# Metody matematyczne fizyki, lista zadań 6

*Przestrzenie Hilberta*

1. Obliczyć iloczyn skalarny $(f,g)$ wektorów z przestrzeni $l_2$:

$$f = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}, \qquad g = \left\{\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots\right\}$$

   Odp. $(f,g) = \ln(2/3)$. Wskazówka: przypomnieć sobie z analizy II rozwinięcie w szereg funkcji $\ln(1+x)$.

2. Udowodnić twierdzenie Pitagorasa w przestrzeniach Hilberta: jeśli wektory $u$ i $v$ są prostopadłe $u \perp v$, tzn. $(u,v) = 0$ a norma jest zadana przez iloczyn skalarny: $\|u\|^2 = (u,u)$, to wtedy

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

3. *Wzór polaryzacyjny.* Sprawdzić, że jeśli norma jest zadana przez iloczyn skalarny: $\|x-y\|^2 = (x-y, x-y)$, to poniższa równość będzie tożsamością:

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2 + i\|x+iy\|^2\right).$$

   W rzeczywistej przestrzeni Hilberta wzór polaryzacyjny ma postać:

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

4. W przestrzeni z normą $||\cdot||$ można zadać iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot)$ wtedy i tylko wtedy gdy jest spełniona równość (tożsamość równoległoboku):

$$||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2(||f||^2 + ||g||^2) \qquad (*)$$

   Sprawdzić, że powyższa równość zachodzi, gdy norma jest generowana przez iloczyn: $||f|| = \sqrt{(f,f)}$.

5. Niech w $\mathbb{R}^n$ będzie zadana rodzina norm dla $p \geqslant 1$ (wtedy są spełnione aksjomaty normy):

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   Rozpatrzmy wektory $f = (1,1,0,\ldots,0)$ i $g = (1,-1,0,\ldots,0)$. Wtedy

$$||f||_p = ||g||_p = 2^{\frac{1}{p}}, \qquad ||f+g||_p = ||f-g||_p = 2,$$

   więc warunek $(*)$ może być spełniony tylko dla $p = 2$. Zatem tylko norma $||\cdot||_2$ pozwala określić iloczyn skalarny poprzez wzór polaryzacyjny.

6. Pokazać, że układ wektorów ortogonalnych jest zawsze liniowo niezależny.