystrybucja δ.

Sprawdzenie, że funkcjonał f' jest dystrybucją, tzn. że spełnione są warunki $\mathrm{w}_{2.3}$) i ($\mathrm{w}_{2.4}$) pozostawiamy Czytelnikowi.

Zauważmy jeszcze, że gdy obie dystrybucje f i f' są regularne, funkcja f' jest ogólnioną pochodną funkcji f w sensie definicji przyjętej w punkcie 1.2.

Na zakończenie podamy

STWIERDZENIE 3.1. *Niech $p, q \in C^\infty(\mathbf{R})$ oraz $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Zachodzą następujące prawa formalne*:

$$(p + q)f = pf + qf\,, \tag{3.9}$$

$$p(f + g) = pf + pg\,, \tag{3.10}$$

$$(pf)' = p'f + pf' \quad \text{(wzór Leibniza)}, \tag{3.11}$$

$$(f + g)' = f' + g'\,. \tag{3.11'}$$

Udowodnimy (3.11) (pozostałe równości wynikają natychmiast z definicji). la dowolnej funkcji próbnej $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ mamy $\langle (pf)', \varphi \rangle = -\langle f, p\varphi' \rangle$, ale z reguły óżniczkowania iloczynu funkcji gładkich wynika, że $p\varphi' = (p\varphi)' - p'\varphi$, wobec go $\langle (pf)', \varphi \rangle = -\langle f, (p\varphi)' \rangle + \langle f, p'\varphi \rangle$, a zatem $\langle (pf)', \varphi \rangle = \langle pf', \varphi \rangle + \langle p'f, \varphi \rangle$, kończy dowód. □

3.4. Liniowa zamiana zmiennej niezależnej. Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na osi rzeczywistej. Wówczas funkcję złożoną $f(ax+b)$, gdzie $a \neq 0$, możemy traktować jako dystrybucję regularną. Po dokonaniu pod całką podstawienia

$$y = ax + b, \qquad a \neq 0\,, \tag{3.12}$$

dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax + b)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)dy\,,$$

czyli, w zapisie funkcjonałowym,

$$\langle f \circ d, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|}\langle f, \varphi \circ d^{-1} \rangle\,, \tag{3.13}$$

gdzie d oznacza przekształcenie określone wzorem (3.12).

Równość (3.13) przyjmujemy za definicję podstawienia liniowego w dowolnej dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Można ją zapisać inaczej w postaci

$$\langle f(ax + b), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle f(y), \varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\right\rangle, \tag{3.13'}$$

pamiętając, że zapis $f(ax + b)$ lub $f(y)$ należy traktować jako czysto formalny, gdyż dystrybucje — w przeciwieństwie do funkcji ciągłych — nie mają na ogół określonej wartości w punkcie.

Szczególnie ważny przypadek podstawienia liniowego stanowi *translacja* (*przesunięcie*)

$$y = x + b. \tag{3.14}$$

Dla funkcji używamy wówczas zapisu $(\tau_b\varphi)(x) = \varphi(x + b)$.

Zgodnie z (3.13) definiujemy *dystrybucję przesuniętą*:

$$\langle \tau_b f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-b}\varphi \rangle\,. \tag{3.15}$$

Drugi ważny przypadek podstawienia liniowego stanowi *odbicie w początku układu*:

$$y = -x. \tag{3.16}$$

Odpowiednie podstawienie w funkcji oznaczamy przez $\varphi\check{}(x) = \varphi(-x)$, a dla dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ przyjmujemy, zgodnie z (3.13), że

$$\langle f\check{}, \varphi \rangle = \langle f, \varphi\check{} \rangle\,. \tag{3.17}$$

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że funkcjonał $f \circ d$, określony wzorem (3.13), jest dystrybucją.

PRZYKŁAD 3.2. Zobaczmy, jak działa na funkcję próbną φ dystrybucja $\tau_{-b}\delta$. Zgodnie z (3.15) mamy $\langle \tau_{-b}\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \tau_{-b}\varphi\rangle$, czyli

$$\langle \tau_{-b}\delta, \varphi\rangle = \varphi(b). \tag{3.18}$$

W literaturze fizycznej i technicznej dla dystrybucji przesuniętej $\tau_{-b}\delta$ używa się często zapisu funkcyjnego $\delta(x-b)$, a równość (3.18) bywa zapisywana w następującej postaci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-b)\varphi(x)\,dx = \varphi(b).$$

Symbol całki należy tu oczywiście rozumieć w sposób czysto formalny, gdyż, jak już wykazaliśmy, δ nie jest dystrybucją regularną i nie daje się zapisać w sposób całkowy.

3.5. Pierwotna dystrybucji. W przypadku funkcji f ciągłej w przedziale $(-\infty,\infty)$ przez jej *pierwotną* rozumiemy funkcję różniczkowalną g spełniającą warunek $g'(x) = f(x)$ dla $x \in \mathbf{R}$. Wiadomo (por. [14], rozdz. VIII, IX), że każda funkcja ciągła posiada pierwotną (zwaną inaczej *całką nieoznaczoną*), przy czym dowolne dwie pierwotne tej samej funkcji różnią się o stałą. Twierdzenie to przenosi się łatwo na przypadek dowolnej dystrybucji.

Pierwotną dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ nazywamy dystrybucję $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ taką, że $g' = f$.

TWIERDZENIE 3.1. *Każda dystrybucja $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ posiada nieskończenie wiele pierwotnych różniących się o stałą.*

Dowód. Niech $\mathcal{H} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) : \varphi = \psi',\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})\}$. Łatwo sprawdzić, że $\varphi \in \mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx = 0$, przy czym $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$. Z definicji wynika, że pierwotna g jest funkcjonałem określonym na zbiorze $\mathcal{H}$ równością

$$\langle g, \varphi\rangle = -\langle f, \psi\rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{H}). \tag{3.19}$$

Funkcjonał ten należy rozszerzyć na całą klasę $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Obierzmy funkcję $\varphi^0 \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ tak, by $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^0(x)\,dx = 1$ (można na przykład przyjąć $\varphi^0 = \varphi_a[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_a(x)\,dx]^{-1}$, gdzie φ_a jest funkcją określoną wzorem (1.19)). Dowolna funkcja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ daje się przedstawić jednoznacznie w postaci

$$\varphi = \lambda\varphi^0 + \varphi^1, \tag{3.20}$$

gdzie $\varphi^1 \in \mathcal{H}$ oraz $\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx$. Wobec tego zgodnie z (3.19), (3.20) przyjmujemy

$$\langle g, \varphi\rangle = \lambda\langle g, \varphi^0\rangle - \langle f, \psi^1\rangle, \tag{3.21}$$

gdzie $\psi^1(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi^1(t)\,dt$, a liczba $\langle g, \varphi^0\rangle$ jest ustalona dowolnie. Łatwe sprawdzenie, że tak określony funkcjonał g jest dystrybucją, przy czym $g' = f$, pozostawiamy Czytelnikowi. Jeżeli g_1 i g_2 są pierwotnymi tej samej dystrybucji, to $(g_1 - g_2)' = 0$. Dla zakończenia dowodu wystarczy więc wykazać, że każda dystrybucja $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ spełniająca warunek $g' = 0$ jest dystrybucją regularną równą funkcji stałej. Fakt ten wynika natychmiast z rozkładu (3.20), który daje

$$\langle g, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(x)\,dx,$$

gdzie $c = \langle g, \varphi^0\rangle$ odgrywa rolę stałej całkowania. □

4. Dystrybucje wielu zmiennych

Dotychczas rozważaliśmy jedynie funkcje i dystrybucje określone na osi rzeczywistej $\mathbf{R}$. Nie ma jednak żadnych istotnych trudności w przeniesieniu przyjętych definicji na dowolny obszar Ω w przestrzeni $\mathbf{R}^n$, który w szczególnym przypadku może być identyczny z całą przestrzenią.

4.1. Przestrzeń $\mathcal{D}(\Omega)$. Definicja nośnika funkcji określonej i ciągłej w Ω pozostaje bez zmiany (p. 1.2). Symbolem $C_0^\infty(\Omega)$ będziemy oznaczali klasę wszystkich funkcji $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, mających zwarty nośnik $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$ (¹). Jest oczywiste geometrycznie, że nośnik funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ nie może mieć punktów wspólnych z brzegiem obszaru Ω, a zatem funkcja φ znika w pewnym „pasku przygranicznym".

PRZYKŁAD 4.1. Niech h będzie funkcją jednej zmiennej określoną wzorem (1.17). Dla ustalonego $a > 0$ załóżmy, że

$$\varphi_a(x) = h\left(1 - \frac{|x|^2}{a^2}\right) \qquad (x \in \mathbf{R}^n), \tag{4.1}$$

czyli że

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{a^2}{|x|^2 - a^2}\right\} & \text{dla } |x| < a, \\ 0 & \text{dla } x \geqslant a. \end{cases} \tag{4.2}$$

(¹) Ω może być dowolnym zbiorem otwartym w $\mathbf{R}^n$, założenie spójności nie jest istotne.

Funkcja φ_a należy do klasy $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, jej nośnikiem zaś jest kula $|x| \leqslant a$.

Przykład wykazuje, że klasa $C_0^\infty(\Omega)$ nie jest pusta. Przesuwając odpowiednio układ współrzędnych można zawsze przyjąć bez zmniejszenia ogólności, że obszar Ω zawiera początek układu. Wówczas dla dostatecznie małego a nośnik funkcji φ_a zawiera się w Ω, a więc $\varphi_a \in C_0^\infty(\Omega)$.

Modyfikując definicję z punktu 2.1 będziemy mówili, że ciąg $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *jest zbieżny do zera*, jeżeli

($\mathrm{w}_{4.1}$) istnieje taki zwarty zbiór $K \subset \Omega$, że $\operatorname{supp}\varphi_k \subset K$ dla każdego k;

($\mathrm{w}_{4.2}$) po zróżniczkowaniu dowolną liczbę razy ciąg $\{\partial^{|\alpha|}\varphi_k/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\}$ (gdzie $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) jest zbieżny do zera jednostajnie na K.

Przestrzeń liniową (nad ciałem liczb zespolonych) $C_0^\infty(\Omega)$ z tak określoną zbieżnością będziemy oznaczali przez $\mathcal{D}(\Omega)$ lub $\mathcal{D}$, gdy $\Omega = \mathbf{R}^n$.

4.2. Definicja dystrybucji wielu zmiennych. Wszystkie definicje przyjęte w p. 2.2 i w § 3 przenoszą się automatycznie na przypadek wielowymiarowy. *Dystrybucją w obszarze Ω* nazywamy funkcjonał $l : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ spełniający następujące warunki:

($\mathrm{w}_{4.3}$) $l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 l(\varphi_1) + c_2 l(\varphi_2)$, gdzie $c_j \in \mathbf{C}$, $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$, $j = 1, 2$;

($\mathrm{w}_{4.4}$) dla każdego ciągu $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R})$, zbieżnego do zera, ciąg liczbowy $\{l(\varphi_k)\}$ dąży do zera.

Dystrybucje w obszarze Ω są to więc funkcjonały *liniowe* i *ciągłe* na przestrzeni $\mathcal{D}(\Omega)$. Przestrzeń wszystkich dystrybucji w Ω oznaczamy przez $\mathcal{D}'(\Omega)$, a wartość funkcjonału l na funkcji próbnej $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ zapisujemy $l(\varphi)$ lub $\langle l, \varphi\rangle$. Dwie dystrybucje $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uważamy za *równe*, jeżeli dla dowolnej funkcji próbnej $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mamy $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$.

Dystrybucje dające się zapisać w postaci

$$\mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \to \int_\Omega f\varphi\,dx\,,$$

gdzie $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, nazywamy *regularnymi*.

Stwierdzenie 2.1 pozostaje prawdziwe po zastąpieniu $\mathbf{R}$ przez Ω, dowód przebiega podobnie i nie będziemy go powtarzali. Przykładem dystrybucji, która nie jest regularna, podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, jest delta Diraca określona jako $\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$ $\quad(\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n))$.

Dodawanie dystrybucji i *mnożenie ich przez liczbę* określamy podobnie jak w punkcie 3.1, przyjmując, że $\Phi = \mathcal{D}(\Omega)$ oraz $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

4.3. Liniowa zamiana zmiennych niezależnych. Rozważmy w $\mathbf{R}^n$ przekształcenie afiniczne d określone wzorem $y = ax + b$, gdzie a jest macierzą nieosobliwą $n \times n$, zaś $b \in \mathbf{R}^n$.

Podobnie jak w przypadku $n = 1$ (p. 3.4) określamy liniową zamianę zmiennych niezależnych w dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, przyjmując dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$\langle f \circ d, \varphi\rangle = \frac{1}{|\det a|}\langle f, \varphi \circ d^{-1}\rangle.$$

Gdy zamiana zmiennych jest *translacją* (*przesunięciem*), tzn. gdy $y = x + b$, przyjmując dla *dystrybucji przesuniętej* oznaczenie $f \circ d = \tau_b f$, mamy

$$\langle \tau_b f, \varphi\rangle = \langle f, \tau_{-b}\varphi\rangle\,.$$

W szczególności pozostaje słuszny wzór (3.18), który w literaturze fizycznej bywa zapisywany w sposób „całkowy":

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(x - b)\varphi(x)\,dx = \varphi(b).$$

Jest to *własność odsiewania funkcji δ*.

Drugi ważny przypadek przekształcenia afinicznego stanowi *odbicie* w początku układu: $y = -x$. Używamy wówczas oznaczenia $f \circ d = f^{\vee}$. Zgodnie z przyjętą definicją, dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, mamy

$$\langle f^{\vee}, \varphi\rangle = \langle f, \varphi^{\vee}\rangle\,.$$

4.4. Mnożenie dystrybucji przez funkcję gładką. Dla $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ oraz $p \in C^\infty(\Omega)$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ przyjmujemy, że $\langle pf, \varphi\rangle = \langle f, p\varphi\rangle$. Dowód, że określony w ten sposób funkcjonał pf jest dystrybucją, przebiega podobnie jak w p. 3.2.

PRZYKŁAD 4.2. Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie następującej tożsamości: $g(x)\delta(x - b) = g(b)\delta(x - b)$ dla $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $b \in \mathbf{R}^n$.

4.5. Różniczkowanie dystrybucji. Podobnie jak w przypadku jednej zmiennej, punktem wyjścia dla definicji różniczkowania uogólnionego jest wzór na całkowanie przez części dla całek wielokrotnych:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x_j} g\,dx = -\int_D f\frac{\partial g}{\partial x_j}\,dx + \int_{\partial D} fg\nu_j\,d\sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.3}$$

gdzie $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ jest wektorem normalnym do brzegu obszaru D skierowanym na zewnątrz. Wzór (4.3) jest słuszny dla funkcji f i g klasy $C^1(D)$, o obszarze D wystarczy założyć, że jest ograniczony i ma dostatecznie gładki brzeg. Dla naszych celów wystarczy pewien wariant wzoru (4.3). Załóżmy mianowicie, że $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ oraz że $g = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, gdzie Ω jest dowolnym obszarem w

$\mathbf{R}^n$. Wówczas jako obszar całkowania D można przyjąć kulę zawierającą nośnik φ i formuła (4.3) daje

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi\,dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx \tag{4.4}$$

lub (w zapisie funkcjonałowym)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)), \tag{4.5}$$

jeżeli uwzględnimy, że funkcje ciągłe $\partial f/\partial x_j$ i f są dystrybucjami regularnymi.

Tożsamość (4.5) przyjmujemy za definicję pochodnej względem zmiennej x_j dowolnej dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pozostawiając Czytelnikowi łatwe sprawdzenie, że tak określony funkcjonał $\partial f/\partial x_j$ jest dystrybucją, sformułujemy

STWIERDZENIE 4.1. *Dla $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $(j,k = 1,\ldots,n)$ mamy*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right).$$

Dowód wynika natychmiast z (4.5) i z równości pochodnych mieszanych gładkiej funkcji φ. □

Przemienność różniczkowania dystrybucji względem różnych zmiennych, wyrażona w stwierdzeniu 4.1, pozwala wprowadzić wygodne oznaczenia dla pochodnych wyższego rzędu.

Wektor $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, którego współrzędne α_j są liczbami naturalnymi lub zerem, będziemy nazywali *wielowskaźnikiem*, a przez *rząd wielowskaźnika* będziemy rozumieli liczbę $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Dla dowolnego wektora $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$ przyjmujemy, że $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$, gdzie $x_j^{\alpha_j} = 1$ dla $\alpha_j = 0$. Pisząc

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (j = 1,\ldots,n),$$

wprowadzamy symboliczny „wektor" $D = (D_1 \ldots D_n)$.

Operację różniczkowania rzędu $|\alpha|$,

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ldots D_n^{\alpha_n},$$

można w przedstawionej symbolice zapisać krótko jako D^α. Zapis ten przyjął się w nowoczesnej literaturze, zwłaszcza tam, gdzie rozważa się pochodne wyższych rzędów. W klasycznej terminologii „wektor" D nazywa się *operatorem nabla* i jest oznaczany przez $\nabla = (\nabla_1,\ldots,\nabla_n)$, gdzie $\nabla_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

STWIERDZENIE 4.2. *Niech $p, q \in C^\infty(\Omega)$ oraz $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Zachodzą następujące prawa formalne:*

$$(p+q)f = pf + qf, \tag{4.6}$$
$$p(f+g) = pf + pg, \tag{4.7}$$
$$D_j(pf) = (D_jp)f + p(D_jf), \tag{4.8}$$
$$D_j(f+g) = D_jf + D_jg. \tag{4.8'}$$

Dowód jest taki sam, jak dowód stwierdzenia 3.1. □

Niech teraz

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \xi^\alpha \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n)$$

będzie dowolnym wielomianem n zmiennych. Zastępując formalnie ξ przez symboliczny wektor D, otrzymujemy liniowy operator różniczkowy

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha$$

o stałych współczynnikach a_α. Zakładając, że współczynniki a_α są funkcjami klasy $C^\infty(\Omega)$, możemy analogicznie wprowadzić wielomian P zmiennej $\xi \in \mathbf{R}^n$ o współczynnikach zależnych od parametru $x \in \Omega$,

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

i odpowiadający mu liniowy operator różniczkowy o zmiennych współczynnikach:

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{4.9}$$

Każde równanie różniczkowe liniowe może być zapisane w następującej postaci $P(x,D)u = f$, gdzie $P(x,\cdot)$ jest odpowiednio dobranym wielomianem w $\mathbf{R}^n$.

4.6. Uogólnione pochodne funkcji lokalnie całkowalnej. Niech u będzie funkcją klasy $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Wobec tego (por. p. 4.2) u jest dystrybucją regularną i może być różniczkowana w sensie dystrybucyjnym. Przypuśćmy, że pochodna $D_ju = g$ również jest funkcją lokalnie całkowalną w Ω. Wówczas, korzystając z definicji pochodnej dystrybucyjnej (4.5) oraz z przedstawienia całkowego dystrybucji regularnych, mamy

$$\int_\Omega uD_j\varphi\,dx = -\int_\Omega g\varphi\,dx \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)). \tag{4.10}$$

Funkcję g nazywamy *uogólnioną pochodną funkcji u względem zmiennej x_j* (używa się również terminów *pochodna słaba* lub *pochodna dystrybucyjna*). Tożsamość (4.10) może być przyjęta jako definicja uogólnionej pochodnej, jeżeli nie chcemy odwoływać się do różniczkowania wprowadzonego w klasie dystrybucji.

Niech $P(x,D)$ będzie liniowym operatorem różniczkowym (4.9) o współczynnikach $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ i niech $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ będzie daną funkcją. Funkcję $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ nazywamy *uogólnionym* (lub *słabym*) rozwiązaniem równania różniczkowego

$$P(x,D)u = f, \tag{4.11}$$

jeżeli równanie to jest spełnione przy założeniu, że różniczkujemy w sensie dystrybucyjnym.

W terminach funkcji lokalnie całkowalnych możemy definicję słabego rozwiązania równania (4.11) w obszarze Ω zapisać w postaci tożsamości całkowej:

$$\int_\Omega uP^*\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)), \tag{4.12}$$

gdzie

$$P^*\varphi = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha\varphi).$$

P^* jest oczywiście również liniowym operatorem różniczkowym o współczynnikach klasy C^∞.

PRZYKŁAD 4.3. Sprawdzimy, że funkcja u, określona wzorem (1.14), jest słabym rozwiązaniem równania struny (1.1) w obszarze $D: 0 < x < 1,\ t > 0$.

Rozważmy sumę częściową S_N szeregu

$$S_N(x,t) = \sum_{k=1}^N u_k(x,t),$$

gdzie funkcje u_k są rozwiązaniami równania (1.1) specjalnej postaci (1.10). Całkując przez części, dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(D)$ otrzymujemy

$$\int_D (\Box S_N)\varphi\,dx = \int_D S_N(\Box\varphi)\,dx \tag{4.13}$$

(funkcja φ znika w otoczeniu brzegu obszaru D).

Lewa strona (4.13) jest równa zeru, gdyż z liniowości równania (1.1) wynika, że S_N jest również jego rozwiązaniem. Wobec stwierdzonej w przykładzie 1.2 jednostajnej zbieżności szeregu, możemy po prawej stronie (4.13) przejść do granicy pod znakiem całki, co daje

$$\int_D u\Box\varphi\,dx = 0 \quad (\varphi \in \mathcal{D}(D)).$$

Podobnie można wykazać, że funkcja u, określona wzorem (1.13), jest słabym rozwiązaniem równania struny. Widzimy więc, że metoda Fouriera rozwiązywania zagadnienia mieszanego (1.1)–(1.4) prowadzi na ogół do uogólnionych rozwiązań.

4.7. Pierwotne dystrybucji wielu zmiennych. Próbując przenieść rozważania p. 3.5 na przypadek wielowymiarowy zaczniemy od rozwiązania następującego zadania: do danej funkcji f ciągłej w $\mathbf{R}^n$ dobrać funkcję g tak, by

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} = f(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n). \tag{4.14}$$

Jak wiadomo, rozwiązanie zadania ma postać

$$g(x) = \int_c^{x_1} f(t,\tilde{x})\,dt + h(\tilde{x}), \tag{4.15}$$

gdzie $\tilde{x} = (x_2,\ldots,x_n)$, c jest dowolnie ustaloną liczbą, h zaś dowolnie obraną funkcją ciągłą w $\mathbf{R}^{n-1}$. Wzór (4.15) daje również rozwiązanie zagadnienia w przypadku, gdy f jest określona i ciągła jedynie w obszarze postaci $(a,b)\times\tilde{\Omega}$, gdzie $\tilde{\Omega}$ jest obszarem w $\mathbf{R}^{n-1}$ (wówczas należy obrać $c \in (a,b)$), h zaś jest dowolnie obraną funkcją ciągłą w $\tilde{\Omega}$.

Przechodząc do przypadku gdy f jest dystrybucją, udowodnimy

TWIERDZENIE 4.1. *Niech $\Omega = \Delta\times\tilde{\Omega}$, gdzie Δ jest przedziałem, a $\tilde{\Omega}$ obszarem w $\mathbf{R}^{n-1}$. Wtedy do dowolnej dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ istnieje dystrybucja $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ taka, że*

$$D_1 g = f. \tag{4.16}$$

Dowód. Podobnie jak dla jednej zmiennej, wprowadzimy podzbiór liniowy przestrzeni $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\mathcal{H} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \varphi = \partial\psi/\partial x_1,\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że $x_1 \in \Delta$ i że $\tilde{x} = (x_2,\ldots,x_n) \in \tilde{\Omega}$. Jak łatwo sprawdzić, $\varphi \in \mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,\tilde{x})\,dt = 0$, przy czym $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\varphi(t,\tilde{x})\,dt$. Obierzmy funkcję $\varphi^0 \in \mathcal{D}(\Delta)$ tak, by $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^0(t)\,dt = 1$. Dowolna funkcja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ daje się jednoznacznie przedstawić w postaci

$$\varphi(x) = \varphi^0(x_1)\lambda(\tilde{x}) + \varphi^1(x), \tag{4.17}$$

gdzie

$$\lambda(\tilde{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t,\tilde{x})\,dt, \tag{4.18}$$

a $\varphi^1 \in \mathcal{H}$. Uwzględniając (4.16) i (4.17) przyjmiemy

$$(4.19) \qquad \langle g, \varphi \rangle = \langle g, \varphi^0 \lambda \rangle - \langle f, \psi^1 \rangle ,$$

gdzie

$$(4.20) \qquad \psi^1(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \varphi^1(t, \tilde{x})\, dt .$$

Z (4.18) wynika, że $\lambda \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ dla dowolnie obranej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Na odwrót, obierając dowolnie $\lambda \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ możemy funkcję $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ określić wzorem (4.17), przyjmując np. $\varphi^1 = 0$. Wobec tego pierwszy wyraz po prawej stronie (4.19) można uważać za funkcjonał określony na $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$. Ponadto, jeżeli ciąg $\varphi_\nu \to 0$ w $\mathcal{D}(\Omega)$, to z (4.18) wynika, że odpowiedni ciąg $\lambda_\nu \to 0$ w $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ i na odwrót — z ostatniego warunku wynika, że $\varphi^0 \lambda_\nu \to 0$ w $\mathcal{D}(\Omega)$. Z powyższych uwag wnioskujemy, że funkcjonał g określony przez (4.19) jest dystrybucją w Ω wtedy i tylko wtedy, gdy funkcjonał

$$\langle h, \lambda \rangle = \langle g, \varphi^0 \lambda \rangle$$

est dystrybucją w $\tilde{\Omega}$. Wzór (4.19) określający rozwiązanie zagadnienia można vobec tego zapisać w sposób równoważny

$$4.21) \qquad \langle g, \varphi \rangle = \langle h, \lambda \rangle - \langle f, \psi^1 \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) ,$$

dzie $h \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ jest dowolnie obraną dystrybucją, a funkcje λ i ψ^1 są określone rzez (4.18) i (4.20). □

Uwaga. Z równości (4.21) widać, że wszystkie dystrybucje spełniające w bszarze $\Omega = \Delta \times \tilde{\Omega}$ warunek $D_1 g = 0$ są postaci

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle h, \lambda \rangle ,$$

łzie $h \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$. Zatem dowolne dwa rozwiązania równania (4.14) różnią się o ystrybucję należącą do klasy $\mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$, czyli niezależną od x_1.

Z udowodnionego twierdzenia wynika łatwo

WNIOSEK 4.1. *Jeżeli obszar Ω jest kostką w $\mathbf{R}^n$ ($\Omega = \Delta_1 \ldots \Delta_n$, gdzie Δ_j st przedziałem dla $j = 1, \ldots, n$), to dla dowolnie danej dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i wolnego $k = 1, 2, \ldots, n$ istnieje dystrybucja $g_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ taka, że*

$$22) \qquad D_k g_k = f .$$

Dowolne dwa rozwiązania równania (4.22) różnią się o dystrybucję niezależną x_k. □

4.8. Całkowanie układów pierwszego rzędu. Zaczniemy od następującego klasycznego zagadnienia: Dane są funkcje $g_1, g_2 \in C^1(\mathbf{R}^2)$ spełniające warunek

$$(4.23) \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} .$$

Znaleźć funkcję $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ spełniającą układ równań

$$(4.24_j) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j$$

dla $j = 1, 2$.

Szukanie funkcji f zaczniemy od rozwiązania równania (4.24_1), co daje

$$(4.25) \qquad f(x_1, x_2) = G_1(x_1, x_2) + h(x_2) ,$$

gdzie

$$G_1(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{x_1} g_1(t, x_2)\, dt .$$

W celu wyznaczenia funkcji h zauważmy, że przyjmując $G_2 = g_2 - \partial G_1/\partial x_2$ otrzymujemy, po wykorzystaniu warunku (4.23) oraz ciągłości pochodnych mieszanych,

$$\frac{\partial G_2}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial G_1}{\partial x_1} = 0 ,$$

co oznacza, że funkcja G_2 nie zależy od x_1. Funkcja f określona wzorem (4.25) spełnia równanie (4.24_2) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{dh}{dx_2} = G_2$$

wszystkie zaś rozwiązania ostatniego równania mają postać

$$(4.26) \qquad h(x_2) = \int_{a_2}^{x_2} G_2(t)\, dt + c .$$

Wzory (4.25), (4.26) dają rozwiązanie zagadnienia, przy czym ze znanych twierdzeń rachunku różniczkowego wynika, że dowolne dwa rozwiązania różnią się o stałą. Jeżeli funkcje g_1, g_2 są wielomianami stopnia $\leqslant k$, to każde rozwiązanie układu (4.24) jest wielomianem stopnia $\leqslant k+1$.

Przechodząc do wersji dystrybucyjnej sformułujemy

TWIERDZENIE 4.2. *Załóżmy, że Ω jest kostką w $\mathbf{R}^n$ a dystrybucje $g_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $(j = 1, \ldots, n)$ spełniają warunki*

$$D_k g_j = D_j g_k \quad (j, k = 1, \ldots, n). \tag{4.27}$$

Wówczas

1° *Istnieje dystrybucja $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ spełniająca układ równań*

$$D_j f = g_j \tag{4.28$_j$}$$

dla $j = 1, \ldots, n$.

2° *Dowolne dwa rozwiązania dystrybucyjne układu* (4.28) *różnią się o stałą.*

Dowód. Dla większej przejrzystości przeprowadzimy dowód biorąc $n = 2$, $\Omega = \Delta_1 \times \Delta_2$, gdzie Δ_j $(j = 1, 2)$ jest przedziałem jednowymiarowym. Rozumowanie będzie podobne do rachunku przeprowadzonego na początku niniejszego punktu.

Zgodnie z twierdzeniem 4.1 wszystkie rozwiązania równania (4.28$_1$) są postaci

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle G_1, \varphi \rangle + \langle h, \lambda \rangle , \tag{4.29}$$

gdzie $G_1 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ jest pewnym ustalonym rozwiązaniem, $h \in \mathcal{D}'(\Delta_2)$ jest dowolnie obraną dystrybucją, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, zaś

$$\lambda(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x_2)\, dt. \tag{4.30}$$

Należy obrać dystrybucję h w taki sposób, by f spełniała również równanie (4.28$_2$). Przyjmując $G_2 = g_2 - D_2 G_1$ stwierdzamy, po wykorzystaniu warunku (4.27) oraz przemienności różniczkowania dystrybucyjnego, że $D_1 G_2 = 0$. Zgodnie z uwagą sformułowaną w p. 4.7 dystrybucja G_2 daje się zapisać w postaci

$$\langle G_2, \varphi \rangle = \langle p, \lambda \rangle , \tag{4.31}$$

gdzie $p \in \mathcal{D}'(\Delta_2)$ zaś funkcje $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ oraz $\lambda \in \mathcal{D}(\Delta_2)$ są związane zależnością (4.30). Z (4.29) oraz (4.31) widać, że f spełnia układ (4.28) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D_2 h = p. \tag{4.32}$$

Zagadnienie zostało zatem sprowadzone do rozwiązania równania analogicznego do (4.28$_1$) ale w przestrzeni wymiaru niższego o jeden. Zgodnie z twierdzeniem 3.1 równanie (4.32) jest rozwiązalne w $\mathcal{D}'(\Delta_2)$, przy czym wszystkie rozwiązania są postaci

$$h = h_1 + c, \tag{4.33}$$

gdzie h_1 jest pewnym rozwiązaniem szczególnym, c zaś dowolną stałą. Wzory (4.29), (4.33) określają rozwiązanie układu, co daje punkt 1° tezy. Aby udowodnić punkt 2° załóżmy, że $g_1 = g_2 = 0$. Wówczas można przyjąć $G_1 = \text{const}$, skąd wynika $G_2 = p = 0$, a więc również $h = \text{const}$. □

Następujące twierdzenie będzie wykorzystane w dalszym ciągu książki.

TWIERDZENIE 4.3. *Niech Ω będzie dowolnym obszarem w $\mathbf{R}^n$. Jeśli $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ oraz $D^\alpha u = 0$ dla $|\alpha| = r + 1$, to u jest wielomianem stopnia $\leqslant r$.*

Wystarczy dowieść, że u jest wielomianem w każdej kostce otwartej zawartej w Ω. Wobec tego założymy, że Ω jest kostką i oprzemy się na twierdzeniu 4.2. Ustalając wielowskaźnik β rzędu r oznaczmy $D^\beta u = v_1$. Na podstawie założenia dystrybucja v_1 spełnia układ równań

$$D_j v_1 = 0 \quad (j = 1, \ldots, n);$$

zgodnie z twierdzeniem 4.2 jest więc funkcją stałą. Zatem wszystkie pochodne $D^\beta u$ $(|\beta| = r)$ są funkcjami stałymi. Ustalając następnie wielowskaźnik β rzędu $r - 1$ i oznaczając $D^\beta u = v_2$ widzimy, że dystrybucja v_2 spełnia układ równań

$$D_j v_2 = c_j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

gdzie c_j są stałymi. Stosując ponownie twierdzenie 4.2 stwierdzamy, że v_2 jest funkcją liniową. Zatem wszystkie pochodne $D^\beta u$ $(|\beta| = r - 1)$ są funkcjami liniowymi. Ustalmy teraz dowolnie wielowskaźnik β rzędu $r-2$ i przyjmijmy $D^\beta u = v_3$ Dystrybucja v_3 spełnia układ równań

$$D_j v_3 = g_j \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{4.34}$$

gdzie g_j są funkcjami liniowymi, przy czym z przemienności różniczkowania dystrybucyjnego wynikają warunki (4.27). Przeprowadzając rachunek podobny do przedstawionego na początku niniejszego punktu możemy znaleźć jedno z rozwiązań układu (4.34) będące wielomianem stopnia $\leqslant 2$. Z twierdzenia 4.2 wynika, że dowolne inne rozwiązanie układu (4.34) jest również takim wielomianem. Zatem wszystkie pochodne $D^\beta u$ $(|\beta| = r - 2)$ są wielomianami stopnia $\leqslant 2$. Powtarzając przeprowadzone rozumowanie stwierdzamy ostatecznie, że u jest wielomianem stopnia $\leqslant r$. □

5. Przykłady rozwiązań podstawowych

Przybliżymy Czytelnikowi pojęcie dystrybucji wielu zmiennych przez zbadanie kilku przykładów ważnych w teorii równań różniczkowych.

5.1. Rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a. Funkcja $U_3(x) =$ $x|$ $(x \in \mathbf{R}^3)$ jest lokalnie całkowalna, gdyż po wprowadzeniu współrzędnych rycznych,

$$x_1 = r\cos\vartheta\cos\omega, \quad x_2 = r\cos\vartheta\sin\omega, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi, \ -\pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2, \quad x_3 = r\sin\vartheta,$$

my

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} \frac{dx}{|x|} = 2\pi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta .$$

Możemy ją zatem traktować jako dystrybucję w $\mathbf{R}^3$ i obliczyć jej laplasjan, niczkując w sensie dystrybucyjnym. Dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$ mamy

1) $$\langle \Delta U_3, \varphi\rangle = \int\limits_{|x|\leqslant a} \frac{\Delta\varphi}{|x|}dx ,$$

ie a jest liczbą dodatnią dobraną tak, aby $\operatorname{supp}\varphi \subset K(0,a)$. Niech

$$I_\varepsilon = \int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant a} \frac{\Delta\varphi}{|x|}dx .$$

Całkując dwukrotnie przez części i wykorzystując fakt, że funkcja φ znika w czeniu sfery $|x| = a$, otrzymujemy

2) $$I_\varepsilon = \int\limits_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant a} \Big(\Delta\frac{1}{|x|}\Big)\varphi\,dx - \int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{1}{|x|}\Big)d\sigma + \int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma ,$$

ie ν jest wektorem normalnym do sfery $|x| = \varepsilon$, skierowanym do jej środka. rwsza całka po prawej stronie (5.2) znika, gdyż, jak łatwo sprawdzić,

3) $$\Delta\frac{1}{|x|} = 0 \quad (x \neq 0).$$

Oprócz tego, na sferze $|x| = \mathrm{const}$, mamy

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|} = -\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2},$$

d

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \varphi\,d\sigma - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma$$

albo, po odjęciu i dodaniu pod całką wartości $\varphi(0)$,

(5.4) $$I_\varepsilon = -4\pi\varphi(0) - A_\varepsilon - B_\varepsilon ,$$

gdzie

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{|x|=\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)]d\sigma, \qquad B_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma .$$

Ponieważ funkcja φ jest ciągła, więc do dowolnie obranego $\eta > 0$ można dobrać ε_0 tak, aby dla $\varepsilon < \varepsilon_0$ i dla $|x| = \varepsilon$ zachodziła nierówność $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$. Wówczas, dla $\varepsilon < \varepsilon_0$, mamy $|A_\varepsilon| \leqslant 4\pi\eta$, co oznacza, że

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} A_\varepsilon = 0 .$$

Podobnie, korzystając z faktu, że pochodna $\partial\varphi/\partial\nu$ jako funkcja ciągła o zwartym nośniku jest ograniczona, otrzymujemy

$$|B_\varepsilon| \leqslant \sup\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big| 4\pi\varepsilon ,$$

a więc również

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} B_\varepsilon = 0 .$$

Po przejściu do granicy dla $\varepsilon \to 0$ z (5.1) i (5.4) dostajemy

$$\langle \Delta U_3, \varphi\rangle = -4\pi\varphi(0) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3))$$

albo — krócej — po podzieleniu przez współczynnik

(5.5) $$\Delta\Big(-\frac{1}{4\pi|x|}\Big) = \delta ,$$

gdzie pochodne występujące po lewej stronie należy rozumieć w sensie dystrybucyjnym.

Funkcja $-(1/4\pi)U_3$ odgrywa ważną rolę w teorii równania Laplace'a i nosi nazwę *rozwiązania podstawowego*. Jest ona rozwiązaniem równania w sensie tradycyjnym w całej przestrzeni, z wyjątkiem punktu $x = 0$, w którym nie jest określona. Równość (5.5) pokazuje, że funkcja $-(1/4\pi)U_3$, traktowana jako dystrybucja, spełnia (teraz już w całej przestrzeni $\mathbf{R}^3$) równanie niejednorodne, w którym prawa strona jest deltą Diraca. Uogólniając ten fakt przyjmuje się w nowoczesnej teorii równań różniczkowych następującą definicję. Niech

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha$$

będzie liniowym operatorem różniczkowym o stałych współczynnikach. Dystrybucję $e \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ nazywamy *rozwiązaniem podstawowym operatora* P (używa się także terminu: *rozwiązanie podstawowe równania różniczkowego* $P(D)u = 0$), jeśli $P(D)e = \delta$.

Niech

$$U_2(x) = \ln \frac{1}{|x|} \qquad (x \in \mathbf{R}^2)$$

oraz

$$U_n(x) = \frac{1}{(n-2)|x|^{n-2}} \qquad (x \in \mathbf{R}^n, n > 3)$$

i niech σ_n oznacza miarę sfery jednostkowej w $\mathbf{R}^n$ (dla $n = 2$ sfera jednostkowa jest oczywiście okręgiem o promieniu 1, zatem $\sigma_2 = 2\pi$). Przeprowadzając podobny rachunek na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ lub w przestrzeni $\mathbf{R}^n$ stwierdzamy, że funkcja $-(1/\sigma_n)U_n$ jest rozwiązaniem podstawowym operatora Laplace'a dla dowolnego $n \geqslant 2$. Szczegóły rachunkowe pozostawiamy Czytelnikowi.

5.2. Rozwiązanie podstawowe równania przewodnictwa cieplnego. Wykażemy, że funkcja

$$V(x,t) = -1_+(t)(2\sqrt{\pi t})^{-n} \exp(-|x|^2/4t) \qquad (x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}),$$

gdzie

$$1_+(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t \leqslant 0, \end{cases}$$

jest rozwiązaniem podstawowym równania przewodnictwa cieplnego

$$\Delta_x u - u_t = 0. \tag{5.6}$$

Najpierw sprawdzimy, że V jest lokalnie całkowalna, może być zatem traktowana jako dystrybucja. Podstawienie

$$y = x/2\sqrt{t} \tag{5.7}$$

daje dla ustalonego $t > 0$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |V(x,t)|\,dx = (\sqrt{\pi})^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|y|^2}\,dy = 1, \tag{5.8}$$

zatem dla dowolnego $T > 0$ całka

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^n} |V(x,t)|\,dx\,dt$$

jest skończona. Korzystając z definicji różniczkowania w sensie dystrybucyjnym otrzymujemy

$$\langle \Delta_x V - V_t, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} (A_\varepsilon + B_\varepsilon), \tag{5.9}$$

gdzie

$$A_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbf{R}^n} V \Delta_x \varphi\,dx\,dt, \qquad B_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbf{R}^n} V \varphi_t\,dx\,dt.$$

W całce A_ε wykonajmy całkowanie przez części, co jest możliwe, gdyż funkcja podcałkowa jest klasy C^∞ dla $t \geqslant \varepsilon > 0$. Pamiętając, że funkcja φ znika tożsamościowo poza pewnym ograniczonym zbiorem, otrzymujemy

$$A_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (\Delta_x V)\varphi\,dx\,dt. \tag{5.10}$$

W całce B_ε możemy zmienić kolejność całkowania, gdyż funkcja podcałkowa jest całkowalna na nośniku φ. Całkując następnie przez części, dostajemy

$$B_\varepsilon = -\int_{\mathbf{R}^n} \int_\varepsilon^\infty V_t \varphi\,dt\,dx - \int_{\mathbf{R}^n} V(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx. \tag{5.11}$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że dla $t > 0$ funkcja V spełnia równanie (5.6). Wobec tego, po dodaniu (5.10) i (5.11), z (5.9) dostajemy

$$\langle \Delta_x V - V_t, \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbf{R}^n} V(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,dx. \tag{5.12}$$

Całkę po prawej stronie (5.12) można zapisać jako sumę całek

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}^n} V(x,\varepsilon)[\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)]\,dx \quad \text{oraz} \quad J_\varepsilon = \int_{\mathbf{R}^n} V(x,\varepsilon)\varphi(x,0)\,dx.$$

Funkcja φ jest jednostajnie ciągła, zatem do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać ε_η tak, by dla $0 < \varepsilon < \varepsilon_\eta$ zachodziła nierówność

$$|\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0)| < \eta \qquad (x \in \mathbf{R}^n). \tag{5.13}$$

Po wykorzystaniu (5.13) i podstawieniu

$$z = x/2\sqrt{\varepsilon} \tag{5.14}$$

dostajemy $|I_\varepsilon| \leqslant \eta$ dla $\varepsilon < \varepsilon_\eta$. A więc

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} I_\varepsilon = 0. \tag{5.15}$$

Pozostaje zbadanie całki J_ε, którą — po wykonaniu podstawienia (5.14) — zapiszemy w postaci

(5.16) $$J_\varepsilon = K_\varepsilon - \varphi(0,0),$$

gdzie

(5.17) $$K_\varepsilon = (\sqrt{\pi})^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|z|^2}(\varphi(0,0) - \varphi(2\sqrt{\varepsilon}\,z, 0))\,dz.$$

Wobec (5.12), (5.15) i (5.16) mamy

(5.18) $$\langle \Delta_x V - V_t, \varphi\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0+} K_\varepsilon + \varphi(0,0)$$

i dla zakończenia rachunku pozostaje wykazać, że granica po prawej stronie (5.18) jest równa zeru.

Niech $M = \sup|\varphi|$ i dobierzmy do danego $\eta > 0$ liczbę ϱ tak, aby

(5.19) $$\int_{|z|\geqslant\varrho} e^{-|z|^2}\,dz < \frac{\eta}{4M(\sqrt{\pi})^{-n}}.$$

Rozbijając obszar całkowania w całce K_ε, dostajemy

(5.20) $$|K_\varepsilon| \leqslant \frac{\eta}{2} + (\sqrt{\pi})^{-n} \int_{|z|\leqslant\varrho} e^{-|z|^2}(\varphi(0,0) - \varphi(2\sqrt{\varepsilon}\,z, 0))\,dz.$$

Rozumując podobnie jak przy badaniu całki I_ε, wykazujemy, że do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać $\bar\varepsilon_\eta$ tak, by dla $\varepsilon \leqslant \bar\varepsilon_\eta$ całka po prawej stronie (5.20) była co do modułu mniejsza niż $\eta/2$. Zatem $|K_\varepsilon| \leqslant \eta$ dla $\varepsilon \leqslant \bar\varepsilon_\eta$, co kończy dowód.

5.3. Rozwiązanie podstawowe równania fali przestrzennej. Oznaczając przez S gładką $(n-1)$-wymiarową powierzchnię w $\mathbf{R}^n$, wprowadzimy uogólnienie delty Diraca jako

(5.21) $$\langle \delta_S, \varphi\rangle = \int_S \varphi\,d\sigma \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)).$$

Niech w szczególności S_a oznacza sferę $|x| = a$ w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ i niech

(5.22) $$\langle E_3, \varphi\rangle = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_{|x|=ct} \varphi(x,t)\,d\sigma_x\,dt,$$

gdzie $x \in \mathbf{R}^3$, $t \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^4)$, zapis zaś $d\sigma_x$ oznacza, że całkujemy po S_{ct} względem miary powierzchniowej. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że

oba funkcjonały δ_S oraz E_3 spełniają warunki ($w_{4.3}$) i ($w_{4.4}$), są więc dystrybucjami.

Za pomocą wprowadzonych oznaczeń możemy dystrybucję E_3 zapisać krócej

$$E_3 = \frac{-1_+(t)}{4\pi t}\delta_{S_{ct}}.$$

Udowodnimy, że jest ona rozwiązaniem podstawowym równania fali przestrzennej

(5.23) $$\Delta_x u - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}^3,\ t \in \mathbf{R}).$$

Zaczniemy od przekształcenia całki po prawej stronie (5.22). Podstawienie $ct = r$ w wewnętrznej całce daje

(5.24) $$\langle E_3, \varphi\rangle = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{1}{r}\int_{|x|=r} \varphi\Big(x, \frac{r}{c}\Big)\,d\sigma_x\,dr.$$

Wprowadzając współrzędne sferyczne w $\mathbf{R}^3$ (por. p. 5.1) możemy łatwo sprawdzić, że $d\sigma_x = r^2 d\mu$, gdzie μ oznacza miarę na sferze jednostkowej. Zatem

(5.25) $$\langle E_3, \varphi\rangle = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty r\int_{|y|=1} \varphi\Big(ry, \frac{r}{c}\Big)\,d\mu\,dr,$$

przy czym do całki iterowanej po prawej stronie można zastosować twierdzenie Fubiniego. Przechodząc do współrzędnych sferycznych sprawdzamy, że

(5.26) $$r^2 d\mu = dx \qquad (r = |x|)$$

i z (5.25) oraz z (5.26) ostatecznie dostajemy

(5.27) $$\langle E_3, \varphi\rangle = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\varphi(x, |x|/c)}{|x|}\,dx,$$

a stąd, zgodnie z definicją różniczkowania dystrybucyjnego,

(5.28) $$\langle \Box E_3, \varphi\rangle = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{(\Box\varphi)(x, |x|/c)}{|x|}\,dx.$$

Pozostaje sprawdzić, że prawa strona (5.28) jest równa $\varphi(0,0)$ dla dowolnie obranej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^4)$. Dla wygodniejszego zapisu wprowadzimy oznaczenie

(5.29) $$[g](x) = g\left(x, \frac{|x|}{c}\right) \qquad (x \in \mathbf{R}^3).$$

Funkcja $v = [\varphi]$ jest klasy $C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$, możemy więc do całki

$$J_\varepsilon = \int\limits_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\Delta v}{r} dx \qquad (r = |x|)$$

:astosować regułę całkowania przez części, co daje

$$J_\varepsilon = \int\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{1}{r}\right) v\, d\sigma - \int\limits_{r=\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vec{r}} d\sigma, \tag{5.30}$$

:żeli uwzględnimy fakt, że wektor $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$ ma kierunek normalny do sfery $r = \varepsilon$ jest zwrócony na zewnątrz. Po obliczeniu pochodnej normalnej możemy (5.30) apisać w postaci

$$J_\varepsilon = K_\varepsilon, \tag{5.31}$$

dzie

$$K_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{r=\varepsilon} (v(0) - v(x))dx - 4\pi v(0) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \vec{r}} d\sigma. \tag{5.32}$$

Celem dalszych rachunków będzie obustronne przejście do granicy w (5.31) la $\varepsilon \to 0$. Zaczniemy od całki J_ε. Niech $h = [\varphi_t]$. Bezpośrednie różniczkowanie ozwala sprawdzić, że

$$\Delta v = [\Box\varphi] + \frac{2}{cr}\frac{\partial(rh)}{\partial \vec{r}},$$

: po obliczeniu pochodnej kierunkowej daje

$$\frac{\Delta v}{r} = \frac{[\Box\varphi]}{r} + \frac{2}{c}\sum_{j=1}^{3} D_j(rh)D_j\left(\frac{1}{r}\right). \tag{5.33}$$

Uwzględniając (5.33), całkując przez części, otrzymujemy

$$J_\varepsilon = \int\limits_{r \geqslant \varepsilon} \frac{[\Box\varphi]}{r} dx - I_\varepsilon, \tag{5.34}$$

dzie

$$I_\varepsilon = \frac{2}{c}\sum_{j=1}^{3} \int\limits_{r=\varepsilon} rhD_j\left(\frac{1}{r}\right)\cos(\vec{r}, x_j)d\sigma,$$

zatem, po wykonaniu różniczkowania pod całką,

$$I_\varepsilon = -\frac{2}{c\varepsilon}\int\limits_{r=\varepsilon} h\, d\sigma. \tag{5.35}$$

Ponieważ funkcja h jest ograniczona, zatem z (5.35) dostajemy

$$|I_\varepsilon| \leqslant \frac{8\pi}{c}\varepsilon \sup |h|,$$

a więc $\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0$. Ponieważ funkcja $[\Box\varphi]$ ma ograniczony nośnik, a $1/r$ jest funkcją lokalnie całkowalną (por. p. 5.1), równość (5.34) daje

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = \int\limits_{\mathbf{R}^3} \frac{[\Box\varphi]}{r} dx. \tag{5.36}$$

Przejdźmy do wyrażenia K_ε. Z ciągłości funkcji v wynika, że dla dowolnie danego $\eta > 0$ można dobrać ε_η tak, by dla $|x| < \varepsilon_\eta$ zachodziła nierówność $|v(0) - v(x)| < \eta/4\pi$. Zatem dla $\varepsilon < \varepsilon_\eta$ mamy

$$\left|\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{r=\varepsilon} (v(0) - v(x))dx\right| \leqslant \eta,$$

co oznacza, że pierwszy wyraz po prawej stronie (5.32) dąży do zera wraz z ε. Ponadto wyrażenie $\partial v/\partial \vec{r}|_{r=\varepsilon}$ jest ograniczone przez stałą niezależną od ε, więc

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \vec{r}} d\sigma\right| \leqslant \text{const}\cdot\varepsilon.$$

Wobec tego przejście do granicy w (5.32) daje

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = -4\pi\varphi(0,0), \tag{5.37}$$

co po uwzględnieniu (5.31) i (5.36) kończy dowód.

5.4. Nośnik dystrybucji. Rozważmy dwa obszary $\Omega \subset \Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$. Oczywiście każda dystrybucja $f \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ może być rozważana jako funkcjonał liniowy na węższej klasie funkcji próbnych $C_0^\infty(\Omega)$. Nie jest trudno sprawdzić, że jest to funkcjonał ciągły ze względu na zbieżność w przestrzeni $\mathcal{D}(\Omega)$. Funkcjonał ten nazywamy *obcięciem* lub *zwężeniem dystrybucji* f do obszaru Ω i oznaczamy przez $f|_\Omega$. Mówimy, że dystrybucja f *znika w obszarze* Ω, jeżeli $f|_\Omega$ jest funkcjonałem zerowym. Innymi słowy, dystrybucja f znika w Ω, jeżeli $\langle f, \varphi\rangle = 0$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. W tym drugim sformułowaniu Ω może być dowolnym otwartym (niekoniecznie spójnym) podzbiorem Ω_0.

Nośnikiem dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\Omega_0)$ będziemy nazywali najmniejszy zbiór [1] K o następujących własnościach:

---

[1] Przez *najmniejszy zbiór* rozumiemy tu część wspólną wszystkich zbiorów mających własność (i) oraz (ii).

(i) $\Omega_0 \setminus K$ jest zbiorem otwartym,
(ii) f znika w $\Omega_0 \setminus K$.
Nośnik dystrybucji f oznaczamy przez $\underline{f}$ lub $\operatorname{supp} f$.

Przykład 5.1. Dystrybucja $\delta(x-a)$ znika w zbiorze $\mathbf{R}^n \setminus \{a\}$. Jej nośnikiem est zbiór jednopunktowy $\{a\}$.

Przykład 5.2. Nośnikiem rozwiązania podstawowego E_3 jest powierzchnia stożka $C : |x| = ct, t \geqslant 0$. Istotnie, jeżeli $\underline{\varphi} \subset \mathbf{R}^4 \setminus C$, to funkcja φ znika w otoczeniu powierzchni C i ze wzoru (5.22) wynika natychmiast, że $\langle E_3, \varphi\rangle = 0$. Nobec tego $\operatorname{supp} E_3$ zawiera się w zbiorze C. Aby udowodnić równość, wystarczy pokazać, że dla dowolnie obranego punktu $(\mathring{x}, \mathring{t}) \in C$ można znaleźć funkcję $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^4)$ spełniającą warunki: $\varphi(\mathring{x}, \mathring{t}) \neq 0$ i $\langle E_3, \varphi\rangle \neq 0$. Funkcją taką jest

$$\varphi(x,t) = h\left(1 - \frac{|x-\mathring{x}|^2 + |t-\mathring{t}|^2}{\alpha^2}\right),$$

dzie h jest funkcją określoną wzorem (1.17), α zaś ustaloną liczbą dodatnią.

Każda dystrybucja jest z definicji funkcjonałem liniowym na przestrzeni funkcji gładkich o zwartym nośniku. Z twierdzenia, które udowodnimy w tym punkcie, wyniknie, że funkcjonał ten można przy odpowiednich założeniach rozszerzyć jednoznacznie na pewną nieco obszerniejszą klasę funkcji gładkich.

Zaczniemy od zmodyfikowania funkcji φ_a (wzory (4.1), (4.2)), wprowadzonej jako przykład funkcji gładkiej o zwartym nośniku. Jak łatwo sprawdzić,

$$\varphi_a(x) = \varphi_1(x/a).$$

Funkcja φ_1 spełnia następujące warunki:

($w'_{5.1}$) $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, nośnikiem φ_1 jest kula $|x| \leqslant 1$;
($w'_{5.2}$) $\varphi_1(x) \geqslant 0$.

Wobec tego, przyjmując

($w_{5.1}$) $\omega_a(x) = a^{-n}\omega_1(x/a)$ $(a > 0, x \in \mathbf{R}^n)$, gdzie

$$\omega_1(x) = c^{-1}\varphi_1(x), \qquad c = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_1,$$

otrzymujemy jednoparametrową rodzinę funkcji ω_a o następujących własnościach:

($w_{5.2}$) $\omega_a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$;
($w_{5.3}$) nośnikiem funkcji ω_a jest kula $|x| \leqslant a$;
($w_{5.4}$) $\omega_a(x) \geqslant 0$;
($w_{5.5}$) $\int_{|x|\leqslant a} \omega_a(x)dx = 1$.

Jak łatwo sprawdzić, zachodzi związek

$$\omega_a(x) = c^{-1}a^{-n}\varphi_a(x). \tag{5.38}$$

Lemat 5.1. *Jeżeli $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$, to funkcja*

$$(\omega_a * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \omega_a(x-y)f(y)\,dy \tag{5.39}$$

jest klasy $C^\infty(\mathbf{R}^n)$; pochodne jej obliczamy różniczkując pod znakiem całki.

Całkę (5.39) nazywamy *splotem* funkcji ω_a i f.

Dowód przeprowadzimy dla $n = 1$, aby uprościć zapis. Niech $f_a = \omega_a * f$ i niech $|h| < 1$. Dla ustalonego $\mathring{x}$ mamy

$$f_a(\mathring{x}+h) - f_a(\mathring{x}) = \int_{\mathring{x}-a-1}^{\mathring{x}+a+1} [\omega_a(\mathring{x}+h-y) - \omega_a(\mathring{x}-y)]f(y)\,dy. \tag{5.40}$$

Ponieważ ω_a jest funkcją jednostajnie ciągłą, można dla dowolnie danego $\varepsilon > 0$ dobrać h_ε tak, by dla $|h| < h_\varepsilon$ zachodziła nierówność

$$|\omega_a(\mathring{x}+h-y) - \omega_a(\mathring{x}-y)| \leqslant \varepsilon/d, \tag{5.41}$$

gdzie

$$d = \int_{\mathring{x}-a-1}^{\mathring{x}+a+1} |f(y)|\,dy.$$

Z (5.40) i (5.41) wynika, że $|f_a(\mathring{x}+h) - f_a(\mathring{x})| < \varepsilon$ dla $|h| < h_\varepsilon$, co dowodzi ciągłości funkcji f_a w punkcie $\mathring{x}$. Aby udowodnić różniczkowalność, zapiszemy iloraz różniczkowy w postaci

$$\frac{f_a(\mathring{x}+h) - f_a(\mathring{x})}{h} = \int_{\mathring{x}-a-1}^{\mathring{x}+a+1} \omega'_a(\mathring{x}+\theta h-y)f(y)\,dy, \tag{5.42}$$

gdzie $\theta \in (0,1)$. Ponieważ pochodna ω'_a jest ograniczona, f zaś całkowalna na przedziale całkowania, możemy do prawej strony (5.42) zastosować twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i przejść do granicy pod znakiem całki dla $h \to 0$, co daje

$$f'_a(\mathring{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega'_a(\mathring{x}-y)f(y)\,dy.$$

Powtarzając opisane rozumowanie, dowodzimy ciągłości f'_a oraz istnienia i ciągłości pochodnych wyższych rzędów. □

Zauważmy, że w dowodzie lematu 5.1 nie korzystaliśmy z efektywnego wzoru określającego funkcję ω_a, a jedynie z jej własności ($w_{5.2}$) i ($w_{5.3}$). W związku z tym lemat pozostaje słuszny po zastąpieniu funkcji (5.38) przez dowolną inną unkcję ω_a, byleby spełniała ona wymienione warunki. Ze względu na własność udowodnioną w lemacie 5.1, każdą rodzinę funkcji ω_a spełniającą warunki ($w_{5.1}$) – $w_{5.5}$) będziemy nazywali *jądrem wygładzającym*. Funkcje takie odgrywają ważną rolę w analizie. Zauważmy, że aby skonstruować jądro wygładzające, wystarczy mieć do dyspozycji jakąkolwiek funkcję φ_1, spełniającą ($w'_{5.1}$) i ($w'_{5.2}$) i posłużyć się warunkiem ($w_{5.1}$). Udowodniony lemat 5.1 jest bardzo użyteczny, gdyż pozwala konstruować niejako „na zamówienie" funkcje gładkie, których nośnik zawarty jest w danym z góry zbiorze otwartym. Spróbujmy rozwiązać następujące zadanie:

Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbf{R}^n$ i niech dany będzie zbiór zwarty $F \subset \Omega$. Skonstruować funkcję η spełniającą warunki:

($w_{5.6}$) $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$;
($w_{5.7}$) $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ $(x \in \mathbf{R}^n)$;
($w_{5.8}$) $\eta(x) = 1$ dla $x \in F$.

W dalszym ciągu przez *odstęp* zbiorów $A, B \subset \mathbf{R}^n$ będziemy rozumieli liczbę

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} |x - y| .$$

Zakładając $\Omega \neq \mathbf{R}^n$ przyjmijmy $h = \operatorname{dist}(F, \partial\Omega)$. Jak można łatwo sprawdzić (por. zadanie 6), jest to liczba dodatnia. W przypadku gdy $\Omega = \mathbf{R}^n$ obierzemy jako h dowolnie ustaloną liczbę dodatnią.

Niech

$$F_\alpha = \{x + y : x \in F, |y| \leqslant \alpha\}$$

niech

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in F_{h/2}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Wówczas funkcję η określamy jako splot:

$$\eta = \omega_{h/4} * \gamma .$$

Z lematu 5.1 wynika, że jest to funkcja klasy $C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Sprawdzenie warunków ($w_{5.6}$)–($w_{5.8}$) pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Możemy teraz udowodnić

TWIERDZENIE 5.1. *Niech $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ będzie dowolnym obszarem a $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Funkcjonał f można jednoznacznie rozszerzyć na klasę*

$$\mathcal{F}_f = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \underline{f} \cap \underline{\varphi} \text{ jest zbiorem zwartym}\} .$$

Dla $\varphi \in \mathcal{F}_f$ pozostaje słuszna równość

$$(5.43)\qquad \langle D_j f, \varphi\rangle = -\langle f, D_j\varphi\rangle .$$

Dla dowodu niech $F = \underline{f} \cap \underline{\varphi}$ i niech $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ będzie funkcją równą 1 w zbiorze $F_{h/2}$. Przyjmiemy dla $\varphi \in \mathcal{F}_f$

$$(5.44)\qquad \langle f, \varphi\rangle = \langle f, \eta\varphi\rangle .$$

Prawa strona (5.44) jest dobrze określona, gdyż $\eta\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Obierając dwie różne funkcje η_1, η_2 mamy

$$\langle f, \eta_1\varphi\rangle - \langle f, \eta_2\varphi\rangle = \langle f, (\eta_1 - \eta_2)\varphi\rangle = 0 ,$$

gdyż funkcja $(\eta_1 - \eta_2)\varphi$ znika tożsamościowo w otoczeniu nośnika f. Rozszerzenie (5.44) jest zatem jednoznaczne.

Aby sprawdzić (5.43) zauważmy, że z definicji różniczkowania dystrybucyjnego, wobec (5.44), dla $\varphi \in \mathcal{F}_f$ mamy

$$(5.45)\qquad \langle D_j f, \varphi\rangle = -\langle f, (D_j\eta)\varphi\rangle - \langle f, \eta D_j\varphi\rangle .$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie jest zerem, gdyż funkcja $(D_j\eta)\varphi$ znika w otoczeniu nośnika f. Ponieważ $D_j\varphi$ również należy do klasy $\mathcal{F}_f$, więc z (5.44) (5.45) wynika (5.43). □

WNIOSEK 5.1. *Jeżeli $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, przy czym zbiory* $\operatorname{supp} f$ *oraz* $\operatorname{supp}\varphi$ *są rozłączne, to $\varphi \in \mathcal{F}_f$ oraz $\langle f, \varphi\rangle = 0$.*

Dowód. Zbiór F, wprowadzony w dowodzie twierdzenia 5.1, jest pusty, zatem za η można przyjąć dowolną funkcję klasy $C_0^\infty(\Omega)$. W szczególności można wziąć $\eta \equiv 0$. □

5.5. Rozwiązanie podstawowe równania fali płaskiej. *Równaniem fali płaskiej* nazywamy równanie falowe (1.2) w przypadku $n = 2$.

Zaczniemy od prostego spostrzeżenia: każde rozwiązanie równania fali płaskiej jest jednocześnie rozwiązaniem równania fali przestrzennej niezależnym od x_3 i vice versa. Wobec tego rozwiązań równania falowego dla $n = 2$ należy szukać wśród funkcji spełniających to równanie dla $n = 3$. Jest to tzw. *metoda zstępowania* (z przestrzeni $\mathbf{R}^3$ na płaszczyznę $\mathbf{R}^2$).

Ponieważ znamy już rozwiązanie podstawowe równania fali przestrzennej, zastosujemy metodę zstępowania w nieco zmienionej „dystrybucyjnej" wersji do znalezienia rozwiązania podstawowego równania fali płaskiej.

Niech $\psi(x_1, x_2, t)$ będzie funkcją klasy $C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ i niech zbiór zwarty $F \subset \mathbf{R}^3$ będzie jej nośnikiem. Funkcję ψ możemy traktować jako funkcję gładką, określoną w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ i niezależną od x_3; wtedy jej nośnikiem będzie zbiór walcowy F_0, będący produktem F przez oś x_3. Oczywiście, F_0 nie jest zbiorem ograniczonym w $\mathbf{R}^4$, łatwo jednak sprawdzić, że jego przecięcie z nośnikiem rozwiązania podstawowego E_3 (por. przykład 5.2) jest zbiorem zwartym. Wobec tego możemy zastosować twierdzenie 5.1. Zbadajmy dokładniej, w jaki sposób będzie działać dystrybucja E_3 na funkcję ψ.

Zgodnie z wzorem (5.22) mamy

$$\langle E_3, \psi \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{ct}} \psi(x_1, x_2, t)\, d\sigma_x\, dt,$$

gdzie S_{ct} jest powierzchnią kuli o środku w początku układu i promieniu ct w przestrzeni $\mathbf{R}^3$. Powierzchnię tę można opisać dwoma równaniami:

$$x_3 = \pm\sqrt{c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Wówczas

$$d\sigma_x = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_1\, dx_2.$$

Po rozbiciu kuli na półkulę górną i dolną, wewnętrzna całka przyjmuje postać

$$2 \int_{\varrho \leqslant ct} \frac{ct\psi(x_1, x_2, t)}{\sqrt{c^2t^2 - \varrho^2}} dx_1\, dx_2 \qquad \left(\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),$$

zatem

.46) $$\langle E_3, \psi \rangle = -\frac{c}{2\pi} \int_0^\infty \int_{\varrho \leqslant ct} \frac{\psi(x_1, x_2, t)}{\sqrt{c^2t^2 - \varrho^2}} dx\, dt.$$

Równość (5.46) można zapisać też w postaci

47) $$\langle E_3, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^2} E_2 \psi\, dx\, dt,$$

zie

18) $$E_2(x, t) = -\frac{c}{2\pi} \frac{1_+(t) 1_+(ct - |x|)}{\sqrt{c^2t^2 - |x|^2}} \qquad (x \in \mathbf{R}^2).$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe na płaszczyźnie, można wykazać, że kcja E_2 jest lokalnie całkowalna, może więc być traktowana jako dystrybucja. Sprawdzimy, że jest to rozwiązanie podstawowe równania falowego dla $n = 2$. tnie, różniczkując w sensie dystrybucyjnym, wobec (5.47) otrzymujemy

9) $$\langle \Box_2 E_2, \psi \rangle = \langle E_3, \Box_2 \psi \rangle,$$

ale $\Box_2 \psi = \Box_3 \psi$ i wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 5.1, $\langle E_3, \Box_2 \psi \rangle = \langle \Box_3 E_3, \psi \rangle$, czyli

(5.50) $$\langle E_3, \Box_2 \psi \rangle = \langle \delta, \psi \rangle = \psi(0, 0, 0).$$

Z (5.49) i (5.50) wynika, że $\Box_2 E_2 = \delta$.

6. Zbieżność w przestrzeni $\mathcal{D}'(\Omega)$

6.1. Definicja i przykłady. Mówimy, że ciąg $\{f_k\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ jest *zbieżny (słabo) do dystrybucji* f, jeżeli

$$\lim_{k \to \infty} \langle f_k, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definicja ta przenosi się bez zmiany na przypadek, gdy zamiast ciągu mamy jednoparametrową rodzinę dystrybucji $R \supset A \ni a \to f_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Przyjmujemy mianowicie

$$\lim_{a \to \alpha} f_a = f$$

w sensie słabej zbieżności, jeżeli

$$\lim_{a \to \alpha} \langle f_a, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Zbieżność i *sumę* szeregu dystrybucji określamy podobnie jak to robi się dla szeregów liczbowych, tzn. przyjmujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{m \to \infty} S_m, \qquad \text{gdzie } S_m = \sum_{k=1}^{m} f_k.$$

PRZYKŁAD 6.1. Funkcja $\sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$ jest dystrybucją regularną na $\mathbf{R}$. Ponieważ

$$\sin kx = \left(-\frac{1}{k} \cos kx\right)',$$

więc dla dowolnie ustalonej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, po scałkowaniu przez części, dostajemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin kx\, dx = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \cos kx\, dx$$

i wobec tego

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin kx\, dx \right| \leqslant \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|\, dx.$$

A zatem, zgodnie z przyjętą definicją,

$$\lim_{k\to\infty} \sin kx = 0 \tag{6.1}$$

w sensie słabej zbieżności. Warto zauważyć, że ciąg $\{\sin kx\}$ nie ma granicy punktowej dla żadnego x nie będącego całkowitą wielokrotnością π.

PRZYKŁAD 6.2. Niech ω_a będzie dowolną funkcją ciągłą na $\mathbf{R}^n$, spełniającą warunki $(w_{5.2})$–$(w_{5.5})$ (w szczególności może to być funkcja określona wzorem (5.38) lub jakiekolwiek inne jądro wygładzające). Wówczas

$$\lim_{a\to 0+} \omega_a = \delta\,. \tag{6.2}$$

Istotnie, dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ mamy

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega_a(x)\varphi(x)\,dx = \int_{|x|\leqslant a} \omega_a(x)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \varphi(0)\,. \tag{6.3}$$

Z ciągłości funkcji φ wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $|x| < \delta$ zachodziła nierówność $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon$. Wobec tego wartość bezwzględna całki po prawej stronie (6.3) nie przekracza ε dla $a < \delta$, a to oznacza, że dąży ona do zera dla $a \to 0+$. Zatem

$$\lim_{a\to 0+} \int_{\mathbf{R}^n} \omega_a(x)\varphi(x)\,dx = \langle \delta, \varphi\rangle$$

i równość (6.2) jest udowodniona.

PRZYKŁAD 6.3. Rachunek podobny do przeprowadzonego w przykładzie 6.2 pokazuje, że dla $n = 1$

$$\lim_{a\to 0+} \omega_a(t - t_0) = \delta(t - t_0) \tag{6.4}$$

w sensie zbieżności w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Przypuśćmy, że ω_a jest funkcją określoną wzorem (5.38) i że $\omega_a(t-t_0)$ wyraża napięcie w obwodzie elektrycznym jako funkcję czasu t. Wobec tego układ jest pod napięciem jedynie w „małym" przedziale czasowym $(t_0 - a, t_0 + a)$, przy czym dla $t = t_0$ napięcie to jest „duże" (formalnie $\lim_{a\to 0+} \omega_a(t_0) = \infty$). Mówimy wówczas, że w obwodzie mamy impuls napięcia w chwili $t = t_0$. Ze względu na przejście graniczne (6.4) przyjmujemy, że impuls ten może być opisany dystrybucją $\delta(t-t_0)$. W związku z tym w literaturze technicznej przyjął się dla dystrybucji δ termin „funkcja impulsowa".

PRZYKŁAD 6.4. Niech

$$v(x,t) = (2\sqrt{\pi t})^{-n} \exp(-|x|^2/4t) \qquad (x \in \mathbf{R}^n\,,\ t > 0)\,.$$

Wykażemy, że

$$\lim_{t\to 0+} v(\cdot, t) = \delta\,, \tag{6.5}$$

jeżeli przejście do granicy rozumiemy w sensie dystrybucyjnym. Zauważmy, że funkcja v różni się jedynie znakiem od wprowadzonego w p. 5.2 rozwiązania podstawowego równania przewodnictwa cieplnego. Wobec (5.8) zadanie nasze sprowadza się do wykazania, że całka

$$J(t) = \int_{\mathbf{R}^n} v(x,t)[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx \tag{6.6}$$

zmierza do zera, gdy $t \to 0+$ dla dowolnie obranej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Niech K_δ oznacza kostkę $|x_j| \leqslant \delta$ $(j = 1, \ldots, n)$. Rozbijając obszar całkowania w całce (6.6), oznaczmy przez $J_i(t)$ $(i = 1, 2)$ całki rozciągnięte odpowiednio na kostkę K_δ i na jej dopełnienie. Obierzmy δ w taki sposób, by dla $x \in K_\delta$ zachodziła nierówność $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon/2$ (jest to możliwe wobec ciągłości funkcji φ). Wówczas, zgodnie z (5.8),

$$|J_1(t)| \leqslant \varepsilon/2\,. \tag{6.7}$$

Całka $J_2(t)$ daje się oszacować,

$$|J_2(t)| \leqslant 2M \int_{\mathbf{R}^n\setminus K_\delta} v(x,t)\,dx\,, \qquad \text{gdzie } M = \sup|\varphi|\,.$$

Po podstawieniu (5.7) dostajemy zatem

$$|J_2(t)| \leqslant 2M(\sqrt{\pi})^{-n} \int_{Q_{\delta,t}} e^{-|y|^2}\,dy\,, \tag{6.8}$$

gdzie $Q_{\delta,t}$ oznacza zbiór określony nierównościami $|y_j| \geqslant \delta/2\sqrt{t}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Ze zbieżności całki

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|y|^2}\,dy$$

wynika, że prawa strona (6.8) dąży do zera, gdy $t \to 0+$, zatem dla $t \leqslant t_\varepsilon$ dostajemy

$$|J_2(t)| < \varepsilon/2\,. \tag{6.9}$$

Nierówności (6.7) i (6.9) kończą dowód.

Łatwo sprawdzić za pomocą różniczkowania, że funkcja v spełnia równanie przewodnictwa cieplnego (5.6). Z udowodnionej równości (6.5) wynika, że opisuje ona rozkład temperatury w ośrodku pozbawionym źródeł ciepła, który w chwili $t = 0$ otrzymał impuls cieplny skupiony w początku układu.

PRZYKŁAD 6.5. Obliczymy w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ granicę

$$\lim_{\eta\to 0+} \frac{1}{x+i\eta} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{x+i0}.$$

Niech $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ będzie ustaloną funkcją o nośniku zawartym w przedziale $[-a,a]$. Możemy ją rozłożyć na sumę $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, gdzie ψ jest funkcją ciągłą dla $x \in \mathbf{R}$ (por. przykład 2.3, wzór (2.7)). Wobec tego dla $\eta > 0$ mamy

(6.10)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\eta}\,dx = \varphi(0)A_\eta + B_\eta\,,$$

gdzie

$$A_\eta = \int_{-a}^{a} \frac{x-i\eta}{x^2+\eta^2}\,dx\,, \qquad B_\eta = \int_{-a}^{a} \frac{x-i\eta}{x^2+\eta^2}x\psi(x)\,dx\,.$$

Pierwsza całka daje się obliczyć, a mianowicie

(6.11)
$$A_\eta = -2i \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{\eta} \to -i\pi \qquad (\eta\to 0+)\,.$$

Aby znaleźć granicę drugiej całki, zauważmy najpierw, że dla dowolnie ustalonego $\eta > 0$ mamy

$$\left|\frac{x(x-i\eta)}{x^2+\eta^2}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+\eta^2}} \leqslant 1\,.$$

Wobec tego wyrażenie podcałkowe w całce B_η jest ograniczone co do wartości bezwzględnej przez funkcję $|\psi(x)|$, która jako funkcja ciągła jest całkowalna na przedziale $[-a,a]$. Możemy więc zastosować twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej, co daje

(6.12)
$$\lim_{\eta\to 0+} B_\eta = \int_{-a}^{a} \psi(x)\,dx\,.$$

Jak wykazaliśmy w przykładzie 2.3, całka po prawej stronie (6.12) jest równa

$$\operatorname{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\,,$$

a więc, uwzględniając (6.10)–(6.12), dostajemy

$$\lim_{\eta\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i\eta}\,dx = -i\pi\varphi(0) + \operatorname{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

lub, w zapisie dystrybucyjnym,

(6.13)
$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}\,.$$

Podobnie można wykazać, że

(6.14)
$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}\,.$$

Wyrażenia (6.13) i (6.14) noszą nazwę *wzorów Sochockiego–Plemelja* i są używane w fizyce kwantowej.

6.2. Ciągłość działań w przestrzeni dystrybucji. Dla dowolnego odwzorowania liniowego A w przestrzeni $\mathcal{D}(\Omega)$ możemy określić operator transponowany A^{tr} w przestrzeni dystrybucji, przyjmując dla dowolnych $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

(6.15)
$$\langle A^{\text{tr}} f, \varphi\rangle = \langle f, A\varphi\rangle\,.$$

Zachodzi łatwe do udowodnienia

STWIERDZENIE 6.1. *Operator A^{tr} jest ciągły ze względu na słabą zbieżność.*

D o w ó d. A^{tr} jest operatorem liniowym, wystarczy więc udowodnić ciągłość w zerze. Niech $g_k \to 0$ w przestrzeni $\mathcal{D}'(\Omega)$. Zastępując w (6.15) dystrybucję f przez g_k i przechodząc do granicy, dostajemy

$$\lim_{k\to\infty} \langle A^{\text{tr}} g_k, \varphi\rangle = 0$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a to oznacza, że $A^{\text{tr}} g_k \to 0$. □

Zauważmy, że wprowadzone w § 4 działania na dystrybucjach mają postać odwzorowania A^{tr}, gdzie

(i) $A_\varphi = \varphi\circ d^{-1}/|\det a|$ w przypadku, gdy d jest przekształceniem afinicznym określonym wzorem $d(x) = ax + b$, w którym a jest macierzą nieosobliwą $n\times n$, a $b \in \mathbf{R}^n$;

(ii) $A\varphi = p\varphi$ w przypadku mnożenia przez funkcję $p \in C^\infty(\Omega)$;

(iii) $A\varphi = -D_j\varphi$ w przypadku różniczkowania.

Działania te są więc ciągłe ze względu na zbieżność dystrybucyjną. W szczególności, ciągłość różniczkowania dystrybucyjnego oznacza, że dowolny zbieżny ciąg dystrybucji $\{f_k\}$ może być różniczkowany wyraz za wyrazem, tj. że

$$\lim_{k\to\infty} D_j f_k = D_j f,$$

jeżeli $f = \lim_{k\to\infty} f_k$. Z różniczkowaniem ciągów bądź szeregów dystrybucji nie ma więc tych kłopotów jakie występują w analizie klasycznej, gdzie warunkiem dostatecznym przestawiania różniczkowania z przejściem do granicy jest jednostajna zbieżność ciągu zróżniczkowanego. Oczywiście, nie ma nic za darmo: równość (6.15) jest na ogół słuszna tylko dla zbieżności dystrybucyjnej, co oznacza w gruncie rzeczy bardzo niewiele (por. przykład 6.1).

PRZYKŁAD 6.6. Załóżmy, że dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ dane są funkcje $g_k \in C^1(\mathbf{R})$ i liczby a_k spełniające następujące warunki:

(i) $a_k < a_{k+1}$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_{-n} = -\infty$, $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$.

Określimy funkcję f, przyjmując $f(x) = g_k(x)$ dla $a_k \leqslant x < a_{k+1}$.

Funkcja f jest lokalnie całkowalna, można więc mówić o jej pochodnej dystrybucyjnej f'. Z drugiej strony, pochodna df/dx w zwykłym sensie jest funkcją ciągłą i ograniczoną w każdym przedziale (a_k, a_{k+1}), może więc być traktowana jako dystrybucja. Wzór (3.7), otrzymany w przypadku funkcji nieciągłej w jednym punkcie, uogólnia się następująco na przypadek przeliczalnej liczby punktów skokowych:

$$f' = \frac{df}{dx} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} [f]_{a_k} \delta(x - a_k), \tag{6.16}$$

gdzie

$$[f]_{a_k} = \lim_{x\to a_k+} f(x) - \lim_{x\to a_k-} f(x).$$

Sprawdzenie przebiega podobnie jak w przykładzie 3.1, należy tylko zauważyć, że nośnik ustalonej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ zawiera jedynie skończoną liczbę punktów a_k.

PRZYKŁAD 6.7. Niech g będzie funkcją jednej zmiennej o okresie 2π, określoną dla $0 \leqslant x < 2\pi$ wzorem

$$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}.$$

Jako funkcja ciągła i przedziałami monotoniczna jest ona równa sumie swojego szeregu Fouriera. Po obliczeniu współczynników fourierowskich i wyrażeniu

funkcji trygonometrycznych przez funkcję wykładniczą otrzymujemy

$$g(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(e^{ikx} + e^{-ikx}),$$

co można zapisać krócej

$$g(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{ikx}. \tag{6.17}$$

Stosując kryterium porównawcze zbieżności szeregów, widzimy natychmiast że szereg po prawej stronie jest zbieżny jednostajnie, a więc i w sensie dystrybucyjnym. Zróżniczkujemy w sensie dystrybucyjnym obie strony (6.17). Funkcja g jest ciągła i ma pochodną przedziałami ciągłą, wobec tego (por. przykład 6.6) jej pochodna dystrybucyjna jest równa pochodnej w zwykłym sensie określonej dla $x \neq 2k\pi$. Szereg po prawej stronie może być różniczkowany (w sensie dystrybucyjnym) wyraz za wyrazem, otrzymujemy więc

$$g'(x) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k} e^{ikx}, \tag{6.18}$$

gdzie $g'(x)$ jest funkcją o okresie 2π daną dla $x \in (0, 2\pi)$ wzorem

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}.$$

Różniczkując ponownie w sensie dystrybucyjnym, z (6.16) i (6.18) otrzymujemy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tag{6.19}$$

lub w postaci rzeczywistej, po wykonaniu redukcji

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx \tag{6.20}$$

(należy pamiętać, że zbieżność szeregów (6.18), (6.19) i (6.20) rozumiemy jak zbieżność dystrybucyjną).

Szereg po lewej stronie (6.19) bywa nazywany przez techników *deltą trygonometryczną*. Prawą stronę (6.19) można uważać za rozwinięcie delty trygonometrycznej w szereg Fouriera.

W następnym rozdziale poznamy zastosowania wzoru (6.19).

Zadania

1. Niech h będzie funkcją określoną wzorem (1.17). Sprawdzić, że $h^{(j)}(0) = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots$

2. Znaleźć nośniki podanych niżej funkcji. Które z nich należą do klasy $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$?
(a) $f(x) = \begin{cases} |x|^2(1-|x|^2) & \text{dla } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \in \mathbf{R}^n; \end{cases}$
(b) $g(x) = h(x_1 + x_2 + x_3)$, $x \in \mathbf{R}^3$;
(c) $p(x,y) = h((1-x^2)(1-y^2))$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$;
(d) $q(x,y) = \begin{cases} e^{(x^2+2y^2+1)/(x^2+2y^2-1)}, & \text{gdy } x^2+2y^2 < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$
Funkcja h jest określona wzorem (1.17).

3. Udowodnić, że działania różniczkowania i mnożenia przez funkcję gładką są ciągłe w przestrzeni $\mathcal{D}(\Omega)$ ze względu na wprowadzoną w niej zbieżność (p. 4.1).

4. Sprawdzić, które z poniższych wyrażeń określa dystrybucję na osi rzeczywistej $\mathbf{R}$:
(a) $\langle f, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(0)$ $(0 \leqslant n \leqslant \infty)$.
Wskazówka. Dla $n = \infty$ wykorzystać twierdzenie Borela (por. [20], rozdz. I): Dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{c_k\}$ istnieje funkcja $g \in C^\infty(\mathbf{R})$ taka, że $c_k = g^{(k)}(0)$.
(b) $\langle f, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$.
(c) $\langle f, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(1+1/k)$.
(d) $\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt$.
(e) $\langle f, \varphi\rangle = \int_0^1 \varphi^{(n)}(t)\, dt$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną.
Funkcja φ jest dowolną funkcją klasy $C_0^\infty(\mathbf{R})$.

5. Sprawdzić tożsamość

$$g(x)\delta^{(k)}(x-a) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} g^{(r)}(a)\delta^{(k-r)}(x-a)$$

$g \in C^\infty(\mathbf{R})$, $a \in \mathbf{R}$, k naturalne).

6. Niech F będzie zbiorem zwartym zawartym w zbiorze otwartym $G \subset \mathbf{R}^n$, nie będącym całą przestrzenią. Udowodnić, że $\operatorname{dist}(F, \partial G)$ jest liczbą dodatnią (por. p. 5.4).

Wskazówka. Zastosować twierdzenie Weierstrassa o funkcji ciągłej na zbiorze zwartym. Przypadek dowolnego zbioru otwartego sprowadzić do przypadku zbioru ograniczonego.

7. Mnożenie dystrybucji przez funkcję gładką jest oczywiście przemienne, jeżeli przyjmiemy definicję

$$\langle fp, \varphi\rangle = \langle f, \varphi p\rangle$$

dla $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $p \in C^\infty(\Omega)$. Na przykładzie iloczynu $\delta(x) \cdot x \cdot P\frac{1}{x}$ wykazać, że nie jest ono łączne.

8. Sprawdzić, że operacje D_j oraz τ_a są przemienne w klasie $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

9. Wykazać, że funkcja

$$g(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} e^{ik|x|} \qquad (x \in \mathbf{R}^3,\ k \in \mathbf{R})$$

jest rozwiązaniem podstawowym operatora Helmholtza $\Delta u + k^2 u$.

10. Sprawdzić, że funkcja

$$e(x,t) = -\frac{c}{2} 1_+(ct - |x|) \qquad (x, t \in \mathbf{R})$$

jest rozwiązaniem podstawowym równania struny drgającej

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0.$$

11. Udowodnić, że zbiór domknięty $K \subset \mathbf{R}^n$ jest nośnikiem dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:
(i) $\langle f, \varphi\rangle = 0$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus K)$,
(ii) dla dowolnego zbioru otwartego Ω przecinającego K istnieje funkcja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ taka, że $\langle f, \varphi\rangle \neq 0$.

12. Zakładając, że $p \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ udowodnić wzór Leibniza–Hörmandera

$$P(D)(pf) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha p)P^{(\alpha)}(D)f,$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $P^{(\alpha)}(\xi) = (D^\alpha P)(\xi)$ dla $\xi \in \mathbf{R}^n$.

Wskazówka. Zauważyć, że $P(D)(pf)$ jest skończoną sumą iloczynów postaci $(D^\alpha p)Q_\alpha(D)$, gdzie Q_α jest wielomianem. Następnie przyjąć $p(x) = e^{\langle x, \xi\rangle}$, $f(x) = e^{\langle x, \eta\rangle}$ przy ustalonych ξ, η i skorzystać z wzoru Taylora.

13. Sprawdzić, że nośnikiem dystrybucji E_2 (por. p. 5.5) jest stożek określony nierównością $|x| \leqslant ct$.

14. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ z warunku

$$\langle l_f, \varphi\rangle = 0 \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

wynika $f = 0$ prawie wszędzie w Ω. Wywnioskować stąd, że odwzorowanie

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \ni f \to l_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

jest wzajemnie jednoznaczne.

Wskazówka. Z zaprzeczenia tezy wynika istnienie zbioru A o mierze Lebesgue'a dodatniej, na którym funkcja f ma stały znak. Wobec mierzalności zbioru A, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją zbiór domknięty F i zbiór otwarty G o tej własności, że $F \subset A \subset G$ oraz miara zbioru $G \setminus F$ jest $< \varepsilon$. Przyjmując jako φ funkcję η spełniającą warunki $(w_{5.6})$–$(w_{5.8})$ dochodzimy do sprzeczności z założeniem.

15. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną szeregu (6.18).

Wskazówka. Zastosować kryterium Dirichleta jednostajnej zbieżności szeregu.

ROZDZIAŁ II

TRANSFORMACJA FOURIERA I SPLOT DYSTRYBUCJI

1. Transformacja Fouriera w klasie $L^1(\mathbf{R}^n)$

Zdefiniujemy transformatę Fouriera dowolnej funkcji całkowalnej na $\mathbf{R}^n$. Następnie wyodrębnimy w klasie $L^1(\mathbf{R}^n)$ podklasę $\mathcal{S}$ funkcji szybko malejących, w której transformacja Fouriera ma specjalnie dobre własności.

1.1. Transformata Fouriera funkcji całkowalnej. *Transformatą Fouriera* funkcji $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ nazywamy nową funkcję, określoną dla $\xi \in \mathbf{R}^n$ wzorem

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\,dx . \tag{1.1}$$

Z równości $|e^{-i(x,\xi)}f(x)| = |f(x)|$ wynika, że funkcja podcałkowa w (1.1) jest całkowalna dla dowolnie ustalonego ξ, zatem przyjęta definicja jest poprawna. Przyporządkowanie $\mathcal{F} : f \to \hat{f}$ nazywamy *transformacją Fouriera.*

PRZYKŁAD 1.1. Obliczymy transformatę Fouriera funkcji jednej zmiennej

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -a \leqslant x \leqslant a, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Zgodnie z (1.1)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} e^{-ix\xi} dx ,$$

co po obliczeniu całki daje

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\sin a\xi}{\xi} .$$

Zauważmy, że $\hat{f}$ nie jest funkcją klasy $L^1(\mathbf{R})$, gdyż jej całka niewłaściwa w przedziale $(-\infty, \infty)$ nie jest bezwzględnie zbieżna (por. [5], rozdz. VI, § 4).

PRZYKŁAD 1.2. Obliczymy transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}) .$$

Z definicji

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x - x^2} dx .$$

Wykładnik funkcji podcałkowej można przedstawić w postaci

$$-i\xi x - x^2 = -(x + \tfrac{1}{2}i\xi)^2 - \tfrac{1}{4}\xi^2 ,$$

wobec tego

$$\hat{f}(\xi) = h(\xi)e^{-\xi^2/4}, \qquad \text{gdzie} \quad h(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi/2)^2} dx .$$

Dla obliczenia całki $h(\xi)$ zastosujemy metodę całkowania w płaszczyźnie zespolonej. Dla ustalonego $\varrho > 0$ niech Δ_ϱ oznacza prostokąt w płaszczyźnie zmiennej zespolonej $z = x + iy$, ograniczony prostymi $y = 0, y = \frac{1}{2}\xi$ oraz $x = \pm\varrho$. Ponieważ funkcja e^{-z^2} jest analityczna w całej płaszczyźnie zespolonej, więc całka z niej po brzegu prostokąta Δ_ϱ jest równa zeru. Oznaczając przez J_ϱ^j $(j = 1, 2)$ całki po pionowych bokach prostokąta, mamy

$$\int_{-\varrho}^{\varrho} e^{-x^2} dx + J_\varrho^1 + J_\varrho^2 = \int_{-\varrho}^{\varrho} e^{-(x+i\xi/2)^2} dx , \tag{1.2}$$

gdzie

$$J_\varrho^j = i \int_0^{\xi/2} e^{-(\pm\varrho+iy)^2} dy \qquad (j = 1, 2) .$$

Ponieważ

$$|J_\varrho^j| \leqslant e^{-\varrho^2} \int_0^{\xi/2} e^{y^2} dy ,$$

więc po przejściu do granicy, gdy $\varrho \to \infty$ w równości (1.2), dostajemy

$$h(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

Zatem

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4} . \tag{1.3}$$

PRZYKŁAD 1.3. Obliczymy transformatę Fouriera funkcji

$$\psi(x) = e^{-|x|^2} \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Ze wzoru (1.1) wynika, że $\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{f}(\xi_1)\dots\widehat{f}(\xi_n)$, gdzie $\widehat{f}$ została określona w przykładzie 1.2. Zatem

$$\widehat{\psi}(\xi) = (\sqrt{\pi})^n e^{-|\xi|^2/4}.$$

Ważną własność transformacji Fouriera wyraża

STWIERDZENIE 1.1. *Dla $f,g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ zachodzi równość Parsevala*

$$\int_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}g = \int_{\mathbf{R}^n} f\widehat{g}. \tag{1.4}$$

Dowód. Z definicji transformaty Fouriera (1.1) widać, że obie całki są całkami iterowanymi funkcji $h(x,y) = e^{-i(x,y)}f(x)g(y)$, różniącymi się kolejnością całkowania. Ponieważ $h \in L^1(\mathbf{R}^{2n})$, równość (1.4) wynika natychmiast z twierdzenia Fubiniego. □

PRZYKŁAD 1.4. Niech f będzie funkcją jednej zmiennej spełniającą następujące założenia:

(i) $f \in C^1(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$;
(ii) $f' \in L^1(\mathbf{R})$;
(iii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Znajdziemy związek między transformatami f i f'.

Całkowanie przez części daje

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ix\xi}f'(x)\,dx = (i\xi)\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ix\xi}f(x)\,dx + e^{-ix\xi}f(x)\Big|_{x=-\alpha}^{x=\alpha},$$

skąd, po przejściu do granicy gdy $\alpha \to \infty$, otrzymujemy

$$\widehat{f'} = (i\xi)\widehat{f}. \tag{1.5}$$

Z równości (1.5) widać ważną własność transformacji Fouriera: sprowadza ona różniczkowanie funkcji do znacznie prostszej operacji, jaką jest mnożenie transformaty przez odpowiednio dobrany wielomian. Zauważmy jednak, że założenia (i)–(iii), dotyczące funkcji transformowanej f, są bardzo ograniczające, nie spełniają ich bowiem tak ważne w zastosowaniach funkcje, jak wielomiany czy funkcje trygonometryczne. Z drugiej strony, transformata Fouriera funkcji całkowalnej może już nie mieć tej własności (por. przykład 1.1), co również bywa niewygodne. Widać zatem, że transformacja Fouriera w klasie $L^1(\mathbf{R}^n)$ nie ma dobrych własności rachunkowych. Wymienione trudności można by usunąć w dwojaki sposób: albo przez zawężenie klasy funkcji transformowanych w taki

sposób, by była ona niezmiennicza ze względu na transformację Fouriera all przez rozszerzenie transformacji Fouriera na obszerniejszą niż $L^1(\mathbf{R}^n)$ klasę fun cji lub dystrybucji, w taki jednak sposób, by zachodził wzór (1.5). Okazuje się, oba zadania są wykonalne. W dalszym ciągu niniejszego paragrafu wyodrębnim klasę $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbf{R}^n)$ funkcji szybko malejących, mającą specjalnie dobre własnoś ze względu na transformację Fouriera określoną wzorem całkowym (1.1). W da szych paragrafach rozszerzymy transformację Fouriera na klasę dystrybucji woln rosnących, zawierającą w szczególności wszystkie funkcje o wzroście wielomianc wym w nieskończoności. Przedstawiona konstrukcja pochodzi od francuskieg matematyka L. Schwartza [22].

1.2. Klasa $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ jako przestrzeń liniowa ze zbieżnością. Zdefiniujem klasę $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ jako zbiór wszystkich funkcji φ określonych na $\mathbf{R}^n$ i spełniającyc następujące warunki:

($w_{1.1}$) $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$;

($w_{1.2}$) dla dowolnych wielowskaźników α i β funkcja $x^\alpha D^\beta\varphi(x)$ jest ograni czona na $\mathbf{R}^n$ (por. p. 4.6, rozdz. I).

Pozostawiamy Czytelnikowi łatwe sprawdzenie, że warunek ($w_{1.2}$) można sfor mułować w sposób równoważny:

($w'_{1.2}$) Dla dowolnego $p = 0,1,2,\dots$ i dowolnego wielowskaźnika β funkcj $(1+|x|^2)^p D^\beta\varphi(x)$ jest ograniczona na $\mathbf{R}^n$.

Funkcje klasy $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ nazywamy *szybko malejącymi w nieskończoności*. Klas tę będziemy oznaczali przez $\mathcal{S}$, jeżeli nie będzie to prowadziło do nieporozumienia co do wymiaru przestrzeni. Z warunku ($w'_{1.2}$) wynika łatwo

STWIERDZENIE 1.2. $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbf{R}^n)$.

Dowód. Dla $\varphi \in \mathcal{S}$ i $x \in \mathbf{R}^n$ mamy

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{M_p}{(1+|x|^2)^p}$$

z odpowiednio dobraną stałą dodatnią M_p. Wystarczy obrać p tak, by całka

$$J_p = \int_{\mathbf{R}^n} (1+|x|^2)^{-p}\,dx$$

miała skończoną wartość. Po wprowadzeniu współrzędnych sferycznych w $\mathbf{R}^n$ widzimy, że zbieżność całki J_p jest równoważna ze zbieżnością całki

$$\int_1^\infty r^{n-1-2p}\,dr,$$

a więc wystarczy przyjąć, że $p > n/2$. W rozumowaniu wykorzystaliśmy fakt, że jakobian współrzędnych sferycznych w $\mathbf{R}^n$ jest równy $r^{n-1}h(\omega)$, gdzie $r = |x|$, h zaś jest funkcją parametrów kątowych $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ określoną na pewnej kostce i spełniającą warunek $|h(\omega)| \leqslant 1$ (por. [17], rozdz. I, § 2). □

PRZYKŁAD 1.5. Funkcja $g(x) = e^{-|x|^2}$ jest szybko malejąca. Dla dowodu zauważmy najpierw, że dowolna pochodna funkcji g ma postać $w(x)e^{-|x|^2}$, gdzie w jest wielomianem. Wystarczy zatem zbadać funkcję $h_\alpha(x) = x^\alpha e^{-|x|^2}$ dla dowolnie ustalonego wielowskaźnika α. Podstawienie $x = r\eta(x)$, gdzie $r = |x|$ oraz $|\eta(x)| = 1$, daje

$$h_\alpha(x) = \frac{r^{|\alpha|}}{e^{r^2}}\eta^\alpha(x)\,.$$

Stosując regułę de l'Hospitala sprawdzamy, że

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^{|\alpha|}}{e^{r^2}} = 0\,. \tag{1.6}$$

Ponieważ funkcja $\eta^\alpha(x)$ jest ograniczona, równość (1.6) kończy dowód.

Łatwo sprawdzić, że klasa $\mathcal{S}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb zespolonych przy zwykłych działaniach dodawania funkcji i mnożenia przez liczbę. W przestrzeni tej wprowadzimy relację zbieżności ciągu przyjmując, że ciąg $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{S}$ jest zbieżny do zera, jeżeli

($\mathrm{w}_{1.3}$) Dla dowolnych wielowskaźników α, β ciąg $\{x^\alpha D^\beta \varphi_k\}$ dąży do zera jednostajnie na $\mathbf{R}^n$.

Warunek ten można zastąpić przez równoważny:

($\mathrm{w}'_{1.3}$) Dla dowolnego $p = 0, 1, 2, \ldots$ oraz dowolnego wielowskaźnika β ciąg $\{(1 + |x|^2)^p D^\beta \varphi_k\}$ dąży do zera jednostajnie na $\mathbf{R}^n$.

Z warunków ($\mathrm{w}_{1.2}$) i ($\mathrm{w}_{1.3}$) wynika natychmiast

STWIERDZENIE 1.3. *Różniczkowanie jest odwzorowaniem ciągłym* $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. □

STWIERDZENIE 1.4. $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ *jest gęstym podzbiorem przestrzeni* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, *przy czym operator zanurzenia* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \ni \varphi \to \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *jest ciągły.*

Dowód. Zawieranie $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}$ jest oczywiste.

Łatwe sprawdzenie, że każdy ciąg $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, zbieżny do zera w $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, jest zbieżny do zera w $\mathcal{S}$, pozostawiamy Czytelnikowi.

Udowodnimy, że do dowolnej funkcji $g \in \mathcal{S}$ można dobrać ciąg $\{g_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ taki, że $g_k \to g$ w $\mathcal{S}$.

Niech $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ będzie funkcją spełniającą warunki: $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$, $h(x) = 1$ dla $|x| \leqslant 1$, $h(x) = 0$, dla $|x| \geqslant 2$ (por. p. 5.4, rozdz. I). Niech $g_k = h_k g$, gdzie

$h_k(x) = h(x/k)$. Wówczas

$$D^\alpha(g_k - g) = D^\alpha\left[g(h_k - 1)\right]\,,$$

a po zastosowaniu wzoru Leibniza na pochodną iloczynu,

$$x^\beta D^\alpha(g_k - g) = \sum_{\substack{|\gamma|>0\\ \gamma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\gamma} x^\beta (D^{\alpha-\gamma}g)(D^\gamma h_k) + x^\beta D^\alpha\left[g(h_k - 1)\right]. \tag{1.7}$$

Zauważmy, że $D^\gamma h_k(x) = k^{-|\gamma|}(D^\gamma h)(x/k)$, a funkcje $x^\beta D^{\alpha-\gamma}g$ i $(D^\gamma h)(x/k$ są ograniczone. Zatem pierwszy wyraz po prawej stronie (1.7) dąży do zera jed nostajnie w $\mathbf{R}^n$. Drugi wyraz znika dla $|x| \leqslant k$, a dla $|x| > k$ spełnia nierówność

$$\left|x^\beta D^\alpha g(h_k - 1)\right| \leqslant \frac{\text{const}}{1 + k^2}\,,$$

a więc również dąży do zera jednostajnie w $\mathbf{R}^n$.

Wykazaliśmy zatem, że dla dowolnie obranych α i β ciąg $\{x^\beta D^\alpha(g_k - g)\}$ dąży do zera jednostajnie w $\mathbf{R}^n$, a to oznacza, że $g_k \to g$ w $\mathcal{S}$, co kończy dowód. □

1.3. Transformacja Fouriera w klasie $\mathcal{S}$. Zgodnie ze stwierdzeniem 1.2 możemy stosować transformację Fouriera do funkcji szybko malejących.

TWIERDZENIE 1.1. *Transformacja Fouriera odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie klasę* $\mathcal{S}$ *na siebie. Dla* $f \in \mathcal{S}$ *mamy*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi\,, \tag{1.8}$$

$$(D_j f)^\wedge = (i\xi_j)\widehat{f}\,, \tag{1.9}$$

$$D_j \widehat{f} = (-ix_j f)^\wedge\,. \tag{1.10}$$

Dowód. Równość (1.9) sprawdzamy stosując całkowanie przez części (por. przykład 1.4). Dla ustalonego $\varrho > 0$ mamy

$$\int_{|x|\leqslant\varrho} e^{-i(x,\xi)} D_{x_j} f(x)\, dx = (i\xi_j) \int_{|x|\leqslant\varrho} e^{-i(x,\xi)} f(x)\, dx + \int_{|x|=\varrho} e^{-i(x,\xi)} f(x)\eta_j\, d\sigma_x\,, \tag{1.11}$$

gdzie $\eta_j = x_j/\varrho$ jest j-tą współrzędną zewnętrznego wersora normalnego do powierzchni kuli. Ponieważ miara tej powierzchni jest proporcjonalna do ϱ^{n-1}, funkcja f zaś spełnia dla $|x| = \varrho$ oszacowanie $|f(x)| \leqslant \text{const}/\varrho^n$, więc całka powierzchniowa po prawej stronie (1.11) dąży do zera przy $\varrho \to \infty$. Przechodząc do granicy dostajemy (1.9).

Dla dowodu (1.10) zauważmy najpierw, że z warunku ($\mathrm{w}'_{1.2}$) wynika, że

$$|f(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{(1+|x|^2)^p}.$$

Obierając p dostatecznie duże stwierdzamy, że po formalnym wykonaniu róż-
zkowania pod całką we wzorze (1.1), dostajemy całkę zbieżną jednostajnie
ględem ξ, a stąd już wynika (1.10). Dla dowodu inkluzji $\mathcal{F}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ zbadamy
ıkcję $g(\xi) = \xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)$, gdzie α i β są ustalonymi wielowskaźnikami, a $f \in \mathcal{S}$.
racja wzorów (1.9) i (1.10) daje

$$g(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}[D^\alpha(x^\beta f)].$$

Ponieważ funkcja transformowana po prawej stronie należy do klasy $\mathcal{S}$, funkcja
st ograniczona, zatem $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. Aby udowodnić (1.8), zmodyfikujemy najpierw
kcję podcałkową mnożąc ją przez ustaloną dowolnie funkcję $g \in \mathcal{S}$.
Oznaczając

12) $$J(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, d\xi,$$

my, po zastosowaniu wzoru (1.1),

3) $$J(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x-y,\xi)} f(y) g(\xi)\, dy\, d\xi.$$

Ponieważ funkcja $f(y)g(\xi)$ jest całkowalna na $\mathbf{R}^{2n}$, możemy po prawej stronie
3) zmienić kolejność całkowania, co daje

$$J(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \widehat{g}(y-x)\, dy$$

po podstawieniu $y - x = z$,

4) $$J(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x+z) \widehat{g}(z)\, dz.$$

Zastąpimy teraz funkcję $g(\xi)$ przez $g_a(\xi) = g(a\xi)$ dla ustalonego $a > 0$. Jak
o sprawdzić, $\widehat{g}_a(z) = a^{-n} \widehat{g}(a^{-1}z)$ i wobec tego z (1,12) i (1.13), po podsta-
iu $a^{-1}z = y$, dostajemy

5) $$\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi) g(a\xi)\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} f(x+ay) \widehat{g}(y)\, dy.$$

unkcje f i g są ograniczone jako należące do klasy $\mathcal{S}$. Jak już udowodniliśmy,
sformaty $\widehat{f}, \widehat{g}$ również należą do $\mathcal{S}$, ...

obu stron (1.15) możemy zastosować twierdzenie Lebesgue'a o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, co dla $a \to 0$ daje

(1.16) $$g(0) \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi = f(x) \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{g}(y)\, dy.$$

Obierając teraz $g(\xi) = e^{-|\xi|^2}$, po prostych przeliczeniach (por. przykład 1.3) dostajemy

$$\int_{\mathbf{R}^n} \widehat{g}(y)\, dy = (2\pi)^n$$

i wobec tego (1.8) wynika natychmiast z (1.16).

Dla zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że każda funkcja $f \in \mathcal{S}$ jest transformatą Fouriera pewnej funkcji szybko malejącej. Jest to widoczne ze wzoru (1.8), który po podstawieniu $\eta = -\xi$ przyjmuje postać

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x,\eta)} r(\eta)\, d\eta,$$

gdzie funkcja $r(\eta) = (2\pi)^{-n} \widehat{f}(-\eta)$ należy do klasy $\mathcal{S}$ zgodnie z tym, co wykazaliśmy poprzednio. Dowód jest zakończony. □

Zbadamy teraz dokładniej transformację całkową określoną przez prawą stronę (1.8). Wprowadzając oznaczenia

(1.17) $$(\overline{\mathcal{F}}g)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,\xi)} g(x)\, dx$$

oraz $h^\vee(x) = h(-x)$, mamy

(1.18) $$\overline{\mathcal{F}}g = (2\pi)^{-n} \widehat{g}^\vee$$

dla dowolnej funkcji g całkowalnej na $\mathbf{R}^n$.

Transformację $\overline{\mathcal{F}}$ nazywamy *sprzężoną* albo *odwrotną* transformacją Fouriera. Ta druga nazwa wynika z faktu, że ograniczając się do $f \in \mathcal{S}$, możemy wzór (1.8) zapisać krócej,

(1.19) $$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f,$$

zastępując zaś w nim x przez $-x$ otrzymujemy

(1.20) $$f^\vee = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{f}},$$

a więc, zgodnie z (1.17),

Stosując transformację Fouriera do obu stron (1.21) i uwzględniając (1.20), dostajemy

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f^{\check{}\,\check{}} = f\,. \tag{1.22}$$

Z (1.19) i (1.22) widać, że $\overline{\mathcal{F}}$, rozważana na klasie $\mathcal{S}$, jest transformacją odwrotną do $\mathcal{F}$.

TWIERDZENIE 1.2. *Transformacja Fouriera jest izomorfizmem przestrzeni $\mathcal{S}$.*

Dowód. Z twierdzenia 1.1 wiemy, że $\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Pozostaje do wykazania, że $\mathcal{F}$ i $\overline{\mathcal{F}}$ zachowują zbieżność ciągu w $\mathcal{S}$. Ze względu na (1.21) wystarczy udowodnić, że $\mathcal{F}$ ma tę własność.

Niech $\{f_k\}$ będzie ciągiem zbieżnym do zera w $\mathcal{S}$. Z przyjętej definicji zbieżności wynika, że dla ustalonych p, α i β ciąg $\{(1+|x|^2)^p D^\alpha(x^\beta f_k)\}$ dąży do zera jednostajnie na $\mathbf{R}^n$. Wobec tego dla dowolnie danego $\varepsilon \to 0$ istnieje takie N_ε, że dla $k > N_\varepsilon$ zachodzi nierówność

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} (1+|x|^2)^p |D^\alpha(x^\beta f_k(x))| < \varepsilon\,. \tag{1.23}$$

Ponieważ, zgodnie z (1.9) i (1.10),

$$\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}_k = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}[D^\alpha(x^\beta f_k)]\,,$$

z (1.23) wynika

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}^n} |\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}_k(\xi)| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^p}\,. \tag{1.24}$$

Ostatnia nierówność zapewnia zbieżność do zera, jednostajną na $\mathbf{R}^n$, ciągu $\{\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}_k\}$, o ile obierzemy p na tyle duże, by całka po prawej stronie była zbieżna. A więc ciąg $\{\widehat{f}_k\}$ dąży do zera w $\mathcal{S}$, co kończy dowód. □

2. Dystrybucje wolno rosnące

Wprowadzimy klasę $\mathcal{S}'$ dystrybucji wolno rosnących (temperowanych), zawierającą w szczególności wszystkie funkcje całkowalne. Następnie wykażemy, że transformację Fouriera, zdefiniowaną poprzednio wzorem całkowym (1.1), można rozszerzyć na $\mathcal{S}'$ z zachowaniem własności rachunkowych, które zachodziły w klasie $\mathcal{S}$.

2.1. $\mathcal{S}'$ jako klasa dystrybucji. W punkcie 1.2 wprowadziliśmy klasę $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ funkcji szybko malejących jako przestrzeń liniową ze zbieżnością. Możemy wobec

tego rozważać na niej funkcjonały *liniowe* i *ciągłe* ze względu na wprowadzoną zbieżność, tzn. spełniające następujące warunki:

($w_{2.1}$) $l(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 l(\varphi_1) + c_2 l(\varphi_2)$,

($w_{2.2}$) $l(\varphi_k) \to 0$ dla każdego ciągu $\{\varphi_k\}$ zbieżnego do zera w $\mathcal{S}$.

Zbiór wszystkich takich funkcjonałów będziemy oznaczali przez $\mathcal{S}'$.

Ze stwierdzenia 1.4 wynika, że dowolny funkcjonał $l \in \mathcal{S}'$ jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje obcięcie $l|_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}$, które jest funkcjonałem ciągłym na $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, czyli dystrybucją. Wobec tego klasę $\mathcal{S}'$ możemy uważać za podzbiór $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Dystrybucje należące do klasy $\mathcal{S}'$ nazywamy *temperowanymi* (od francuskiego terminu „tempérée") lub *wolno rosnącymi.* Tę drugą nazwę uzasadnia

PRZYKŁAD 2.1. Niech $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ będzie funkcją o wzroście wielomianowym w nieskończoności, tzn. spełniającą dla $|x| \geqslant R$ oszacowanie

$$|f(x)| \leqslant c(1+|x|^2)^m\,, \tag{2.1}$$

gdzie $R > 0$, $c > 0$ i $m \geqslant 0$ oznaczają odpowiednio dobrane stałe. Jak już wspominaliśmy w rozdziale I (przykład 2.1), funkcja f może być utożsamiona z dystrybucją regularną

$$\langle l_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f\varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n))\,. \tag{2.2}$$

Wykażemy teraz, że (2.2) określa dystrybucję temperowaną, tzn. że $l_f \in \mathcal{S}'$. Dzieląc obszar całkowania, z (2.2) dostajemy

$$\langle l_f, \varphi\rangle = \int_{|x|\leqslant R} f\varphi + \int_{|x|\geqslant R} f\varphi\,. \tag{2.3}$$

Pierwsza z całek po prawej stronie (2.3) ma skończoną wartość dla dowolnej funkcji φ ograniczonej. Jeżeli $\varphi \in \mathcal{S}$, to z (2.1) i warunku ($w'_{1.2}$), dla $|x| \geqslant R$, wynika, że

$$|f(x)\varphi(x)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(1+|x|^2)^{p-m}}\,,$$

co zapewnia zbieżność drugiej całki w (2.3), jeśli obierzemy p dostatecznie duże. Zatem funkcjonał liniowy (2.2) jest dobrze określony dla $\varphi \in \mathcal{S}$. Pozostaje do wykazania, że jest to funkcjonał ciągły. Niech $\varphi_k \to 0$ w $\mathcal{S}$. Zgodnie z warunkiem ($w'_{1.3}$) do $\varepsilon > 0$ można dobrać N_ε tak, by dla $k > N_\varepsilon$ i $x \in \mathbf{R}^n$ zachodziła nierówność

$$|\varphi_k(x)| \leqslant \varepsilon\Big(2\int_{|x|\leqslant R} |f|\,dx\Big)^{-1}\,. \tag{2.4}$$

Obierzmy teraz liczbę p tak, by całka

$$J_p = \int_{|x|\geqslant R} (1+|x|^2)^{m-p}\,dx$$

yła zbieżna i niech M_ε będzie dobrane do ε tak, by dla $k > M_\varepsilon$ i $x \in \mathbf{R}^n$ było

2.5) $$|(1+|x|^2)^p\varphi_k(x)| \leqslant \varepsilon(2cJ_p)^{-1}.$$

Zastępując φ przez φ_k w tożsamości (2.3), wobec (2.4) i (2.5) dostajemy $\langle l_f,\varphi_k\rangle| \leqslant \varepsilon$ dla $k > \max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$, co kończy dowód.

PRZYKŁAD 2.2. Jeżeli $f \in L^q(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leqslant q < \infty)$, to $l_f \in \mathcal{S}'$.

Najpierw udowodnimy

LEMAT 2.1. $\mathcal{S} \subset L^q(\mathbf{R}^n)$; *operator zanurzenia* $\mathcal{S} \ni \varphi \to \varphi \in L^q(\mathbf{R}^n)$ *jest ągły.*

Pierwsza część lematu wynika natychmiast z $(\mathrm{w}'_{1.2})$, jeżeli położymy $\beta = 0$ i ıierzemy dostatecznie duże $p = p_0$ (por. dowód stwierdzenia 1.2).

Jeżeli $\varphi_k \to 0$ w $\mathcal{S}$, to wobec $(\mathrm{w}'_{1.3})$ można do $\varepsilon > 0$ dobrać N_ε tak, by dla $> N_\varepsilon$ zachodziła nierówność

.6) $$(1+|x|^2)^{p_0}|\varphi_k(x)| \leqslant \varepsilon J^{-1}_{p_0,q},$$

zie

$$J_{p,q} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{pq}}\right)^{1/q}$$

Z oszacowania (2.6) dostajemy, dla $k > N_\varepsilon$, $\|\varphi_k\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \leqslant \varepsilon$, co kończy dowód natu. □

Dla sprawdzenia, że l_f jest dystrybucją temperowaną zastosujemy nierówność ıldera, co dla $\varphi \in \mathcal{S}$ daje

7) $$|\langle l_f,\varphi\rangle| \leqslant \|f\|_{L^q}\|\varphi\|_{L^r} \quad (1/q+1/r=1).$$

Dalsze rozumowanie przebiega podobnie jak w przykładzie 2.1. Należy oprzeć na nierówności (2.7) i zastosować lemat 2.1 z zastąpieniem q przez r.

Będziemy mówili, że ciąg $\{f_k\}$ dystrybucji temperowanych jest *zbieżny do strybucji temperowanej f*, jeżeli dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{S}$ zachodzi

$(\mathrm{w}_{2.3})$ $\lim_{k\to\infty}\langle f_k,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$.

STWIERDZENIE 2.1. *Różniczkowanie (w sensie dystrybucyjnym) jest odwzorowaniem ciągłym $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, przy czym równość*

8) $$\langle D_j f,\varphi\rangle = -\langle f, D_j\varphi\rangle$$

hodzi dla $f \in \mathcal{S}'$ i $\varphi \in \mathcal{S}$.

Dowód. Niech $\varphi\in\mathcal{S}$ i niech $\{\varphi_k\}\subset\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ będzie ciągiem zbieżnym do φ w $\mathcal{S}$ (ciąg taki na pewno istnieje; por. stwierdzenie 1.4).

Z definicji różniczkowania dystrybucji mamy

(2.9) $$\langle D_j f,\varphi_k\rangle = -\langle f, D_j\varphi_k\rangle,$$

gdzie

(2.10) $$\lim_{k\to\infty}\langle f, D_j\varphi_k\rangle = \langle f, D_j\varphi\rangle,$$

gdyż $D_j\varphi_k \to D_j\varphi$ w $\mathcal{S}$ (por. stwierdzenie 1.3), f zaś jest dystrybucją temperowaną. Z (2.9) i (2.10) wynika, że funkcjonał D_jf, określony na klasie $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, możemy rozszerzyć na klasę $\mathcal{S}$ przyjmując

(2.11) $$\langle D_j f,\varphi\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle D_j f,\varphi_k\rangle.$$

Łatwe sprawdzenie, że rozszerzenie to nie zależy od sposobu obrania ciągu $\{\varphi_k\}$ pozostawiamy Czytelnikowi.

Z (2.9)–(2.11) wynika tożsamość (2.8).

Dla sprawdzenia, że $D_jf\in\mathcal{S}'$, wystarczy teraz obrać dowolny ciąg $\varphi_k\to 0$ w $\mathcal{S}$ i zauważyć, że wówczas $\langle f, D_j\varphi_k\rangle\to 0$. Ciągłość różniczkowania otrzymujemy stosując stwierdzenie 6.1 z rozdziału I. □

PRZYKŁAD 2.3. Funkcja $e^x\cos e^x$ $(x\in\mathbf{R})$ jest dystrybucją wolno rosnącą (pomimo wykładniczego wzrostu dla $x\to\infty$).

Istotnie, $e^x\cos e^x = d\sin e^x/dx$, a funkcja $\sin e^x$ jest ograniczona, należy więc do $\mathcal{S}'$.

PRZYKŁAD 2.4. Delta Diraca jest dystrybucją wolno rosnącą (sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi).

W rozdziale I było wprowadzone działanie mnożenia dystrybucji przez funkcję klasy C^∞. Wyróżnimy teraz pewną specjalną klasę takich funkcji gładkich, że mnożenie przez nie dystrybucji temperowanej nie wyprowadza z klasy $\mathcal{S}'$.

Oznaczmy przez $\mathcal{O}_M$ klasę wszystkich funkcji u spełniających następujące warunki:

$(\mathrm{w}_{2.4})$ $u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$;

$(\mathrm{w}_{2.5})$ dla dowolnego α istnieje taki wielomian w_α, że $|D^\alpha u(x)|\leqslant w_\alpha(x)$ dla $x\in\mathbf{R}^n$.

Ponieważ funkcje klasy $\mathcal{O}_M$ mają wzrost wielomianowy, można je utożsamiać

STWIERDZENIE 2.1′. *Niech $f \in \mathcal{S}'$, $\psi \in \mathcal{O}_M$. Wówczas $\psi f \in \mathcal{S}'$, równość zaś*

$$\langle \psi f, \varphi\rangle = \langle f, \psi\varphi\rangle \tag{.11'}$$

ıchodzi dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{S}$.

Dla ustalonej funkcji ψ działanie $f \to \psi f$ jest ciągłe ze względu na zbieżność $\mathcal{S}'$.

Dowód. Równość (2.11′) zachodzi dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, co wynika z definicji nożenia dystrybucji przez funkcję gładką.

Aby zakończyć dowód, wystarczy zauważyć, że

(a) $\psi\varphi \in \mathcal{S}$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{S}$;

(b) jeżeli $\varphi_\nu \to \varphi$ w sensie zbieżności w $\mathcal{S}$, to również $\psi\varphi_\nu \to \psi\varphi$ według tej mej zbieżności.

Sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

2.2. Transformacja Fouriera w $\mathcal{S}'$. Jak już wspominaliśmy w rozdziale I, lnym z celów wprowadzenia pojęcia dystrybucji jest rozszerzenie operacji róż- :zkowania tak, by można było wykonywać to działanie na funkcjach nie mają- ch pochodnej w sensie klasycznym. Wyodrębnienie klasy $\mathcal{S}'$ dystrybucji wolno snących pozwala, jak to za chwilę zobaczymy, na rozszerzenie transformacji uriera w taki sposób, by uwolnić się od zbyt krępującego założenia całkowalno- funkcji. Oczywiście, podobnie jak w przypadku różniczkowania, nowa definicja ınsformaty Fouriera powinna pokrywać się z przyjętą poprzednio (wzór (1.1)), li ograniczymy się do funkcji klasy $L^1(\mathbf{R}^n)$.

Punktem wyjścia do definicji *transformacji Fouriera w klasie $\mathcal{S}'$* jest równość 4). Przyjmując $g = \varphi \in \mathcal{S}$ i pamiętając, że funkcja $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ może być ıktowana jako dystrybucja regularna klasy $\mathcal{S}'$ (przykład 2.2), możemy (1.4) pisać w postaci „funkcjonałowej":

$$\langle \hat f, \varphi\rangle = \langle f, \hat\varphi\rangle\,. \tag{12}$$

Równość (2.12) przyjmujemy za definicję *transformaty Fouriera dla dowolnej strybucji $f \in \mathcal{S}'$.*

Z twierdzenia 1.2 wynika łatwo, że $\hat f$ jest funkcjonałem ciągłym na $\mathcal{S}$. Linio- ść funkcjonału jest oczywista, wobec tego f jest dobrze określoną dystrybucją nperowaną. Ze stwierdzenia 1.1 wynika, że gdy $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, dystrybucja $\hat f$, reślona wzorem (2.12), jest identyczna z dystrybucją regularną (czyli funk-) $\hat f$ określoną wzorem całkowym (1.1). Dlatego bez obawy nieporozumienia łziemy w klasie $\mathcal{S}'$ używali oznaczeń wprowadzonych poprzednio dla funkcji kowalnych, tzn. transformatę Fouriera dystrybucji $f \in \mathcal{S}'$ będziemy oznaczali :ez $\hat f$ lub $\mathcal{F}f$, używając symbolu $\mathcal{F}\colon f \to f$ dla oznaczenia uogólnionej trans- macji Fouriera.

TWIERDZENIE 2.1. *$\mathcal{F}$ jest izomorfizmem przestrzeni $\mathcal{S}'$.*

Dowód. Jak już wspomnieliśmy, z twierdzenia 1.2 wynika, że $\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Ze wzoru (2.12) widać, że $\mathcal{F}$ jest odwzorowaniem transponowanym do $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$ (por. stwierdzenie 6.1, rozdz. I), zatem jest to odwzorowanie ciągłe ze względu na zbieżność wprowadzoną w przestrzeni $\mathcal{S}'$. Dowód — analogiczny do dowodu stwierdzenia 6.1 z rozdziału I — pozostawiamy Czytelnikowi.

Z własności transformaty Fouriera w klasie $\mathcal{S}$, omówionych w punkcie 1.3, wynika łatwo, że

$$\mathcal{F}^{-1}f = (2\pi)^{-2n}\mathcal{F}^3 f \tag{2.13}$$

(por. (1.21)) jest transformacją odwrotną do $\mathcal{F}$, określoną na całej klasie $\mathcal{S}'$.

Z udowodnionej już ciągłości $\mathcal{F}$ wynika wobec (2.13) ciągłość odwzorowania $\mathcal{F}^{-1}$ ze względu na zbieżność w $\mathcal{S}'$, co kończy dowód twierdzenia. □

STWIERDZENIE 2.2. *Jeżeli $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, to odwrotna transformata Fouriera wyraża się wzorem całkowym*

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,\xi)}f(\xi)\,d\xi\,. \tag{2.14}$$

Dowód. Z twierdzenia 2.1 wynika, że $f = \hat h$, gdzie $h = \mathcal{F}^{-1}f \in \mathcal{S}'$. Zgodnie z definicją (2.12) mamy dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle \hat h, \varphi\rangle = \langle h, \hat\varphi\rangle\,. \tag{2.15}$$

Warunek (2.15) można zapisać, zgodnie z twierdzeniem 1.2, w równoważnej postaci

$$\langle f, \overline{\mathcal{F}}\psi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}f, \psi\rangle\,, \tag{2.16}$$

gdzie $\psi = \hat\varphi$ może być dowolną funkcją klasy $\mathcal{S}$, $\overline{\mathcal{F}}$ zaś jest określona wzorem (1.17). Ponieważ f jest funkcją, lewa strona (2.16) może być zapisana w postaci całkowej:

$$\langle f, \overline{\mathcal{F}}\psi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f\overline{\mathcal{F}}\psi\,. \tag{2.17}$$

Zauważmy, że

$$\int_{\mathbf{R}^n} f\overline{\mathcal{F}}\psi = \int_{\mathbf{R}^n} \psi\overline{\mathcal{F}}f \tag{2.18}$$

(dowód jest analogiczny do dowodu stwierdzenia 1.1).

Porównując (2.16)–(2.18) widzimy, że $\mathcal{F}^{-1}f$ jest dystrybucją regularną identyczną z $\overline{\mathcal{F}}f$. □

2.3. Rozkład spektralny funkcji. Ze stwierdzenia 2.2 otrzymujemy łatwo

TWIERDZENIE 2.2. *Jeżeli dystrybucja temperowana f ma transformatę Fouriera $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$, to jest ona funkcją wyrażającą się wzorem całkowym*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(x,\xi)}\widehat{f}(\xi)d\xi . \quad \square \tag{2.19}$$

Z przedstawienia (2.19) wynika, że jedynymi dystrybucjami spełniającymi założenia twierdzenia 2.2 są funkcje ciągłe i ograniczone w całej przestrzeni.

W przypadku $n = 1$ wzór (2.19) ma prostą interpretację fizyczną. Załóżmy mianowicie, że funkcja f opisuje przebieg w czasie pewnego zjawiska fizycznego (np. natężenie prądu zmiennego w obwodzie). Równość (2.19) pozwala przedstawić badany przebieg jako superpozycję przebiegów harmonicznych opisanych funkcją

$$g_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi) \tag{2.20}$$

o częstotliwości $\xi/2\pi$ i amplitudzie $(2\pi)^{-1}|f(\xi)|$. Dlatego, zapożyczając terminologię z optyki, nazywa się w literaturze technicznej transformatę $\widehat{f}$ *widmem przebiegu f*, a przedstawienie (2.19) bywa nazywane *rozkładem spektralnym funkcji f*. Funkcja $|\widehat{f}|^2$ nosi nazwę *widma energii* (Czytelnik zechce zauważyć, że jeżeli funkcję g_ξ będziemy interpretować jako opis drgań punktu materialnego, to wielkość $|\widehat{f}(\xi)|^2$ jest proporcjonalna do całkowitej energii ruchu).

Niech f będzie funkcją jednej zmiennej o wartościach rzeczywistych, określoną na całej prostej $\mathbf{R}$. Będziemy mówili, że:

(i) *f spełnia w przedziale $[a,b]$ warunek Höldera*, jeżeli istnieją stałe $c > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$ takie, że

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x-y|^\alpha$$

dla $x, y \in [a,b]$;

(ii) *f spełnia przedziałami warunek Höldera*, jeżeli istnieje rozkład

$$R = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} [a_{j-1}, a_j] \tag{2.21}$$

(gdzie $a_{j-1} < a_j$, $\lim_{j\to-\infty} a_j = -\infty$, $\lim_{j\to\infty} a_j = \infty$) taki, że dla każdego j funkcja

$$g_j(x) = \begin{cases} f(a_{j-1}+) & \text{dla } x = a_{j-1}, \\ f(x) & \text{dla } x \in (a_{j-1}, a_j), \\ f(a_j-) & \text{dla } x = a_j, \end{cases}$$

spełnia w przedziale $[a_{j-1}, a_j]$ warunek Höldera;

(iii) *f jest przedziałami ciągła* (klasy C^1), jeżeli istnieje rozkład (2.21) o tej własności, że dla każdego j funkcja g_j jest ciągła (klasy C^1) w przedziale $[a_{j-1}, a_j]$.

Jak łatwo zauważyć, z warunku Höldera wynika ciągłość funkcji f w przedziale $[a,b]$. Jeżeli f jest klasy C^1 w przedziale $[a,b]$, to spełnia w tym przedziale warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha = 1$ (zwany warunkiem Lipschitza). Dowód tego prostego faktu, oparty na twierdzeniu o wartości średniej, pozostawiamy Czytelnikowi. Następujące twierdzenie podaje warunki dostateczne na to, aby funkcja jednej zmiennej posiadała rozkład spektralny.

TWIERDZENIE 2.3. *Niech $f \in L^1(\mathbf{R})$ będzie funkcją o wartościach rzeczywistych taką, że*

1. *f spełnia przedziałami warunek Höldera,*
2. *w punktach nieciągłości zachodzi równość* ([1])

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}. \tag{2.22}$$

Wówczas

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi \qquad (x \in \mathbf{R}). \tag{2.23}$$

Uwaga. Założenie 1. jest spełnione z wykładnikiem $\alpha = 1$, jeżeli f jest przedziałami klasy C^1. Gdy $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, przedstawienie (2.23) można zapisać prościej

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)d\xi . \tag{2.24}$$

Granica po prawej stronie (2.23) nosi nazwę *wartości głównej* w sensie Cauchy'ego całki (2.24) i jest oznaczana symbolem vp $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi$.

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy następujący

LEMAT 2.2 (Riemanna–Lebesgue'a). *Niech $I(y)$ będzie jedną z następujących całek:*

$$I(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \sin yt\,dt, \tag{a}$$

gdzie $p \in L^1(\mathbf{R})$ jest funkcją przedziałami ciągłą,

([1]) Warunek (2.22) jest zawsze spełniony, jeżeli f jest ciągła w punkcie x.

(b) $$I(y) = \int_a^b p(t)\sin yt\,dt,$$

gdzie $p \in L^1(a,b)$ *jest funkcją ciągłą w przedziale* $(a,b]$.
Wówczas

$$\lim_{y\to\infty} I(y) = 0\,.$$

Dowód. Udowodnimy najpierw punkt (b). Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Wobec całkowalności funkcji p istnieje liczba $\beta \in (a,b)$ taka, że

$$\int_a^\beta |p(t)|\,dt \leqslant \varepsilon/2\,. \tag{2.25}$$

W przedziale $[\beta, b]$ funkcja p jest jednostajnie ciągła, zatem do dowolnie obranej liczby δ można tak dobrać liczby $\beta = b_0 < b_1 < \ldots < b_k = b$, by dla $b_{j-1} \leqslant t \leqslant b_j$ $(j = 1,2,\ldots,k)$ zachodziła nierówność

$$|p(t) - p(b_j)| \leqslant \delta\,. \tag{2.26}$$

Przyjmując

$$I_j(y) = \int_{b_{j-1}}^{b_j} p(t)\sin yt\,dt$$

mamy

$$I_j(y) = p(b_j)\int_{b_{j-1}}^{b_j} \sin yt\,dt + \int_{b_{j-1}}^{b_j} [p(t) - p(b_j)]\sin yt\,dt\,,$$

skąd, po obliczeniu pierwszej całki po prawej stronie i wykorzystaniu (2.26), otrzymujemy oszacowanie

$$\left|\int_\beta^b p(t)\sin yt\,dt\right| \leqslant \sum_{j=1}^k |I_j(y)| \leqslant 2Mk/y + \delta(b-a)\,, \tag{2.27}$$

gdzie $M = \sup_{[\beta,b]}|p|$. Obierając $\delta < \varepsilon/4(b-a)$ otrzymujemy

$$\left|\int_\beta^b p(t)\sin yt\,dt\right| \leqslant \varepsilon/2$$

dla $y \geqslant 8Mk/\varepsilon$, co, łącznie z (2.25), daje $|I(y)| \leqslant \varepsilon$.

Dowód punktu (a) przebiega podobnie. Z założenia całkowalności funkcji p wynika, że do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać przedział $[\alpha,\beta]$ tak,

by spełniona była nierówność

$$\int_{-\infty}^\alpha |p(t)|\,dt + \int_\beta^\infty |p(t)|\,dt < \varepsilon/2\,. \tag{2.28}$$

W przedziale $[\alpha,\beta]$ znajduje się skończona liczba punktów a_j, w których funkcja p może być nieciągła. Wobec tego całka $\int_\alpha^\beta p(t)\sin yt\,dt$ może być przedstawiona w postaci skończonej sumy całek, do których można zastosować rozumowanie przeprowadzone w pierwszej części dowodu. Wynika z niego istnienie liczby y_ε (dobranej do ε) takiej, że

$$\left|\int_\alpha^\beta p(t)\sin yt\,dt\right| \leqslant \varepsilon/2$$

dla $y \geqslant y_\varepsilon$. Uwzględniając (2.28) otrzymujemy zatem $|I(y)| \leqslant \varepsilon$ dla $y \geqslant y_\varepsilon$, co kończy dowód lematu. □

Dowód twierdzenia 2.3. Opierając się na definicji (1.1) transformaty Fouriera dostajemy, po zastosowaniu twierdzenia Fubiniego i jednokrotnym scałkowaniu,

$$\int_{-y}^y e^{ix\xi}\hat f(\xi)\,d\xi = 2\int_{-\infty}^\infty f(s)\sin\frac{y(x-s)}{x-s}\,ds = 2\int_{-\infty}^\infty f(x+t)\frac{\sin yt}{t}\,dt\,.$$

Dla ustalonego x i dowolnie obranej liczby $\delta > 0$ funkcja

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)}{t} & \text{dla } t \leqslant -\delta,\\ 0 & \text{dla } t > -\delta \end{cases}$$

spełnia założenia punktu (a) lematu 2.2, zatem

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{-\delta} f(x+t)\frac{\sin yt}{t}\,dt = 0\,.$$

Podobnie, przyjmując

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < \delta,\\ \dfrac{f(x+t)}{t} & \text{dla } t \geqslant \delta \end{cases}$$

stwierdzamy, że

$$\lim_{y\to\infty}\int_\delta^\infty f(x+t)\frac{\sin yt}{t}\,dt = 0\,.$$

Dowód sprowadza się wobec tego do wykazania, że

$$\lim_{y\to\infty} K_\delta(x,y) = 0\,, \tag{2.29}$$

gdzie

$$K_\delta(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{\sin yt}{t}\,dt - f(x)\,.$$

Wykorzystując fakt, że

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin yt}{t}\,dt = \lim_{y\to\infty}\int_0^{y\delta}\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \frac{\pi}{2}$$

możemy po łatwym przekształceniu całki napisać

$$\lim_{y\to\infty} K_\delta(x,y) = \frac{1}{\pi}\lim_{y\to\infty}\int_0^\delta [f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin yt}{t}\,dt$$

lub, po wykorzystaniu warunku (2.22)

$$\lim_{y\to\infty} K_\delta(x,y) = \frac{1}{\pi}\lim_{y\to\infty}\left[\int_0^\delta g^+_{(x)}(t)\frac{\sin yt}{t}\,dt + \int_0^\delta g^-_{(x)}(t)\frac{\sin yt}{t}\,dt\right], \tag{2.30}$$

gdzie $g^{\pm}_{(x)}(t) = f(x\pm t) - f(x\pm)$. Ponieważ f spełnia przedziałami warunek Höldera dla dostatecznie małego δ, każda z funkcji $g^{\pm}_{(x)}(t)/t$ jest ciągła w przedziale $(0,\delta)$ i spełnia w tym przedziale oszacowanie

$$\left|\frac{g^{\pm}_{(x)}(t)}{t}\right| \leqslant \frac{c}{t^{1-\alpha}}\,,$$

gdzie $\alpha\in(0,1]$. Wobec tego stosując punkt (b) lematu 2.2 do każdej z całek po prawej stronie (2.30) dostajemy (2.29), co kończy dowód. □

2.4. Wygładzanie funkcji. W punkcie 5.4 rozdziału I zdefiniowaliśmy jądro wygładzające ω_α jako rodzinę funkcji gładkich zależną od parametru $a>0$ i spełniającą warunki ($\mathrm{w}_{5.1}$)–($\mathrm{w}_{5.5}$).

Przykładem jądra wygładzającego jest $\omega_a(x) = c^{-1}a^{-n}\varphi_a(x)$, gdzie

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{a^2}{|x|^2-a^2}\right\} & \text{dla } |x|<a,\\ 0 & \text{dla } |x|\geqslant a\end{cases}$$

oraz

$$c = \int_{\mathbf{R}^n}\varphi_1\,,$$

co wykazaliśmy w punktach 4.1 i 5.4 rozdziału I.

W punkcie 5.4 wykazaliśmy (lemat 5.1), że dla każdej funkcji $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ jest splot z jądrem wygładzającym $\omega_a * f \overset{\mathrm{def}}{=} f_a$ jest dobrze określoną funkcją klasy $C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 2.4. *Dla ustalonego obszaru $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ niech X będzie jedną z następujących przestrzeni:*

1° $X = C^0(\overline{\Omega})$ *ze zbieżnością jednostajną (zakładamy, że obszar Ω jest ograniczony);*

2° $X = L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p<\infty)$.

Dla ustalonego $a>0$ odwzorowanie $X\ni f\to f_a\in X$ jest liniowe i ciągłe (funkcję f rozszerzamy zerem na całą przestrzeń $\mathbf{R}^n$).

Dowód. Liniowość rozważanego odwzorowania jest oczywista.

Aby udowodnić ciągłość w przypadku 1°, wykorzystamy własność ($\mathrm{w}_{5.1}$) jądra wygładzającego, co daje, po podstawieniu $z = a^{-1}(x-y)$,

$$f_a(x) = \int_{|z|\leqslant 1}\omega_1(z)f(x-az)\,dz\,, \tag{2.31}$$

skąd wynika, wobec ($\mathrm{w}_{5.5}$)

$$\sup_{\overline{\Omega}}|f_a| \leqslant \sup_{\overline{\Omega}}|f|\,,$$

czyli ciągłość odwzorowania.

Przechodząc do przypadku 2° zauważmy, że wobec (2.31) mamy

$$\|f_a\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega\left|\int_{|z|\leqslant 1}\omega_1(z)f(x-az)\,dz\right|^p dx\right)^{1/p},$$

co, po zastosowaniu nierówności Höldera do wewnętrznej całki, daje

$$\|f_a\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c\left(\int_\Omega\int_{|z|\leqslant 1}|f(x-az)|^p\,dz\,dx\right)^{1/p}, \tag{2.32}$$

gdzie

$$c = \begin{cases}\left(\displaystyle\int_{|z|\leqslant 1}\omega_1^q(z)\,dz\right)^{1/q} & \text{dla } p>1,\ 1/p+1/q=1,\\ \displaystyle\sup_{|z|\leqslant 1}\omega_1(z) & \text{dla } p=1.\end{cases}$$

Po zastosowaniu do prawej strony (2.32) twierdzenia Fubiniego mamy

$$\|f_a\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c\Big(\int\limits_{|z|\leqslant 1}\int\limits_{\Omega} |f(x-az)|^p dx\,dz\Big)^{1/p}. \tag{2.33}$$

Ponieważ f znika tożsamościowo poza obszarem Ω, wewnętrzna całka nie przekracza $\int_\Omega |f(x)|^p dx$. A więc z (2.33) wynika

$$\|f_a\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c_1 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.34}$$

gdzie $c_1 = c\theta_n^{1/p}$, θ_n zaś jest objętością n-wymiarowej kuli jednostkowej. Z nierówności (2.34) wynika, że $f_a \in L^p(\Omega)$ oraz że wygładzanie jest odwzorowaniem ciągłym w $L^p(\Omega)$. □

TWIERDZENIE 2.5. *Niech X będzie jedną z następujących przestrzeni:*
1° $X = C^0(\Omega)$ *ze zbieżnością niemal jednostajną;*
2° $X = L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.
Wówczas dla dowolnej funkcji $f \in X$ zachodzi

$$\lim_{a\to 0} f_a = f$$

w sensie zbieżności w przestrzeni X (w punkcie 2° rozszerzamy funkcję f zerem na całą przestrzeń $\mathbf{R}^n$).

Dowód. Rozważmy zbiór zwarty $K \subset \Omega$ i obszar ograniczony Ω' spełniający warunek $K \subset \Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$. Z warunku ($w_{5.5}$) mamy

$$f(x) = \int\limits_{|z|\leqslant 1} \omega_1(z) f(x)\,dz. \tag{2.35}$$

Odejmując stronami (2.31) i (2.35) dostajemy

$$|f_a(x) - f(x)| \leqslant \int\limits_{|z|\leqslant 1} \omega_1(z)|f(x-az) - f(x)|\,dz. \tag{2.36}$$

Jeżeli $x \in K$, to $x - az \in \Omega'$ dla $a < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega')$, gdzie

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf_{\substack{a\in A\\ b\in B}} |a-b| \qquad (A, B \subset \mathbf{R}^n).$$

Wykorzystując jednostajną ciągłość f w obszarze Ω' dostajemy z (2.36) tezę twierdzenia w przypadku 1°.

Rozważając punkt 2° wystarczy powtórzyć rachunek przeprowadzony w dowodzie twierdzenia 2.4 z zastąpieniem f_a przez $f - f_a$, wyrażając f w postaci

(2.35). Dochodzimy w ten sposób do oszacowania

$$\|f - f_a\|_{L^p(\Omega)} \leqslant c\Big(\int\limits_{|z|\leqslant 1}\int\limits_{\Omega} |f(x) - f(x-az)|^p dx\,dz\Big)^{1/p}. \tag{2.37}$$

Punkt 2° tezy otrzymujemy, stosując do (2.37)

LEMAT 2.3. *Niech f będzie funkcją z $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ rozszerzoną zerem na $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Wówczas do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, aby dla $|y| < \delta$ zachodziła nierówność*

$$\Big(\int\limits_{\Omega} |f(x) - f(x+y)|^p dx\Big)^{1/p} < \varepsilon.$$

Dowód lematu oparty jest na następującym twierdzeniu Łuzina (dowód tego twierdzenia można znaleźć w [16], rozdz. V, § 5): *Jeżeli f jest funkcją mierzalną określoną w Ω, to do dowolnego $\eta > 0$ można dobrać zbiór domknięty $F \subset \Omega$ taki, że obcięcie $f|_F$ jest funkcją ciągłą, przy czym $\mu(\Omega \setminus F) \leqslant \eta$ (przez μ oznaczamy n-wymiarową miarę Lebesgue'a).* Rozważymy najpierw przypadek obszaru Ω ograniczonego. Ustalając chwilowo liczbę η i dobrany do niej zbiór F załóżmy, że $\delta < \operatorname{dist}(F, \partial\Omega)$ (jest to liczba dodatnia, por. zadanie 6, rozdz. I). Przyjmując oznaczenia

$$F - y = \{x \in \mathbf{R}^n : x = z - y,\ z \in F\}$$

oraz

$$F_y = F \cap (F - y)$$

mamy $F - y \subset \Omega$ dla $|y| < \delta$. Ponieważ $F = F_y \cup (F \setminus F - y)$ jest rozkładem na sumę zbiorów rozłącznych, więc

$$\mu(F_y) = \mu(F) - \mu(F \setminus F - y). \tag{2.38}$$

Ponadto

$$\mu(F) \geqslant \mu(\Omega) - \eta \tag{2.39}$$

oraz

$$\mu(F \setminus F - y) \leqslant \mu(\Omega \setminus F - y) = \mu(\Omega) - \mu(F - y)$$

co, wobec niezmienniczości miary Lebesgue'a względem przesunięć, daje

$$\mu(F \setminus F - y) \leqslant \mu(\Omega) - \mu(F),$$

czyli, z uwagi na (2.39),

$$\mu(F \setminus F - y) \leqslant \eta. \tag{2.40}$$

Równość (2.38) daje po uwzględnieniu (2.39), (2.40)

$$\mu(F_y) \geqslant \mu(\Omega) - 2\eta,$$

skąd wynika

$$\mu(\Omega \setminus F_y) \leqslant 2\eta. \tag{2.41}$$

Dalsze rozumowanie będzie oparte na następującej prostej uwadze. Przypuśćmy, że $\Omega = A_1 \cup A_2$, gdzie A_1, A_2 są zbiorami mierzalnymi rozłącznymi. Każdą funkcję $g \in L^p(\Omega)$ możemy przedstawić w postaci $g = g_1 + g_2$, gdzie

$$g_j(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dla } x \in A_j, \\ 0 & \text{dla } x \in \Omega \setminus A_j \end{cases} \qquad (j = 1, 2)$$

›rzy czym oczywiście $g_j \in L^p(\Omega)$. Stosując nierówność trójkąta dla normy w $L^p(\Omega)$ dostajemy

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L^p(A_1)} + \|g\|_{L^p(A_2)}.$$

)znaczając $(\tau_y f)(x) = f(x+y)$ i przyjmując $g = f - \tau_y f$ otrzymujemy wobec ego

$$\|f - \tau_y f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f - \tau_y f\|_{L^p(F_y)} + \|f\|_{L^p(\Omega \setminus F_y)} + \|\tau_y f\|_{L^p(\Omega \setminus F_y)}. \tag{2.42}$$

; twierdzenia o bezwzględnej ciągłości całki (por. [16], rozdz. VI, § 2) i z oszaowania (2.41) wynika, że do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\eta > 0$ tak, by wa ostatnie wyrazy po prawej stronie (2.42) nie przekraczały $\varepsilon/3$. Zakładając, e liczba η i dobrany do niej zbiór F zostały ustalone, oszacujemy pierwszy wyaz. Ponieważ zbiór F jest zwarty (jako domknięty i ograniczony podzbiór $\mathbf{R}^n$), ınkcja f jest na nim jednostajnie ciągła. Można zatem do $\varepsilon > 0$ dobrać tak > 0, by dla $|y| < \delta$, $x \in F_y$ zachodziła nierówność

$$|f(x) - f(x+y)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon[\mu(\Omega)]^{-1/p}.$$

nierówności tej wynika, że dla $|y| < \delta$ pierwszy składnik po prawej stronie 2.42) również nie przekracza $\varepsilon/3$, co kończy dowód lematu w przypadku, gdy ' jest obszarem ograniczonym. Jeżeli Ω jest obszarem nieograniczonym, to z ıłkowalności funkcji $|f|^p$ oraz $|\tau_y f|^p$ wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać ılę otwartą K tak, by dla $|y| \leqslant 1$ każde z wyrażeń $\|f\|_{L^p(\Omega\setminus K)}$ oraz $\|\tau_y f\|_{L^p(\Omega\setminus K)}$ e przekraczało $\varepsilon/3$. Dla zakończenia dowodu korzystamy z nierówności

$$\|f - \tau_y f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f - \tau_y f\|_{L^p(\Omega\cap K)} + \|f\|_{L^p(\Omega\setminus K)} + \|\tau_y f\|_{L^p(\Omega\setminus K)}$$

ıtosujemy poprzednio przeprowadzone rozumowanie do obszaru ograniczonego $\cap K$. □

TWIERDZENIE 2.6. *Klasa $C_0^\infty(\Omega)$ jest gęstym podzbiorem $L^p(\Omega)$ ($1 \leqslant p < \infty$. Ω dowolny obszar w $\mathbf{R}^n$).*

D o w ó d zaczniemy od przypadku, gdy Ω jest obszarem ograniczonym.

Niech $f \in L^p(\Omega)$ będzie ustaloną funkcją. Wówczas do dowolnie danego $\varepsilon > 0$ można dobrać obszar $\Omega_\varepsilon \subset \overline{\Omega}_\varepsilon \subset \Omega$ tak, by

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |f|^p < (\varepsilon/2)^p. \tag{2.43}$$

Niech

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{dla } x \notin \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

i niech $g_a = \omega_a * g$, gdzie ω_a jest jądrem wygładzającym. Z lematu 5.1 z rozdziału I wynika, że $g_a \in C_0^\infty(\Omega)$ jeśli $a < a_1 = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\partial\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ (ponieważ Ω jest ograniczony, więc a_1 jest liczbą dodatnią), a wobec (2.43) mamy

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2. \tag{2.44}$$

Oprócz tego, zgodnie z twierdzeniem 2.4, dla $a < a_2$ mamy

$$\|g - g_a\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2, \tag{2.45}$$

obierając zaś $a < \min(a_1, a_2)$, z (2.44) i (2.45) otrzymujemy

$$\|f - g_a\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon, \tag{2.46}$$

co kończy dowód, gdy obszar Ω jest ograniczony.

Przechodząc do przypadku obszaru nieograniczonego dobierzmy do danej liczby $\varepsilon > 0$ kulę $K = K(0, R)$ tak, by

$$\int_{\Omega\setminus K} |f|^p < (\varepsilon/2)^p$$

i przyjmijmy, że

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in \Omega \cap K = \Omega_R, \\ 0 & \text{dla } x \in \Omega \setminus \Omega_R. \end{cases}$$

Zatem

$$\|f - f_R\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2. \tag{2.47}$$

Ponieważ $f_R \in L^p(\Omega_R)$, gdzie Ω_R jest obszarem ograniczonym, więc z pierwszej części dowodu wynika istnienie funkcji $h \in C_0^\infty(\Omega_R)$, dla której

$$\|f_R - h\|_{L^p(\Omega_R)} < \varepsilon/2. \tag{2.48}$$

Całkowanie po lewej stronie można rozciągnąć na cały obszar Ω (obie funkcje znikają w $\Omega \setminus \Omega_R$), więc z nierówności (2.47) i (2.48) wynika, że

$$\|f-h\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

i dowód jest zakończony. □

Ponieważ $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}$, przeto z twierdzenia 2.5 wynika

WNIOSEK 2.1. *Klasa $\mathcal{S}$ jest gęsta w $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$.* □

2.5. Transformacja Fouriera w $L^2(\mathbf{R}^n)$. Zaczniemy od zmodyfikowania wzoru Parsevala (1.4) (stwierdzenie 1.1) zakładając, że $f, g \in \mathcal{S}$. Obierając $h \in \mathcal{S}$ tak, żeby

$$g = \overline{\widehat{h}}, \tag{2.49}$$

mamy, zgodnie z (1.17), $g = (2\pi)^n \overline{\mathcal{F}h}$, a stąd

$$\widehat{g} = (2\pi)^n \overline{h}. \tag{2.50}$$

Podstawiając (2.49) i (2.50) do wzoru (1.4), dla $f, h \in \mathcal{S}$ otrzymujemy

$$(f,h)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = (2\pi)^{-n}(\widehat{f},\widehat{h})_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \tag{2.51}$$

Z twierdzenia 1.1 i równości (2.51) wynika

STWIERDZENIE 2.3. *Odwzorowanie $f \to (2\pi)^{-n/2}\widehat{f}$ przekształca klasę $\mathcal{S}$ na siebie, zachowując iloczyn skalarny $(\ ,\ )_{L^2(\mathbf{R}^n)}$.* □

Ponieważ, jak wykazaliśmy (wniosek 2.1), klasa $\mathcal{S}$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $L^2(\mathbf{R}^n)$, możemy rozszerzyć transformację Fouriera klasy $\mathcal{S}$ na przestrzeń $L^2(\mathbf{R}^n)$, przyjmując dla $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$

$$Ff = \operatorname*{l.i.m.}_{k\to\infty} Ff_k, \tag{2.52}$$

gdzie $\{f_k\} \subset \mathcal{S}$ jest dowolnym ciągiem takim, że $f = \text{l.i.m.}\, f_k$.

Skrót l.i.m. (limes in medio — zbieżność średnia) oznacza tu zbieżność według normy w $L^2(\mathbf{R}^n)$.

STWIERDZENIE 2.4. *Odwzorowanie $(2\pi)^{-n/2}F$ przekształca izometrycznie (tj. z zachowaniem normy) przestrzeń $L^2(\mathbf{R}^n)$ na siebie.*

Łatwy dowód wraz ze sprawdzeniem, że określona przez (2.52) transformacja F (zwana *transformacją Fouriera–Plancherela*) jest jednoznacznie określona, tzn. nie zależy od wyboru ciągu $\{f_k\}$, pozostawiamy Czytelnikowi. □

STWIERDZENIE 2.5. *Jeżeli $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, to również $\widehat{f} \in L^2(\mathbf{R}^n)$ i $\widehat{f} = Ff$.*

Dowód. Zgodnie z definicją transformacji Fouriera w klasie $\mathcal{S}'$ (wzór (2.12)), mamy

$$\langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f\widehat{\varphi}. \tag{2.53}$$

Podstawiając $\widehat{\varphi} = (2\pi)^n\overline{\psi}$, mamy

$$\int_{\mathbf{R}^n} f\widehat{\varphi} = (2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} f\overline{\psi},$$

skąd, wobec stwierdzenia 2.4, otrzymujemy

$$\int_{\mathbf{R}^n} f\widehat{\varphi} = \int_{\mathbf{R}^n} (Ff)\overline{\psi}\,\widehat{}\,. \tag{2.54}$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić, $\overline{\psi}\,\widehat{} = \varphi$, z (2.53) i (2.54) dostajemy

$$\langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} (Ff)\varphi$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{S}$, a to oznacza równość dystrybucji $\widehat{f}$ i Ff. Wobec tego dla oznaczenia *transformaty Fouriera–Plancherela funkcji* $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ możemy używać oznaczenia $\widehat{f}$. □

Ze stwierdzeń 2.4 i 2.5 wynika łatwo

WNIOSEK 2.2. *Dla dowolnych $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ mamy*

$$(f,g)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = (2\pi)^{-n}(\widehat{f},\widehat{g})_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \ \square \tag{2.55}$$

Gdy $n = 1$, transformata Fouriera–Plancherela daje się zapisać wzorem całkowym. Zachodzi mianowicie

TWIERDZENIE 2.7. *Jeżeli $f \in L^2(\mathbf{R})$, to zachodzą prawie wszędzie równości*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}-1}{-ix} f(x)\,dx \tag{2.56}$$

oraz

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}-1}{i\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi. \tag{2.57}$$

Dowód. Niech $\{f_k\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R})$ będzie ciągiem zbieżnym w $L^2(\mathbf{R})$ do funkcji istnienie takiego ciągu zapewnia twierdzenie 2.5). Wobec tego $\widehat{f_k} \to \widehat{f}$ w sensie ieżności w $L^2(\mathbf{R})$. Z definicji transformaty Fouriera mamy

$$\int_0^\xi \widehat{f}_k(y)\,dy = \int_0^\xi \int_{-\infty}^\infty e^{-ixy} f_k(x)\,dx\,dy\,,$$

, po zastosowaniu twierdzenia Fubiniego do prawej strony i obliczeniu całki wnętrznej, daje

$$\text{58)} \qquad \int_0^\xi \widehat{f}_k(y)\,dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ix\xi}-1}{-ix} f_k(x)\,dx\,.$$

Równość (2.58) można inaczej zapisać za pomocą iloczynu skalarnego w $L^2(\mathbf{R})$:

$$(\widehat{f}_k, h_\xi) = (f_k, g)\,,$$

zie

$$h_\xi(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant y \leqslant \xi, \\ 0 & \text{dla } y < 0 \text{ lub } y > \xi \end{cases}$$

z

$$g(x) = \frac{e^{ix\xi}-1}{ix}$$

zytelnik zechce sprawdzić, że $g, h_\xi \in L^2(\mathbf{R})$). Wobec tego możemy przejść w 58) do granicy, co daje

$$\text{59)} \qquad \int_0^\xi \widehat{f}(y)\,dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ix\xi}-1}{-ix} f(x)\,dx\,.$$

Ponieważ $\widehat{f}(\xi)$ jest funkcją całkowalną na każdym przedziale ograniczonym, c na podstawie znanych własności całki (por. [16], rozdz. VIII, § 1) równość 59) po zróżniczkowaniu daje prawie wszędzie (2.56). Zgodnie z wnioskiem 2.2 my

$$\text{60)} \qquad \int_{-\infty}^\infty f(y)\overline{h}_x(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}_x(\xi)}\,d\xi\,.$$

Ponieważ

$$\widehat{h}_x(\xi) = \int_0^x e^{-i\xi y}\,dy = \frac{e^{-ix\xi}-1}{-i\xi}\,,$$

więc (2.60) można też zapisać w postaci

$$\int_0^x f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix\xi}-1}{i\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi\,,$$

co po zróżniczkowaniu daje prawie wszędzie równość (2.57). □

2.6. Reguły rachunkowe oraz przykłady obliczania transformat Fouriera.

TWIERDZENIE 2.8. *W klasie $\mathcal{S}'$ zachodzą następujące reguły rachunkowe:*

$$(D_j f)^\wedge = (ix_j)\widehat{f}\,, \tag{2.61}$$

$$D_j\widehat{f} = (-ix_j f)^\wedge\,, \tag{2.62}$$

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^n \check{f}\,, \tag{2.63}$$

$$\mathcal{F}^{-1} f = (2\pi)^{-n}(\widehat{f})^\vee, \tag{2.64}$$

$$[f(x+a)]^\wedge = e^{i(a,\xi)}\widehat{f}\,, \tag{2.65}$$

$$\widehat{f}(\xi+a) = [e^{-i(a,x)}f]^\wedge\,, \tag{2.66}$$

$$[f(\alpha x)]^\wedge = \alpha^{-n}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0). \tag{2.67}$$

Dowód. Sprawdzimy, że (2.61) wynika z analogicznego wzoru (1.9), udowodnionego dla funkcji $f \in \mathcal{S}$. Z definicji (2.12) i stwierdzenia 2.1 mamy

$$\langle (D_j f)^\wedge, \varphi\rangle = -\langle f, D_j\widehat{\varphi}\rangle \quad \text{dla } \varphi \in \mathcal{S}\,,$$

ale $\langle f, D_j\widehat{\varphi}\rangle = \langle f, (-ix_j\varphi)^\wedge\rangle$ na mocy (1.10), zatem

$$\langle (D_j f)^\wedge, \varphi\rangle = \langle \widehat{f}, ix_j\varphi\rangle\,,$$

a to oznacza (2.61) zgodnie z przyjętą definicją mnożenia dystrybucji przez funkcję gładką (por. p. 3.2, rozdz. I).

Schemat dowodu pozostałych reguł jest taki sam: najpierw sprawdzamy odpowiedni wzór dla funkcji klasy $\mathcal{S}$, a następnie wykorzystujemy definicję (2.12) transformaty Fouriera dystrybucji temperowanej. W szczególności (2.63) wynika z (1.20), (2.64) — z (2.63) i (2.13). □

PRZYKŁAD 2.5. Z definicji (2.12) mamy

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi\rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi}(0)\,,$$

czyli

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx \qquad \text{dla } \varphi \in \mathcal{S}\,.$$

Ostatnia równość oznacza, że transformata $\widehat{\delta}$ jest dystrybucją regularną (czyli funkcją) równą tożsamościowo 1. A zatem

$$\widehat{\delta} = 1. \tag{2.68}$$

Po zastosowaniu reguły (2.63) otrzymujemy z (2.68)

$$\widehat{1} = (2\pi)^n \delta^{\check{}} = (2\pi)^n \delta, \tag{2.69}$$

a reguła (2.65) daje

$$[\delta(x-a)]^{\widehat{}} = e^{-i(a,\xi)}. \tag{2.70}$$

Wzór (2.69) dla $n = 1$ sugeruje rozkład spektralny dystrybucji delta,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos xy\,dy,$$

używany często w literaturze technicznej. Zapis ten należy oczywiście traktować jako czysto formalny, gdyż występujące w nim całki są rozbieżne. Do „funkcji" delta nie można stosować twierdzenia 2.3.

PRZYKŁAD 2.6. W przypadku $n = 1$ dla $f \in \mathcal{S}'$ mamy

$$f(x)\cos\omega x = \tfrac{1}{2} f(x)(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}),$$

wobec tego wzór (2.66) daje

$$[f(x)\cos\omega x]^{\widehat{}} = \frac{\widehat{f}(\xi+\omega) + \widehat{f}(\xi-\omega)}{2}. \tag{2.71}$$

Równość (2.71) jest nazywana przez techników *twierdzeniem o modulacji*. Jeżeli funkcja $\cos\omega x$ opisuje wielkość fizyczną zmieniającą się okresowo z częstością $\omega/2\pi$, to iloczyn po lewej stronie (2.71) opisuje drgania „zmodulowane" o amplitudzie nie przekraczającej $|f(x)|$.

PRZYKŁAD 2.7. Wiemy już (przykład 1.1), że funkcja

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } |x| = 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

zwana przez techników *funkcją bramki* lub *funkcją prostokątną*, ma transformatę Fouriera

$$\widehat{\Pi}(\xi) = 2\frac{\sin\xi}{\xi};$$

wobec tego ze wzoru (2.63) dostajemy

$$\left(\frac{\sin x}{\pi x}\right)^{\widehat{}} = \Pi(\xi).$$

Funkcja Π spełnia założenia twierdzenia 2.3, zatem wzór (2.23) daje jej rozkład spektralny:

$$\Pi(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$$

(symbol vp oznacza wartość główną całki).

PRZYKŁAD 2.8. Znajdziemy transformatę Fouriera *funkcji Heaviside'a*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Najpierw zauważmy, że funkcja Heaviside'a daje się przybliżać przez funkcje bardziej regularne, których transformatę Fouriera łatwo obliczyć. Mianowicie,

$$H(x) = \lim_{a\to 0+} H(x)e^{-ax} \tag{2.72}$$

w sensie zbieżności w $\mathcal{S}'$. Aby sprawdzić (2.72), obierzmy dowolnie funkcję $\varphi \in \mathcal{S}$. Wówczas

$$\langle H - He^{-ax}, \varphi\rangle = \int_0^{\infty} (1 - e^{-ax})\varphi(x)\,dx.$$

Niech J_a oznacza całkę po prawej stronie. Stosując do różnicy pod całką twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy nierówność

$$|J_a| \leqslant a\int_0^{\infty} |x||\varphi(x)|\,dx. \tag{2.73}$$

Ponieważ całka po prawej stronie (2.73) jest zbieżna, z nierówności tej wynika, że

$$\lim_{a\to 0+} J_a = 0,$$

co daje (2.72).

Dla $a > 0$ funkcja $H(x)e^{-ax}$ jest całkowalna na $\mathbf{R}$, do obliczenia jej transformaty możemy więc zastosować wzór całkowy (1.1), zatem

$$[H(x)e^{-ax}]^{\widehat{}} = \frac{i}{ia - \xi}.$$

Korzystając z ciągłości transformaty Fouriera w klasie $\mathcal{S}'$ (twierdzenie 2.1), wobec (2.72) otrzymujemy

$$\widehat{H}(\xi) = \lim_{a\to 0+} \frac{i}{ia-\xi}$$

z przejściem do granicy w sensie zbieżności w $\mathcal{S}'$, a więc tym bardziej w $\mathcal{D}'$. Opierając się na wzorze (6.14) z rozdziału I, mamy

$$\widehat{H}(\xi) = \pi\delta(\xi) - iP\frac{1}{\xi}. \tag{2.74}$$

Przykład 2.9. Obliczmy transformatę funkcji

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{dla } x>0, \\ 0 & \text{dla } x=0, \\ -1 & \text{dla } x<0, \end{cases} \qquad (x\in\mathbf{R}).$$

Ponieważ

$$\operatorname{sign} x = H(x) - H(-x), \tag{2.75}$$

wystarczy znaleźć transformatę funkcji $H(-x)$. Mamy

$$H(x) + H(-x) = 1,$$

a stąd, wobec (2.69) i (2.74),

$$[H(-x)]^\wedge = \pi\delta(\xi) + iP\frac{1}{\xi}. \tag{2.76}$$

Odejmując stronami (2.74) i (2.76), dostajemy wobec (2.75)

$$(\operatorname{sign} x)^\wedge = -2iP\frac{1}{\xi}. \tag{2.77}$$

Po zastosowaniu (2.63) wzór (2.77) daje

$$\left(P\frac{1}{x}\right)^\wedge = -\pi i \operatorname{sign}\xi. \tag{2.78}$$

Przykład 2.10. Reguła (2.66) dla $n=1$ i $f(x)\equiv 1$ daje, zgodnie z wzorem (2.69),

$$[e^{i\omega x}]^\wedge = 2\pi\delta(\xi-\omega), \qquad [e^{-i\omega x}]^\wedge = 2\pi\delta(\xi+\omega),$$

a stąd

$$(\cos\omega x)^\wedge = \pi[\delta(\xi+\omega)+\delta(\xi-\omega)], \tag{2.79}$$

$$(\sin\omega x)^\wedge = \pi i[\delta(\xi+\omega)-\delta(\xi-\omega)]. \tag{2.80}$$

Przykład 2.11. Wróćmy do udowodnionej w rozdziale I równości (6.19), którą można zapisać w trochę innej postaci:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}. \tag{2.81}$$

Modyfikując nieco lewą stronę (2.81), wprowadzimy dystrybucję

$$\text{Ш}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) \tag{2.82}$$

(zwaną *deltą trygonometryczną*).

Jak łatwo sprawdzić, szereg po prawej stronie (2.82) jest zbieżny w $\mathcal{S}'$ i jego suma przedstawia dystrybucję temperowaną. Jej transformatę Fouriera możemy, zgodnie z twierdzeniem 2.1, obliczyć transformując kolejne wyrazy szeregu, co (z uwagi na (2.70)) daje

$$\widehat{\text{Ш}}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi}. \tag{2.83}$$

Z drugiej strony, podstawienie $x = 2\pi(y+k)$ powoduje, że

$$\begin{aligned}\left\langle \delta\left(\frac{x}{2\pi}-k\right), \varphi(x)\right\rangle &= 2\pi\,\langle\delta(y), \varphi(2\pi y + 2k\pi)\rangle \\ &= 2\pi\varphi(2k\pi) = 2\pi\,\langle\delta(x-2k\pi), \varphi(x)\rangle,\end{aligned}$$

a więc

$$\delta(x-2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\delta\left(\frac{x}{2\pi}-k\right). \tag{2.84}$$

Równość (2.81), po uwzględnieniu (2.83) i (2.84), daje

$$\widehat{\text{Ш}}(\xi) = \text{Ш}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right), \tag{2.85}$$

co wyraża ważną własność dystrybucji Ш polegającą na tym, że jej transformata Fouriera powstaje po prostu przez zmianę skali na osi odciętych.

Uwaga. Niektórzy autorzy używają nieco innej definicji transformacji Fouriera w klasie $L^1(\mathbf{R}^n)$, zastępując przyjęty przez nas wzór (1.1) przez

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\,dx. \tag{2.86}$$

Cała wyłożona w niniejszym rozdziale teoria rozszerzonej transformacji Fouriera w klasach $L^2(\mathbf{R}^n)$ i $\mathcal{S}'$ pozostaje oczywiście słuszna, jedynie wzory rachunkowe ulegają drobnej modyfikacji. W szczególności, $\tilde{f}(\xi) = \widehat{f}(2\pi\xi)$, skąd widać, wobec (2.85), że dla tak zmodyfikowanej transformacji Fouriera dystrybucja Ш jest punktem stałym, tzn. mamy $\widetilde{Ш} = Ш$. Bywa również używana jeszcze inna modyfikacja wzoru (1.1), mianowicie

$$\tilde{\tilde{f}}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\,dx . \tag{2.87}$$

Przyjęta przez nas definicja (1.1) jest, z uwagi na wzór (1.9), najwygodniejsza w zastosowaniu do równań różniczkowych.

2.7. Transformata Fouriera jako wartość główna całki ($n = 1$). Wiemy już, że gdy dystrybucja temperowana u jest funkcją sumowalną na $\mathbf{R}^n$, jej transformata Fouriera wyraża się wzorem całkowym (1.1). Okazuje się, że wzór ten może być użyty do obliczania transformaty Fouriera w znacznie obszerniejszej klasie funkcji, pod warunkiem jednak, że całka (na ogół rozbieżna) zostanie zastąpiona przez jej wartość główną. Rozważymy tylko przypadek $n = 1$.

TWIERDZENIE 2.9. *Załóżmy, że:*

(i) $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ *jest funkcją o wzroście wielomianowym w nieskończoności;*

(ii) *granica*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{-ixy} u(x)\,dx \tag{2.88}$$

istnieje niemal jednostajnie względem $y \in \Omega \subset \mathbf{R}$, *gdzie* Ω *jest otwartym przedziałem (ograniczonym lub nie).*

Wówczas $\widehat{u}|_\Omega$ *jest funkcją określoną wzorem*

$$\widehat{u}(y) = \mathrm{vp} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} u(x)\,dx \qquad (y \in \Omega), \tag{2.89}$$

gdzie symbol vp *oznacza wartość główną całki .*

Dowód. Niech $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ będzie ustaloną funkcją o nośniku zawartym w $[b,c] \subset \Omega$. Z definicji transformacji Fouriera (por. (2.12)) mamy

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u\widehat{\varphi} = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} u\widehat{\varphi},$$

co, po wyrażeniu transformaty $\widehat{\varphi}$ przez całkę i zastosowaniu twierdzenia Fubiniego, daje

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \lim_{r\to\infty} \int_b^c \varphi(y) \int_{-r}^{r} e^{-ixy} u(x)\,dx\,dy . \tag{2.90}$$

Po prawej stronie (2.90) możemy przestawić przejście do granicy z zewnętrznym całkowaniem, co daje (2.89). □

Korzystając z relacji (2.64) otrzymujemy natychmiast analogiczne twierdzenie dla odwrotnej transformacji Fouriera:

TWIERDZENIE 2.10. *Załóżmy, że spełnione jest założenie* (i) *twierdzenia 2.9 oraz że granica*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{ixy} u(x)\,dx \tag{2.91}$$

istnieje niemal jednostajnie względem $y \in \Omega \subset \mathbf{R}$, *gdzie* Ω *ma to samo znaczenie co w twierdzeniu 2.9. Wówczas* $\mathcal{F}^{-1}u|_\Omega$ *jest funkcją określoną wzorem*

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(y) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{vp} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} u(x)\,dx \qquad (y \in \Omega) . \ \square \tag{2.92}$$

Następujący lemat (pochodzący od C. Jordana, matematyka francuskiego z XIX w.) podaje prosty sposób obliczania granicy (2.88) bądź (2.91).

LEMAT 2.4. *Niech* u *będzie funkcją wymierną zmiennej zespolonej bez biegunów rzeczywistych, znikającą w nieskończoności. Wówczas*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{\pm iax} u(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\pm \mathrm{Im}\, z > 0} \mathrm{res}(e^{\pm iaz} f(z))$$

istnieje jednostajnie względem $a \in [a_0, \infty)$, *gdzie* a_0 *jest dowolną liczbą dodatnią.*

Dowód przeprowadzimy dla przypadku, gdy w wykładniku występuje znak $+$. Z twierdzenia o residuach wynika, że dla dostatecznie dużego $r > 0$

$$\int_{-r}^{r} e^{iax} u(x)\,dx = J_r(a) + 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{res}(e^{iaz} u(z)) ,$$

gdzie

$$J_r(a) = -\int_{C_r^+} e^{iaz} u(z)\,dz , \tag{2.93}$$

C_r^+ zaś jest półokręgiem: $z = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Należy udowodnić, że $J_r \to 0$ jednostajnie względem $a \geqslant a_0$. Korzystając z przedstawienia parametrycznego drogi całkowania w (2.93), mamy

$$|J_r(a)| \leqslant m_r K_r(a)\,, \tag{2.94}$$

gdzie $m_r = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant \pi} |u(re^{i\varphi})| \to 0$ z założenia, a

$$K_r(a) = r \int_0^\pi e^{-ar\sin\varphi}\,d\varphi\,.$$

Dzieląc przedział całkowania $[0,\pi] = [0,\pi/2] \cup [\pi/2,\pi]$ i podstawiając w drugiej całce $\psi = \pi - \varphi$, dostajemy

$$K_r(a) = 2r \int_0^{\pi/2} e^{-ar\sin\varphi}\,d\varphi\,. \tag{2.95}$$

Teraz możemy skorzystać z nierówności

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geqslant \frac{2}{\pi} \tag{2.96}$$

spełnionej dla $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, którą łatwo sprawdzamy wykazując, że funkcja $g(\varphi) = \sin\varphi/\varphi$ jest nierosnąca w rozważanym przedziale. Nierówność (2.96) wobec (2.95), daje

$$|K_r(a)| \leqslant 2r \int_0^{\pi/2} e^{-2ar\varphi/\pi}\,d\varphi\,.$$

Obliczając całkę po prawej stronie, otrzymujemy

$$|K_r(a)| \leqslant \frac{\pi}{a}(1 - e^{-ar}) \leqslant \frac{\pi}{a} \leqslant \frac{\pi}{a_0}\,,$$

co wraz z oszacowaniem (2.94) kończy dowód.

Jeżeli w wykładniku występuje znak $-$, to jako drogę całkowania w całce J_r należy obrać półokrąg $C_r^-: z = re^{i\varphi}$, $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Następnie podstawieniem $\psi = \varphi - \pi$ sprowadzamy badanie całki J_r do przypadku już rozważanego. □

2.8. Częściowa transformacja Fouriera. Niech $u(x,y)$ ($x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$) będzie funkcją $n+m$ zmiennych, całkowalną na $\mathbf{R}^{n+m}$

Modyfikując wzór (1.1) określamy transformatę Fouriera funkcji u względem zmiennej x jako

$$(\mathcal{F}_{(x)}u)(\xi,y) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x,y)\,dx\,. \tag{2.97}$$

Nie jest trudno sprawdzić, że transformacja $\mathcal{F}_{(x)}$ jest izomorfizmem w kl $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$ i że zachodzi odpowiednik wzoru Parsevala (por. stwierdzenie 1.1):

$$\int_{\mathbf{R}^{n+m}} (\mathcal{F}_{(x)}u)v\,dx\,dy = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} u(\mathcal{F}_{(x)}v)\,dx\,dy \quad \text{dla } u,\ v \in L^1(\mathbf{R}^{n+m})\,. \tag{2.98}$$

Wobec tego możemy rozszerzyć częściową transformację Fouriera na kl dystrybucji temperowanych, przyjmując dla $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n+m})$ i $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$

$$\langle \mathcal{F}_{(x)}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}_{(x)}\varphi\rangle\,. \tag{2.99}$$

Transformacja odwrotna do $\mathcal{F}_{(x)}$ (w klasie $\mathcal{S}$ lub $\mathcal{S}'$) wyraża się wzorem

$$(\mathcal{F}_{(x)}^{-1}f)(\xi,y) = (2\pi)^{-n}(\mathcal{F}_{(x)}f)(-\xi,y)\,. \tag{2.100}$$

Dla $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n+m})$ i $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$ mamy

$$\langle \mathcal{F}_{(x)}^{-1}u, \varphi\rangle = \langle u, \mathcal{F}_{(x)}^{-1}\varphi\rangle\,. \tag{2.101}$$

STWIERDZENIE 2.6. *W klasach $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$ zachodzą wzory*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(x)}\mathcal{F}_{(y)} = \mathcal{F}_{(y)}\mathcal{F}_{(x)};$$
$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}_{(x)}^{-1}\mathcal{F}_{(y)}^{-1} = \mathcal{F}_{(y)}^{-1}\mathcal{F}_{(x)}^{-1}.$$

Dowód pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. □

STWIERDZENIE 2.7. *Niech $u(x,y)$ będzie funkcją lokalnie całkowalną w $\mathbf{R}^{n+}$ o wzroście wielomianowym w nieskończoności. Wówczas transformaty $\mathcal{F}_{(x)}u$ or $\mathcal{F}_{(x)}^{-1}u$ znajdujemy, ustalając $y \in \mathbf{R}^m$, przy czym dla $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$ zachod wzory:*

$$\langle \mathcal{F}_{(x)}u, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^m} \langle \mathcal{F}u(\cdot,y), \varphi(\cdot,y)\rangle\,dy\,, \tag{2.102}$$

$$\langle \mathcal{F}_{(x)}^{-1}u, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^m} \langle \mathcal{F}^{-1}u(\cdot,y), \varphi(\cdot,y)\rangle\,dy\,. \tag{2.103}$$

Udowodnimy (2.102). Ponieważ u jest dystrybucją regularną, mamy wobe (2.99)

$$\langle \mathcal{F}_{(x)}u, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} u(\xi,y)(\mathcal{F}_{(x)}\varphi)(\xi,y)\,d\xi\,dy\,.$$

Do całki po prawej stronie możemy zastosować twierdzenie Fubiniego i zamienić ją na całkę iterowaną, co daje tezę. □

2.9. Wyznaczanie rozwiązania podstawowego równania przewodnic-va cieplnego metodą transformacji Fouriera. Wyłożoną w tym paragrafie orię transformacji Fouriera zastosujemy do wyznaczenia rozwiązania podstawo-ego równania przewodnictwa cieplnego. Zgodnie z definicją (p. 5.1, rozdz. I) jest dystrybucja u, dla której

$$\Delta_x u - u_t = \delta \quad (x \in \mathbf{R}^n,\ t \in \mathbf{R}). \tag{.104}$$

Będziemy jej szukać w klasie $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n+1})$. Stosując transformację Fouriera do u stron (2.104), dla $v = \widehat{u}$ dostajemy równanie algebraiczne (por. wzory (2.61) 2.68)) $(|\xi|^2 + i\tau)v = -1$, czyli

$$v(\xi,\tau) = \frac{-1}{|\xi|^2 + i\tau}. \tag{105}$$

STWIERDZENIE 2.8. *Funkcja v, określona wzorem (2.105), jest lokalnie cał-walna w $\mathbf{R}^{n+1}$ i ograniczona w nieskończoności.*

Dowód. Poza walcem $|\xi| \leqslant 1$, $|\tau| \leqslant 1$ mamy

$$|v(\xi,\tau)|^2 = \frac{1}{|\xi|^4 + \tau^2} < 1.$$

Oprócz tego funkcja v jest ciągła poza punktem $\xi = 0$, $\tau = 0$, a więc ma ńczoną całkę po każdej kuli nie zawierającej początku układu. Całkowalność otoczeniu początku układu dla $n > 1$ sprawdzamy wprowadzając w $\mathbf{R}^{n+1}$ ółrzędne sferyczne (por. [17], rozdz. I, § 2). Dla $n = 1$ należy podzielić kwadrat $\leqslant 1$, $|\tau| \leqslant 1$ na trzy zbiory: $Q_1\colon |\tau| \leqslant \xi^2$, $Q_2\colon \tau > \xi^2$, $Q_3\colon \tau < -\xi^2$ i w każdym z n oszacować całkę. Proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie szczegółowego hunku. □

Zgodnie ze stwierdzeniem 2.6 mamy

$$u = \mathcal{F}^{-1}_{(x)}\mathcal{F}^{-1}_{(t)}v. \tag{.06}$$

Zaczniemy od znalezienia częściowej transformaty odwrotnej $\mathcal{F}^{-1}_{(t)}v$. Ze stwier-nia 2.7 wynika, że możemy ją liczyć jako odwrotną transformatę Fouriera kcji v, w której ustalono zmienne ξ. Zakładając $\xi \neq 0$ (zauważmy, że z wzoru 03) wynika, że wystarczy znać transformatę $\mathcal{F}^{-1}v(\xi,\cdot)$ dla prawie wszystkich możemy stosować lemat 2.4 i twierdzenie 2.9, co dla $t > 0$ daje

$$(\mathcal{F}^{-1}v)(\xi,t) = \frac{-1}{2\pi}\,\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it\tau}}{|\xi|^2 + i\tau}\,d\tau = -i\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{res} g_{(t)}(z), \tag{07}$$

gdzie

$$g_{(t)}(z) = \frac{e^{itz}}{|\xi|^2 + iz}.$$

Funkcja $g_{(t)}$ ma jedyny biegun $\zeta = i|\xi|^2$, a $\operatorname{res}_{z=\zeta} g_{(t)} = -ie^{-|\xi|^2 t}$. Zatem

$$(\mathcal{F}^{-1}_{(t)}v)(\xi,t) = -e^{-|\xi|^2 t}. \tag{2.108}$$

Ponieważ funkcja po prawej stronie (2.108) jest dla ustalonego $t > 0$ funk-cją klasy $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, jej odwrotną transformatę $\mathcal{F}^{-1}_{(x)}$ liczymy, posługując się wzorem całkowym (1.8). Po wykorzystaniu wzorów (2.63), (2.67) i przykładu 1.3 otrzy-mujemy, zgodnie z (2.106),

$$u(x,t) = -(2\sqrt{\pi t})^{-n}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \quad \text{dla } t > 0. \tag{2.109}$$

Jeżeli $t < 0$, to stosując ponownie lemat 2.4 i twierdzenie 2.9 dostajemy $(\mathcal{F}^{-1}v)(\xi,t) = 0$, gdyż funkcja $g_{(t)}$ nie ma biegunów w dolnej półpłaszczyźnie $\operatorname{Im} z < 0$. Wobec tego

$$u(x,t) = 0 \quad \text{dla } t < 0. \tag{2.110}$$

Funkcja u, określona wzorami (2.109) i (2.110), jest dla $t \neq 0$ identyczna z rozwiązaniem podstawowym równania przewodnictwa cieplnego, wprowadzonym w rozdziale I (p. 5.2).

3. Iloczyn tensorowy dystrybucji

Iloczynem tensorowym dwóch funkcji: $f(x)$ i $g(y)$, gdzie $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, a $y \in \Xi \subset \mathbf{R}^m$, nazywamy funkcję zmiennych x, y określoną wzorem

$$(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y). \tag{3.1}$$

Zajmiemy się obecnie rozszerzeniem definicji (3.1) na przypadek, gdy f i g są dystrybucjami.

Iloczyn tensorowy dystrybucji posłuży nam do wprowadzenia w następnym paragrafie ważnego pojęcia splotu dystrybucji.

3.1. Lokalna ograniczoność dystrybucji. Niech $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ będzie dowolnym obszarem i niech $K \subset \Omega$ będzie zbiorem zwartym. Przyjmując, że

$$\mathcal{D}_K = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\colon \underline{\varphi} \subset K\},$$

$$p_m(\varphi) = \max_{|\alpha|\leqslant m} \sup |D^\alpha \varphi|,$$

$$U_{m,\delta} = \{\varphi \in \mathcal{D}_K : p_m(\varphi) \leqslant \delta\} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

udowodnimy

TWIERDZENIE 3.1. *Niech $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Wówczas dla dowolnego zwartego zbioru $K \subset \Omega$ istnieje taka stała dodatnia C i taka liczba całkowita nieujemna m, że*

$$(3.2) \qquad |\langle f, \varphi\rangle| \leqslant C p_m(\varphi) \quad \textit{dla } \varphi \in \mathcal{D}_K\,.$$

Dowód twierdzenia będzie oparty na następującym lemacie:

LEMAT 3.1. *Niech $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i niech $K \subset \Omega$ będzie ustalonym zbiorem zwartym. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$ i takie m całkowite nieujemne, że*

$$(3.3) \qquad |\langle f, \varphi\rangle| \leqslant \varepsilon \quad \textit{dla } \varphi \in U_{m,\delta}$$

Dowód. Przypuśćmy, że teza lematu nie zachodzi. Istnieje więc liczba $\varepsilon_0 > 0$ następującej własności: dla dowolnych naturalnych m i r można dobrać taką funkcję $\varphi_{m,r} \in U_{m,1/r}$, że

$$(3.4) \qquad |\langle f, \varphi_{m,r}\rangle| > \varepsilon_0\,.$$

Oznaczając $\psi_r = \varphi_{r,r}$, sprawdzamy łatwo, że $\psi_r \to 0$ w sensie zbieżności $\mathcal{D}(\Omega)$ (por. p. 4.1, rozdz. I). Ale wobec tego

$$\lim_{r\to\infty} \langle f, \psi_r\rangle = 0\,,$$

co jest sprzeczne z (3.4).

Aby udowodnić twierdzenie, zastosujemy lemat 3.1 przyjmując $\varepsilon = 1$. Istnieją zatem takie liczby m i δ, że

$$(3.5) \qquad |\langle f, \varphi\rangle| \leqslant 1 \quad \text{dla } \varphi \in U_{m,\delta}\,.$$

Niech teraz $\psi \in \mathcal{D}_K$ będzie dowolnie obraną funkcją nierówną tożsamościowo zeru. Przyjmując w nierówności (3.5) $\varphi = \delta\psi/p_m(\psi)$ i korzystając z liniowości funkcjonału, otrzymujemy

$$(3.6) \qquad |\langle f, \psi\rangle| \leqslant \frac{1}{\delta} p_m(\psi)\,.$$

Ponieważ nierówność (3.6) jest słuszna również dla $\psi \equiv 0$, teza twierdzenia jest udowodniona. □

3.2. Definicja iloczynu tensorowego dystrybucji. Aby rozszerzyć definicję iloczynu tensorowego (3.1) na przypadek, gdy f i g są dystrybucjami, załóżmy najpierw, że są to dystrybucje regularne, tzn. funkcje lokalnie całkowalne.

Niech $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \Xi)$. Zatem, zgodnie z (3.1),

$$(3.7) \qquad \langle f \otimes g, \varphi\rangle = \int_{\Omega\times\Xi} (f \otimes g)\varphi\,,$$

gdyż iloczyn $f \otimes g$ jest oczywiście funkcją lokalnie całkowalną na produkcie $\Omega \times \Xi$. Do prawej strony (3.7) możemy zastosować twierdzenie Fubiniego i zamienić całkę po produkcie na całkę iterowaną, co daje

$$\langle f \otimes g, \varphi\rangle = \int_\Omega [f(x) \int_\Xi g(y)\varphi(x,y)\,dy]\,dx\,,$$

a więc w zapisie funkcjonałowym

$$(3.8) \qquad \langle f \otimes g, \varphi\rangle = \langle f, \psi\rangle\,,$$

gdzie

$$(3.9) \qquad \psi(x) = \langle g, \varphi(x,\cdot)\rangle\,.$$

Wzory (3.8) i (3.9) przyjmujemy za definicję iloczynu tensorowego dystrybucji $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $g \in \mathcal{D}'(\Xi)$.

Oprócz oznaczenia $f \otimes g$ będziemy również używali zapisu funkcyjnego $f(x)g(y)$.

Należy oczywiście sprawdzić, czy definicja ta jest poprawna, tzn. czy funkcjonał (3.8) jest dobrze określony. Udowodnimy w tym celu

LEMAT 3.2. *Funkcja ψ należy do klasy $\mathcal{D}(\Omega)$, przy czym*

$$(3.10) \qquad D^\alpha\psi(x) = \langle g, D_x^\alpha \varphi(x,\cdot)\rangle\,.$$

Dla uproszczenia zapisu udowodnimy (3.10), gdy $n = 1$. Ustalając $x \in \Omega$, otrzymujemy, po zastosowaniu twierdzenia o wartości średniej,

$$(3.11) \qquad \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} = \langle g, D_x\varphi(\overline{x}_h, \cdot)\rangle,$$

gdzie $\overline{x}_h$ leży pomiędzy x i $x + h$. Dla dowolnego wielowskaźnika β pochodna $D_y^\beta D_x \varphi$ jest funkcją ciągłą o zwartym nośniku, wobec tego jest ona jednostajnie ciągła. A zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można tak dobrać h_ε, żeby dla $|h| < h_\varepsilon$ i dowolnego y zachodziła nierówność

$$|D_y^\beta D_x\varphi(\overline{x}_h, y) - D_y^\beta D_x\varphi(x,y)| < \varepsilon\,,$$