Metody matematyczne fizyki,   lista zadań 2

1. Jaka krzywa na płaszczyźnie łącząca dwa punkty ma najmniejszą długość?

2. *Zagadnienie brachistochrony.* Dane są dwa punkty A i B na pionowej płaszczyźnie, przy czym punkt A jest wyżej niż B. Znaleźć krzywą łączącą punkty A i B mającą tę własność, że punkt materialny pod wływem siły ciężkości zsunie się z punktu A do punktu B w najkrótszym czasie.

3. *Problem izoperymetryczny.* Znaleźć kształt krzywej zamkniętej o długości l otaczającej figurę o największej powierzchni.

4. *Geodezyjne na kuli.* Na powierzchni kuli o promieniu R i środku w (0, 0, 0) element długości we współrzędnych sferycznych r, ϕ, θ (kąt θ liczony jest od osi z, a kąt ϕ jest mierzony na płaszczyźnie x, y: $x = r\cos(\phi)\sin(\theta), y = r\sin(\theta)\sin(\phi), z = r\cos(\theta)$.) dany jest wzorem:

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

   Znaleźć krzywą o minimalnej długości łączącej dane dwa punkty na powierzchni kuli. Wskazówka: Potraktować ϕ jako funkcję zmiennej θ, (tj. $dl = R\sqrt{1 + (\phi'(\theta))^2 \sin^2(\theta)}\, d\theta$). W otrzymanym równaniu różniczkowym zrobić podstawienie: $u = \cos(\theta)/\sin(\theta)$. Wtedy rozwiązanie będzie postaci: $\mathrm{ctg}(\theta) = a\cos(\phi - \phi_0)$. Przejść od θ i ϕ do zmiennych x, y, z; otrzyma się równanie płaszczyzny przechodzącej przez (0, 0, 0). Czym jest przecięcie tej płaszczyzny ze sferą?

5. Ruch w mechanice klasycznej można opisywać za pomocą równań Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad L(x, \dot{x}, t) = T - U\ ,$$

   gdzie T jest energią kinetyczną, U oznacza energię potencjalną. Otrzymać jawne równania ruchu dla następujących lagranżianów L :

$$a) \qquad L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2},$$

$$b) \qquad L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x).$$

   Czym są całki pierwsze dla powyższych lagrangianów? Dla ogólnego zagadnienia wariacyjnego $\int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y')\, dx = \mathit{ekstremum}$ całka pierwsza jest dana przez

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = const$$

   W powyższych przykładach *a*) i *b*) mamy odpowiedniość: $x \to t,\ y \to x,\ y' \to \dot{x}$.

6. Rozłożyć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$ na odcinku $(-\pi, \pi)$:

$$x = 2\left(\frac{1}{1}\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \ldots + \frac{1}{k}(-1)^{k-1}\sin(kx) + \ldots\right)$$

7. To samo dla $f(x) = x^2$:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos(kx)}{k^2} + \dots$$

Uwaga: Szereg Fouriera dla x^{n+1} można otrzymać z szeregu dla x^n przez całkowanie po x. Dla parzystych n jest stała całkowania równa a_0 (powyżej $\frac{\pi^2}{3}$), a dla nieparzystych n stała całkowania równa jest zero.

8. Z powyższego wyniku wydobyć równości:

$$a) \qquad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots (-1)^k \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$b) \qquad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$c) \qquad 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \frac{1}{(2k+1)^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

9. Rozłożyć w szereg Fouriera funkcję schodkową

$$\theta(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{dla} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

na odcinku $(-\pi, \pi)$:

$$\theta(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

10. Rozłożyć w szereg Fouriera funkcję część ułamkowa z x: $\{x\} = x - [x]$, okresową z okresem T=1

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi x)}{k}.$$

11. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = e^{-ax^2}$.

12. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji (użyć całkowania za pomocą residuów)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Odpowiedzi do 10) i 11) można znaleźć tutaj.

dr hab. Marek Wolf