Metody matematyczne fizyki, lista zadań 1

1. Czy dla liczb zespolonych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzą relacje:

$$
\begin{array}{cc}
|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| & \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \\
\mathfrak{Re}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2) & \mathfrak{Im}\,(z_1 + z_2) = \mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2) \\
\mathfrak{Re}\,(z_1 z_2) = \mathfrak{Re}(z_1) \cdot \mathfrak{Re}(z_2) & \mathfrak{Im}\,(z_1 z_2) = \mathfrak{Im}(z_1) \cdot \mathfrak{Im}(z_2) \\
\mathfrak{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{\mathfrak{Re}(z_1)}{\mathfrak{Re}(z_2)} & \mathfrak{Im}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{\mathfrak{Im}(z_1)}{\mathfrak{Im}(z_2)} \qquad ?
\end{array}
$$

2. Tutaj można zobaczyć animację powierzchni Riemanna dla $\sqrt{z}$.

3. Dla funkcji $f(z) = z^2 + 2z$ sprawdzić równania Cauchy–Riemanna. To samo dla $f(z) = z^3$.

4. Wyliczyć całkę $\int_L |z| dz$ jeśli $a)$ $L = [-i, i]$, $b)$ L jest lewym półokręgiem łączącym $-i$ z i, $c)$ L jest prawym półokręgiem łączącym $-i$ z i. Odp. $a)$ i, $b)$ $2i$, $c)$ $2i$.

5. Wyznaczyć wartość całki $\int_O \frac{e^z dz}{z^2 + a^2}$ wzdłuż okręgu O o środku w $(0, 0)$ i promieniu $2a$. Odp. $\frac{2\pi\imath \sin(a)}{a}$.

6. Za pomocą residuów wyliczyć całki:

$$
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + a\cos(\theta))^2} = \frac{2\pi}{(1 - a^2)^{3/2}},
$$

$$
\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{\pi}{8},
$$

$$
\int_0^{\infty} \frac{\cos(x) dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}, \qquad (a > 0)
$$

7. Funkcja gamma Eulera zdefiniowana jest całką:

$$
\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0.
$$

Całkując przez części pokazać, że $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, wzór ten pozwala zdefiniować $\Gamma(x)$ dla ujemnych argumentów. Powtarzając całkowanie przez części n razy dla argumentu $z = n \in \mathbb{N}$ pokazać, że funkcja $\Gamma(x)$ jest uogólnieniem silni na dowolne argumenty: $\Gamma(n) = (n - 1)!$. Wyprowadzić wzór Stirlinga:

$$
\Gamma(x + 1) \approx \sqrt{2\pi}\, x^{x + \frac{1}{2}} e^{-x}
$$

Dla ochotników: Dla dowolnych wartości zespolonych z wartość funkcji gamma może być wyliczona z następującego iloczynu Weierstrassa:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{-1} e^{z/k} \,,$$

gdzie $\gamma \approx 0.577216$ jest stałą Eulera–Mascheroni $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$. Z powyższego wzoru od razu widać, że $\Gamma(z)$ ma bieguny dla ujemnych liczb całkowitych.