Metody matematyczne fizyki, lista zadań 8

1. Wykazać, że dla operatorów A i B zachodzi:

$$e^A B e^{-A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big[\underbrace{A, [A, \ldots, [A}_{k \quad razy}, B]] \ldots \Big].$$

2. Pokazać, że operatory unitarne spełniają:

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}.$$

   Tutaj $\mathbb{I}$ oznacza operator jednostkowy.

3. Sprawdzić, że operator pędu $p = -i\partial/\partial x$ w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem jest samosprzężony. Następnie pokazać, że operatory kreacji i anihilacji

$$\hat{a} = x + ip, \qquad \hat{a^\dagger} = x - ip$$

   są względem siebie sprzężone, tzn. $(f, \hat{a}g) = (\hat{a^\dagger} f, g)$, gdzie $f(x), g(x)$ są funkcjami całkowalnymi z kwadratem.

4. Za pomocą residuów obliczyć całkę

$$\int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 + \mu^2}\, d\mathbf{k} = \frac{2\pi^2}{|\mathbf{r}|} e^{-\mu|\mathbf{r}|}$$

   Wskazówka: przejść do układu sferycznego dla zmiennej $\mathbf{k}$.

5. Sprawdzić, że rozwiązanie równania falowego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

   jest postaci: $f(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$, gdzie f_1 i f_2 to są dowolne funkcje dwukrotnie różniczkowalne.

6. Sprawdzić, że nieskończona liczba operatorów $L_n = ie^{inx}\frac{d}{dx}$, $n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ spełnia związki komutacyjne:

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m}.$$

   Sprawdzić tożsamość Jacobiego. Jest to tak zwana algebra Virasoro, odgrywająca rolę m.in. w teorii strun.