# Metody matematyczne fizyki,   lista zadań 4

1. Skończone szeregi Fouriera: Skończoną transformatę Fouriera ciągu liczb $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ definiuje się wzorem:

$$\widehat{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-2\pi i nk/N}, \qquad k, n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

   Pokazać, że transformacja odwrotna jest postaci:

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{c}_k e^{2\pi i nk/N}$$

   Wskazówka: skorzystać z $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i(n-m)k/N} = N\delta_{nm}$. Udowodnić ten wzór.

2. Splot funkcji $f(x)$ i $g(x)$ jest zdefiniowany wzorem:

$$(f \otimes g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy.$$

   Własności splotu:

$$(f \otimes g)(x) = (g \otimes f)(x)$$

$$(\delta \otimes f)(x) = f(x)$$

   Pokazać, że transformata Fouriera splotu jest iloczynem transformat:

$$\mathcal{F}(f \otimes g)(k) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)(k)\mathcal{F}(g)(k)$$

   a splot transformat jest transformatą iloczynu funkcji:

$$\Big(\mathcal{F}(f) \otimes \mathcal{F}(g)\Big)(k) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(fg)(k)$$

   Uwaga: obecność $\sqrt{2\pi}$ jest dla takiej definicji transformaty Fouriera:

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ikx}\,dx$$

3. Różniczkując pod znakiem całki i całkując przez części pokazać, że transformatą Fouriera funkcji $f(x) = e^{-\pi x^2}$ jest funkcja $\widetilde{f}(k) = e^{-\pi k^2}$.

4. Równanie Schröedingera dla cząstki swobodnej ma postać:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t).$$

   Rozwiązać to równanie za pomocą transformaty Fouriera:

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\tilde{\psi}(\vec{p},t)d^3\vec{p}.$$

Przy takiej normalizacji transformata odwrotna jest dana przez:

$$\tilde{\psi}(\vec{p},t) = \int e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}.$$

Równanie Schrödingera dla $\tilde{\psi}(\vec{p},t)$ przyjmuje postać:

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\vec{p},t)}{\partial t} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\tilde{\psi}(\vec{p},t)$$

czyli

$$\tilde{\psi}(\vec{p},t) = e^{-i\vec{p}^{\,2}t/2m\hbar}\tilde{\psi}(\vec{p},0)\,.$$

Wtedy funkcja falowa w chwili $t$ daje się wyrazić przez wartość funkcji falowej w chwili $t = 0$ jako:

$$\psi(\vec{r},t) = \int K(\vec{r}-\vec{r}\,';t)\psi(\vec{r}\,',0)d^3\vec{r}\,',$$

gdzie *propagator* (propaguje funkcję od chwili $t = 0$ do czasu $t$) jest dany wzorem:

$$K(\vec{r}-\vec{r}\,';t) = \left(\frac{m}{i\hbar t}\right)^{3/2} e^{im(\vec{r}-\vec{r}\,')^2/2\hbar t}\,.$$

Pokazać, że paczka gaussowska w chwili $t = 0$ skoncentrowana w punkcie $\vec{a}$ o szerokości $\sigma$ ($N$ to czynniki normalizacyjny):

$$\psi(\vec{r},0) = Ne^{-(\vec{r}-\vec{a})^2/2\sigma^2}$$

"rozpływa" się w czasie:

$$\psi(\vec{r},t) = N\frac{1}{\sqrt{1+i\hbar t/m\sigma^2}}e^{-(\vec{r}-\vec{a})^2/(\sigma^2+i\hbar t/m)},$$

czyli mimo że nie działa na cząstkę (np. elektron) żadna siła, funkcja falowa ulega zmianie. Wskazówka: przyda się całka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\vec{r}^{\,2}/2+\vec{b}\cdot\vec{r}}d^3\vec{r} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{3/2} e^{\vec{b}^{\,2}/2a}$$

$$\frac{2\sqrt{2}e^{-\frac{mt\left(\mathrm{y}1^2+\mathrm{y}2^2+\mathrm{y}3^2\right)}{2ms^2+2iht^2}}h\pi^{3/2}s^2t}{\sqrt{-\frac{im}{ht}+\frac{t}{s^2}}\,(-ims^2+ht^2)}$$

5. Pokazać, że funkcja Diraca spełnia:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|},$$

gdzie $x_i$ to są miejsca zerowe $f(x_i) = 0$.

6. Pokazać, że transformata Fouriera potencjału ładunku punktowego w dwóch wymiarach jest znowu funkcją tej samej postaci:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(k_x,k_y) = \frac{1}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}$$

Wskazówka: przejść do układu biegunowego na płaszczyźnie i skorzystać z poprzedniego zadania.

7. Pokazać, że dla transformacji Mellina zdefiniowanej wzorem:

$$(\mathcal{M}f)(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx$$

i splotu zdefiniowanego wzorem:

$$(f \otimes g)(x) = \int_0^\infty f(xu) g(u) du$$

odpowiednik twierdzenia o splocie ma postać:

$$(\mathcal{M}(f \otimes g))(s) = (\mathcal{M}f)(s)(\mathcal{M}g)(1-s)$$

8. Pokazać, że zachodzą wzory:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) g(x-y) &= \tilde{f}\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) g(x), \quad \tilde{f}(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}, \\
\int_0^{+\infty} du\, f(u) g(ux) &= \hat{f}\left(\frac{\partial}{\partial x} x\right) g(x), \quad \hat{f}(s) \equiv \int_0^{+\infty} du\, f(u)\, u^{s-1}.
\end{aligned}$$

Marek Wolf