Metody matematyczne fizyki, lista zadań 7

Przestrzenie Hilberta, operatory liniowe

1. Niech $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ będzie układem wektorów ortonormalnych w $\mathbb{C}^n$. Sprawdzić, że wektor $f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$ jest ortogonalny do każdego elementu

$$\sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k \qquad (\alpha_k,\ \beta_k \in \mathbb{C})$$

wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_k = (f, \phi_k)$.

2. Pokazać, że ciąg funkcji

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad -1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ nx & \text{dla} \quad -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{dla} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

jest ciągiem Cauchy'ego na odcinku $[-1, 1]$, lecz nie ma granicy w przestrzeni $C^2(-1, 1)$ funkcji ciągłych na odcinku $[-1, 1]$ z metryką określoną wzorem:

$$d(f, g) = \left(\int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Niech m_0 oznacza ciągi liczb zespolonych $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ o skończonej liczbie wyrazów różnych od zera z naturalną strukturą przestrzeni wektorowej (działania po składowych). Pokazać, że wzór

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x_k} y_k$$

definiuje iloczyn skalarny. Jednak m_0 nie jest przestrzenią Hilberta, gdyż nie jest zupełna przy metryce wyznaczonej przez powyższy iloczyn $(\cdot, \cdot)$. W tym celu rozważyć ciąg elementów $\mathbf{x_n} = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$. Ten ciąg jest ciągiem Cauchy'ego $(m > n)$:

$$||\mathbf{x_n} - \mathbf{y_m}||^2 = (\mathbf{x_n} - \mathbf{y_m}, \mathbf{x_n} - \mathbf{y_m}) = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2},$$

a szereg $= \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ jest zbieżny. Przypuśćmy, że istnieje w m_0 granica

$$\mathbf{x^0} = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0, 0, 0, \ldots\}$$

ciągu $\mathbf{x_n}$, tzn. $\lim_{n\to\infty} ||(\mathbf{x_n} - \mathbf{x^0})|| = 0$. Jednak jeśli $n > p$ to

$$||\mathbf{x_n} - \mathbf{x^0}|| = \sum_{k=1}^{p} \left| \frac{1}{k} - x_k^0 \right|^2 + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{(p+1)^2} > 0$$

więc $\mathbf{x_n}$ nie ma granicy w m_0. Zatem m_0 nie jest przestrzenią Hilberta.

4. Niech l_2 oznacza zbiór ciągów zespolonych $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ takich, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

Pokazać, że wtedy liczba $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2$ jest skończona, gdzie $\mathbf{x} \in l_2$, $\mathbf{y} \in l_2$, czyli $||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2$ jest metryką (sprawdzić nierówność trójkąta). Pokazać, że l_2 jest zupełna w tej metryce i jest uzupełnieniem przestrzeni m_0.

5. Zastosować proces ortogonalizacji Grama–Schmidta do bazy $\{1, x, x^2, \ldots\}$ dla zbudowania kilku pierwszych elementów zbioru ortonormalnych wielomianów na odcinku $[-1, 1]$:

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

6. Pokazać, że dla operatorów A, B, C zachodzą tożsamości operatorowe:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C],$$

$$[A, BC] = [AB, C] + [CA, B],$$

$$[A, B^{-1}] = B^{-1}[B, A]B^{-1}.$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0\ .$$

Ostatni wzór to tożsamość Jacobiego.

7. Pokazać, że dla operatorów A i B zachodzą wzory:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \tfrac{1}{2!}[A, [A, B]] + \tfrac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \ldots \qquad (\ddagger)$$

oraz

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2},$$

gdy $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$. Ostatni wzór nosi nazwę tożsamość Bakera–Haussdorfa.

8. Pokazać, że wzór Taylora można zapisać w postaci operatorowej:

$$f(x + a) = e^{a\frac{d}{dx}} f(x).$$

9. Niech

$$H = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{i}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}$$

Pokazać, że unitarna transformacja:

$$\widetilde{H} = e^{\frac{i}{2}xy} H e^{-\frac{i}{2}xy} \qquad (*)$$

przeprowadza H w

$$\widetilde{H} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{4}xy$$

Zadanie zrobić na 2 sposoby: 1. Podziałać $(*)$ na $\psi(x, y)$. 2. Skorzystać ze wzoru $(\ddagger)$.