Metody matematyczne fizyki, lista zadań 5

Funkcja delta Diraca, dystrybucje

1. Sprawdzić wzór
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{u^{i(x-y)}}{u}du = \delta(x-y)$$
Wskazówka: dokonać podstawienie: $u = e^k$.

2. Pokazać, że poniższe ciągi funkcyjne są zbieżne do delty Diraca gdy $n \to \infty$:
$$a) \qquad f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}\ , \qquad b) \quad f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2x^2+1}, \qquad c) \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x}.$$

3. Pokazać, że propagator $K(\vec{r}-\vec{r}\,';t)$ z zadania 3 z listy 4 spełnia $K(\vec{r}-\vec{r}\,';0) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$. Wskazówka: w zad. 1.a) zamienić $n \to 1/t$ i wziąć granicę $t \to 0$.

4. Pokazać, że rozwiązaniem równania $xT = 0$ jest dystrybucja $T = c\delta_0$.

5. Sprawdzić pochodne ($\mathrm{sgn}(x)$ to znak x, $\Theta(x)$ to funkcja schodkowa Heaviside'a i zachodzi $\mathrm{sgn}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$):
$$\frac{d}{dx}|x| = \mathrm{sgn}(x), \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x) = 2\delta(x), \qquad \frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x).$$

6. Sprawdzić, że n-ta pochodna w sensie dystrybucyjnym delty Diraca działa na funkcje próbne według wzoru:
$$\langle \delta^n, \phi\rangle = (-1)^n\phi^{(n)}(0)$$

7. Pokazać, że w 3 wymiarach ($r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) zachodzi:
$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$$
Wskazówka: Wyprowadzenie można znaleźć tutaj, wzory (12.40–12.49).

8. Pokazać, że transformata Fouriera w sensie dystrybucyjnym funkcji x^n wynosi
$$\widehat{x^n} = i^n\delta^{(n)}.$$

9. Pokazać, że transformata Fouriera w sensie dystrybucyjnym funkcji $\mathrm{sgn}(x)$ wynosi
$$\widehat{\mathrm{sgn}}(k) = \frac{1}{i\pi}v.p.\frac{1}{k}$$

10. Pokazać, że transformata Fouriera w sensie dystrybucyjnym funkcji schodkowej wynosi
$$\widehat{\Theta}(k) = \pi\delta(k) - \frac{i}{2\pi}v.p.\frac{1}{k}$$