

Metody matematyczne fizyki, lista zadań 3

1. Pokazać, że transformata Fouriera $\hat{f}(k) = (\mathcal{F}f(t))(k)$ funkcji $f(t)$ ma następujące własności:

Jeżeli: to:

$$f(t) \text{ jest rzeczywista} \qquad \hat{f}(-k) = [\hat{f}(k)]^* \qquad (1)$$

$$f(t) \text{ jest urojona} \qquad \hat{f}(-k) = -[\hat{f}(k)]^* \qquad (2)$$

$$f(t) \text{ jest parzysta} \qquad \hat{f}(-k) = \hat{f}(k) \qquad (3)$$

$$f(t) \text{ jest nieparzysta} \qquad \hat{f}(-k) = -\hat{f}(k) \qquad (4)$$

$$f(t) \text{ jest rzeczywista i parzysta} \qquad \hat{f}(k) \text{ jest rzeczywista i parzysta} \qquad (5)$$

$$f(t) \text{ jest rzeczywista i nieparzysta} \qquad \hat{f}(k) \text{ jest urojona i nieparzysta} \qquad (6)$$

$$f(t) \text{ jest urojona i parzysta} \qquad \hat{f}(k) \text{ jest urojona i parzysta} \qquad (7)$$

$$f(t) \text{ jest urojona i nieparzysta} \qquad \hat{f}(k) \text{ jest rzeczywista i nieparzysta} \qquad (8)$$

$$f(at) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) \qquad (9)$$

$$f(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}e^{ikt_0} \qquad (10)$$

$$f(t)e^{-ik_0t} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(k - k_0) \qquad (11)$$

2. Pokazać, że transformata Fouriera przekształca sinus kardynalny $\text{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$ (więcej informacji np. tutaj lub tutaj) na funkcję prostokątną $H(x) = 1$ dla $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, a $H(x) = 0$ poza tym przedziałem, i odwrotnie:

$$(\mathcal{F}\text{sinc}(x))(u) = H(u)$$

$$(\mathcal{F}H(x))(u) = \text{sinc}(u)$$

3. Niech $\hat{q} = x$ i $\hat{p} = -i\frac{d}{dx}$ będą operatorami położenia i pędu. Sprawdzić, że zachodzą wzory

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{q}\mathcal{F} = -\hat{p}, \qquad \mathcal{F}^{-1}\hat{p}\mathcal{F} = \hat{q}$$