

FREDERICK W. BYRON
ROBERT W. FULLER

*MATEMATYKA
W FIZYCE
KLASYCZNEJ
I KWANTOWEJ*

TOM 2



FREDERICK W. BYRON
ROBERT W. FULLER

*MATEMATYKA
W FIZYCE
KLASYCZNEJ
I KWANTOWEJ*

TOM 2

FREDERICK W. BYRON
ROBERT W. FULLER

MATEMATYKA
W FIZYCE
KLASYCZNEJ
I KWANTOWEJ

Tom 2

wydanie II poprawione



WARSZAWA 1975
PAŃSTWOWE
WYDAWNICTWO
NAUKOWE

Autorzy

FREDERICK W. BYRON ROBERT W. FULLER

Tytuł oryginału

MATHEMATICS OF CLASSICAL AND QUANTUM PHYSICS

Tom 2

This volume is a Polish translation of MATHEMATICS OF CLASSICAL AND QUANTUM PHYSICS, Volume 2, by Frederick W. Byron jr. and Robert W. Fuller, published and sold in Poland only by permission of Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, U.S.A., the owner of all rights to publish and sell the same.

Z języka angielskiego tłumaczyli

Andrzej Pindor i Andrzej Szymacha

Okładkę projektował

Piotr Tomaszewski

Redaktor

Krzysztof Bujalski

Redaktor techniczny

Maria Czyżewska-Zielińska

Korektor

Janina Chombakow

Printed in Poland

Tom 1

1. Wektory w fizyce klasycznej
2. Rachunek wariacyjny
3. Wektory i macierze
4. Przestrzenie wektorowe w fizyce
5. Przestrzeń Hilberta — zupełne ortonormalne zbiory funkcji

Tom 2

6. Wybrane zagadnienia i zastosowania teorii funkcji analitycznych	7
Wstęp	7
6.1. Funkcje analityczne — warunki Cauchy’ego–Riemanna	8
6.2. Niektóre podstawowe funkcje analityczne	14
6.3. Całkowanie zespolone — twierdzenie Cauchy’ego–Goursata	24
6.4. Konsekwencje twierdzenia Cauchy’ego	30
6.5. Transformaty Hilberta i wartość główna Cauchy’ego	36
6.6. Wprowadzenie do związków dyspersyjnych	41
6.7. Rozwinięcie funkcji analitycznej na szereg potęgowy	51
6.8. Teoria residuów — obliczanie rzeczywistych całek oznaczonych i sumowanie szeregów	59
6.9. Zastosowania do funkcji specjalnych i przedstawień całkowych	72
7. Funkcje Greena	87
Wstęp	87
7.1. Nowy sposób rozwiązywania równań różniczkowych	87
7.2. Funkcje Greena i funkcja delta	94
7.3. Funkcje Greena w jednym wymiarze	99
7.4. Funkcje Greena w trzech wymiarach	108
7.5. Radialne funkcje Greena	117
7.6. Zastosowanie do zagadnień dyfrakcyjnych	130
7.7. Funkcje Greena zależne od czasu: pierwszy rząd	137
7.8. Równanie falowe	147
8. Wprowadzenie do równań całkowych	163
Wstęp	163
8.1. Metody iteracyjne — liniowe operatory całkowe	163
8.2. Normy operatorów	168

8.3. Metody iteracyjne w przestrzeni Banacha	172
8.4. Metoda iteracyjna równań nieliniowych	177
8.5. Jądra separowalne	183
8.6. Jądra skończonego rzędu	189
8.7. Operatory zwarte	195
9. Równania całkowe w przestrzeni Hilberta	210
Wstęp	210
9.1. Zwarte operatory hermitowskie	210
9.2. Równania liniowe i teoria zaburzeń	222
9.3. Metody przybliżeń skończonego rzędu dla zagadnień własnych	231
9.4. Alternatywa Fredholma dla operatorów zwartych	239
9.5. Numeryczne rozwiązywanie równań całkowych	245
9.6. Odwzorowania unitarne	252
10. Wstęp do teorii grup	270
Wstęp	270
10.1. Podejście indukcyjne	270
10.2. Grupy permutacji	276
10.3. Warstwy, klasy i podgrupy niezmiennicze	282
10.4. Symetrie i reprezentacje grupy	288
10.5. Reprezentacje nieprzywiedlne	293
10.6. Reprezentacje unitarne, lematy Schura i związki ortogonalności	299
10.7. Wyznaczanie reprezentacji grup	311
10.8. Teoria grup w problemach fizycznych	322
Skorowidz do tomu pierwszego	336
Skorowidz do tomu drugiego	340

WYBRANE ZAGADNIENIA I ZASTOSOWANIA TEORII FUNKCJI ANALITYCZNYCH

WSTĘP

Roła, jaką odgrywa teoria funkcji analitycznych w fizyce, uległa w ciągu ostatnich dziesięcioleci znacznym zmianom. Obecnie nie wystarcza już umiejętność obliczania całek za pomocą residuów; aby móc śledzić bieżące zastosowanie funkcji analitycznych w teoriach fizycznych, niezbędne jest głębsze zrozumienie idei matematycznych. Dlatego też w niniejszym rozdziale główny nacisk będzie położony na wprowadzanie matematycznych koncepcji i logicznej struktury teorii funkcji analitycznych. Zakładając u czytelnika jedynie znajomość własności liczb zespolonych, pragniemy zaprezentować stanowiący zamkniętą całość wykład teorii w sposób, który na tyle przygotuje czytelnika, aby mógł sobie radzić zarówno ze współczesnymi, jak i dawnymi zastosowaniami teorii.

Liczby „urojone” zostały odkryte w średniowieczu przy poszukiwaniach ogólnego rozwiązania równań kwadratowych. Nazwa, jaką im dano, wyraźnie wskazuje, że odnoszono się do nich podejrzliwie. W swojej pracy doktorskiej z 1799 roku Gauss podał znaną obecnie geometryczną interpretację liczb zespolonych i pomógł w ten sposób częściowo rozproszyć otaczającą je tajemniczość. W obecnym wieku istniała tendencja do definiowania liczb zespolonych jako abstrakcyjnych symboli podlegających przekształceniom według pewnych formalnych reguł. W ten sposób liczby zespolone nigdy nie nabrały „przyziemnych” cech liczb rzeczywistych. Faktycznie zdarzyło się raczej coś odwrotnego: zaczęliśmy uważać liczby rzeczywiste za abstrakcyjne symbole spełniające swój własny zespół aksjomatów, zupełnie tak samo jak liczby zespolone. Mówimy obecnie o polach: *polu liczb rzeczywistych* i *polu liczb zespolonych*. Aksjomaty definiujące pole zostały podane w rozdziale 3 omawiającym przestrzenie wektorowe.

Teorię liczb zespolonych można rozwinąć rozważając te liczby jako uporządkowane pary liczb rzeczywistych, zapisane w postaci (x, y) . Niech (a, b) i (c, d) będą dwoma różnymi liczbami zespolonymi i niech K będzie liczbą rzeczywistą. Dodawanie liczb zespolonych i mnożenie liczby rzeczywistej przez zespoloną oraz mnożenie dwóch liczb zespolonych zdefiniowane jest wtedy za pomocą następujących reguł:

1. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
2. $K \cdot (a, b) = (Ka, Kb)$,
3. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$.

Z definicji tych widzimy, że zbiór wszystkich liczb zespolonych — płaszczyzna zespolona — ma taką samą strukturę matematyczną jak zbiór wszystkich wektorów na płaszczyźnie.

Takie podejście zostało przyjęte w *Podstawach Analizy* opracowanych przez Landaua, gdzie różne systemy liczbowe są konstruowane logicznie z pięciu aksjomatów Peano; liczba urojona i nie jest nigdzie wymieniona. Jednakże gdy napiszemy uporządkowaną parę (a, b) w postaci $a+ib$, gdzie $i^2 = -1$, wtedy powyższe reguły mnożenia liczb zespolonych są zachowane, jeżeli mnożymy iloczyn $(a+ib)(c+id)$ po prostu według zwykłych reguł mnożenia liczb rzeczywistych. Wprowadzenie symbolu i pozwala na uwzględnienie porządkującego aspektu uporządkowanej pary liczb rzeczywistych podczas rozszerzania formalnych reguł arytmetyki z liczb rzeczywistych na liczby zespolone.

Liczyby zespolone skonstruowane jako uporządkowane pary liczb rzeczywistych, gdzie $(a, b) = a+ib$ można uogólnić do liczb hiperzespolonych z trzema lub więcej składowymi, na przykład $(a, b, c) = a+ib+kc$. Czteroskładnikowe kwaterniony, typ liczb zespolonych, które spełniają wszystkie reguły arytmetyki z wyjątkiem prawa przemienności mnożenia, użyteczne są przy rozpatrywaniu obrotów ciała sztywnego. Cztery macierze 4×4 Diraca γ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) tworzą zbiór liczb hiperzespolonych spełniających relacje antykomutacji:

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij}.$$

Można pokazać, że bez względu na to, jak zdefiniujemy dodawanie i mnożenie tych liczb hiperzespolonych, niemożliwe jest zachowanie zwykłych reguł arytmetyki. Jak pokazał Weyl, liczby zespolone tworzą naturalną granicę przy rozrzeszaniu pojęcia liczby w tym względzie.

6.1. FUNKCJE ANALITYCZNE — WARUNKI CAUCHY'EGO-RIEMANNA

Jeżeli każdej liczbie zespolonej z z pewnego obszaru odpowiada inna liczba zespolona w , wtedy w jest funkcją zmiennej zespolonej z , tzn. $w = f(z)$. Jeżeli jest to odpowiedniość jeden — jeden, wtedy możemy uważać tę funkcję za odwzorowanie jednej płaszczyzny lub jej części, płaszczyzny z w inną płaszczyznę w . Tak zdefiniowane funkcje zmiennej zespolonej są równoważne uporządkowanym parom rzeczywistych funkcji dwóch zmiennych, ponieważ w jest liczbą zespoloną zależną od $z = x+iy$ i może być zatem zapisane w postaci

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Jednakże ta klasa funkcji jest dla naszych celów zbyt ogólna. Interesujemy się tylko takimi funkcjami, które są różniczkowalne względem zmiennej zespolonej z — jest to ograniczenie znacznie silniejsze niż warunek, aby u i v były różniczkowalne względem x i y . Pierwszym naszym zadaniem przy studiowaniu teorii funkcji zmiennej zespolonej będzie zatem określenie wystarczających i koniecznych warunków na to, aby funkcja zespolona miała pochodną względem zmiennej zespolonej z . Jednowartościowe funkcje zmiennej zespolonej posiadające pochodne w jakimś obszarze płaszczyzny zespolonej nazywają się *funkcjami analitycznymi*. W naszych rozważaniach ograniczymy się do tej specjalnej klasy funkcji zespolonych.

Oto dwa przykłady zespolonych funkcji, oba zapisane w postaci $w = u + iv$:

1. $w = z^* = x - iy$,

2. $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

Obecnie pokażemy, że (1) nie jest funkcją analityczną, natomiast funkcja (2) jest analityczna wszędzie w płaszczyźnie zespolonej, tzn. pochodna tej funkcji istnieje we wszystkich punktach.

Zanim dokładnie określimy, co rozumiemy przez pochodną funkcji zmiennej zespolonej, musimy dla tych funkcji dysponować pojęciem ciągłości.

W definicji, która nastąpi, używa się pojęcia wartości bezwzględnej liczby zespolonej, oznaczonej przez $|z|$. Czytelnik przypomni sobie, że $|z| = (zz^*)^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Wartość bezwzględna nazywana jest czasami modulem.

Definicja. Funkcja zespolona $w = f(z)$ jest ciągła w punkcie z_0 , jeżeli dla każdego dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie δ , że $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, jeżeli $|z - z_0| < \delta$ lub też $f(z)$ jest ciągła w z_0 , jeżeli

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Definicja ta brzmi zupełnie tak samo, jak definicja ciągłości dla funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej. Jednakże w powyższej definicji znak wartości bezwzględnej oznacza, że jeżeli tylko z leży wewnątrz okręgu o promieniu δ i środku w z_0 w zespolonej płaszczyźnie z , wtedy $f(z)$ leży wewnątrz okręgu o promieniu ε i środku w $f(z_0)$ w płaszczyźnie zespolonej w . Jeżeli $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, wtedy $f(z)$ jest ciągle w $z_0 = x_0 + iy_0$, jeżeli u i v są ciągłe w (x_0, y_0) .

Z klasy jednowartościowych, ciągłych funkcji zespolonych, chcemy teraz wybrać te, które można różniczkować. Wzorując się na definicji pochodnej z analizy funkcji rzeczywistych mamy:

Definicja. $f(z)$ jest różniczkowalne w punkcie z_0 , jeżeli istnieje granica

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}.$$

Granice tę, pochodną $f(z)$ w z_0 , będziemy oznaczać przez $f'(z_0)$.

Bardzo ważną cechą granic występujących w definicjach ciągłości i pochodnej jest to, że z może dążyć do z_0 wzdłuż dowolnego kierunku leżącego na płaszczyźnie. Kiedy mówimy, że istnieje granica, mamy zatem na myśli, iż proces przechodzenia do granicy musi dać w rezultacie tę samą liczbę bez względu na to, w jaki sposób dokonywane jest to przejście graniczne. To samo jest prawdziwe w analizie funkcji rzeczywistych, ale w tamtym przypadku istnieją tylko dwa możliwe kierunki przy przechodzeniu do granicy: od lewej lub prawej strony na osi rzeczywistej. W analizie funkcji rzeczywistych proces przechodzenia do granicy jest jednowymiarowy; w analizie funkcji zespolonych jest on dwuwymiarowy.

Równanie, które definiuje pochodną oznacza, iż dla każdego dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje takie δ , że

$$\left| f'(z) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon,$$

o ile tylko $|z - z_0| < \delta$. Żądanie, aby stosunek $[f(z) - f(z_0)] / (z - z_0)$ zawsze dążył do tej samej wartości granicznej, bez względu na to wzdłuż jakiej drogi z zdąża do z_0 , jest

niezwykle surowym warunkiem. Teoria funkcji analitycznych zawiera sporo zadziwiających twierdzeń, a wszystkie one są rezultatem tego surowego wstępnego warunku, aby funkcja posiadała „izotropowe” pochodne.

Mówimy, że jednowartościowa funkcja zmiennej z jest *analityczna* lub *regularna* w punkcie z_0 , jeżeli ma pochodną w z_0 i we wszystkich punktach z pewnego otoczenia z_0 . Wprowadzimy zatem niewielkie rozróżnienie między różniczkowalnością i analitycznością. Warto to zrobić, ponieważ istnieją funkcje, które mają pochodne w pewnych punktach lub nawet wzdłuż pewnych krzywych, ale nie można otrzymać żadnych interesujących rezultatów, dopóki funkcje nie są różniczkowalne w jakimś obszarze, tzn. dopóki nie są one analityczne. Wobec tego, jeżeli mówimy, że funkcja jest analityczna na jakiejś krzywej, mamy na myśli, że ma ona pochodną we wszystkich punktach jakiegoś dwuwymiarowego pasa zawierającego tę krzywą. Jeżeli funkcja nie jest analityczna w punkcie lub na krzywej, mówimy, że jest tam *osobliwa*.

Zbadamy teraz dwie wcześniej wymienione funkcje zespolone ze względu na różniczkowalność i analityczność. Pochodną w z_0 zapiszemy w postaci

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

kładąc w pierwotnej definicji $z = z_0 + \Delta z$. Dla $f(z) = z^2$ mamy

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0.$$

Wynik ten jest w sposób oczywisty niezależny od drogi, wzdłuż której $\Delta z \rightarrow 0$, tak więc funkcja $f(z) = z^2$ jest wszędzie różniczkowalna i analityczna. Wynik ten jest zupełnie analogiczny do pochodnej funkcji rzeczywistej $f(x) = x^2$.

Z drugiej strony, jeżeli $f(z) = z^*$, wtedy mamy

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0^* + \Delta z^* - z_0^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z}.$$

Jeżeli $\Delta z \rightarrow 0$ wzdłuż osi rzeczywistej x , to $\Delta z = \Delta x$ i $\Delta z^* = \Delta x^* = \Delta x$, tak więc $f'(z_0) = +1$. Jeżeli natomiast Δz zdąży do 0 wzdłuż urojonej osi y , wtedy $\Delta z = i\Delta y$ tak, że $\Delta z^* = -i\Delta y = -\Delta z$, a zatem $f'(z_0) = -1$. Ponieważ dla dowolnego punktu z_0 granica przy $z \rightarrow z_0$ zależy od kierunku podchodzenia do z_0 , funkcja nie jest nigdzie różniczkowalna ani analityczna. [Ogólnie $\Delta z^*/\Delta z = e^{-2i\theta}$, gdzie $\theta = \arctg(\Delta y/\Delta x)$, co w widoczny sposób zawiera kierunek (θ), w jakim przechodzimy do granicy.]

Wiele twierdzeń o różniczkowalności w analizie rzeczywistej ma swoje analogie w analizie zespolonej i tak mamy:

1. Funkcja stała jest analityczna.
2. $f(z) = z^n$ dla $n = 1, 2, \dots$ jest analityczna.
3. Suma, iloczyn i iloraz funkcji analitycznych są analityczne zakładając w przypadku ilorazu, że mianownik nie znika nigdzie w rozważanym obszarze.
4. Funkcja analityczna funkcji analitycznej jest analityczna.

Dowody przebiegają zupełnie tak samo jak w przypadku rzeczywistym.

Określmy teraz konieczne i wystarczające warunki na to, aby funkcja $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ była różniczkowalna w jakimś punkcie. Założymy po pierwsze, że $w(z)$ jest rzeczywiście różniczkowalna w jakimś punkcie $z = z_0$, wtedy

$$w'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} + i \frac{\Delta v}{\Delta z} \right).$$

Ponieważ $w'(z_0)$ istnieje, liczba ta nie zależy od tego, w jaki sposób $\Delta z \rightarrow 0$, to znaczy nie zależy od stosunku $\Delta y/\Delta x$. Jeżeli przechodzimy do granicy wzdłuż osi rzeczywistej $\Delta y = 0$ i $\Delta z = \Delta x$, wtedy

$$w'(z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Z drugiej strony, jeżeli przechodzimy do granicy wzdłuż osi urojonej, $\Delta x = 0$ i $\Delta z = i\Delta y$. Teraz

$$w'(z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta y} - i \frac{\Delta u}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Z założenia różniczkowalności te dwie granice muszą być sobie równe. Przyrównując części rzeczywiste i zespolone mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6.1)$$

Równania (6.1) znane są jako równania Cauchy'ego–Riemanna. Podają one warunek konieczny na to, aby funkcja była różniczkowalna. Warunek ten otrzymaliśmy żądając różniczkowalności w specjalny sposób; nie jest zatem zadziwiające, że warunki powyższe same nie są wystarczające. Wystarczające warunki na różniczkowalność $w(z)$ w punkcie z_0 są następujące: po pierwsze równania Cauchy'ego–Riemanna muszą być w tym punkcie spełnione i po drugie — pierwsze pochodne cząstkowe $u(x, y)$ i $v(x, y)$ muszą istnieć i być ciągłe w z_0 .

Dowód jest zupełnie prosty. Zauważmy najpierw, że u jest ciągłe w (x_0, y_0) , ponieważ jest tam różniczkowalne; cząstkowe pochodne u są ciągłe z założenia. W tych warunkach z analizy funkcji wielu zmiennych wynika*, że

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

gdzie $\partial u/\partial x$ i $\partial u/\partial y$ są cząstkowymi pochodnymi określonymi w punkcie (x_0, y_0) , a ε_1 i ε_2 zmierzają do zera, gdy zarówno Δx i Δy zbiegają do zera. Stosując podobny wzór dla $v(x, y)$ mamy

$$\begin{aligned} \Delta w &= w(z_0 + \Delta z) - w(z_0) = \Delta u + i\Delta v = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y \right). \end{aligned}$$

* Patrz np. G. B. Thomas jr., *Calculus and Analytic Geometry* czwarte wydanie, Addison-Wesley Publishing Co. 1968, § 15-4, str. 503, równ. 4 lub W. Kaplan *Advanced Calculus* Addison-Wesley Publishing Co. 1953, § 2-6, str. 84.

Używając teraz równań Cauchy'ego–Riemanna, które z założenia spełnione są w punkcie (x_0, y_0) , otrzymujemy

$$\Delta w = \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \Delta x(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) + \Delta y(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4),$$

zatem

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) \frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4) \frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

Ponieważ $|\Delta z| = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2}$, $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ i $|\Delta y| \leq |\Delta z|$, więc $|\Delta x/\Delta z| \leq 1$ i $|\Delta y/\Delta z| \leq 1$. Ponieważ te czynniki są ograniczone, dwa ostatnie człony w powyższym równaniu zmierzają do zera wraz z Δz , bo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ i ε_4 zbiegają do zera, gdy Δz dąży do zera. Zatem w z_0

$$w'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (6.2)$$

granica ta nie zależy od drogi, więc pochodna istnieje. Stosując warunki Cauchy'ego–Riemanna mamy także

$$w'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6.3)$$

Przykład. Rozważmy funkcję z^3 . Mamy

$$z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = u + iv,$$

zatem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Wobec tego równania Cauchy'ego–Riemanna są wszędzie spełnione. Ponieważ pochodne cząstkowe są ciągłe, funkcja z^3 jest rzeczywiście wszędzie analityczna. Funkcja, która jest analityczna w całej płaszczyźnie zespolonej, nazywana jest funkcją całkowitą. Pochodną z^3 można znaleźć używając (6.2) lub (6.3). Otrzymujemy

$$\frac{dz^3}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 3[(x^2 - y^2) + 2ixy] = 3z^2,$$

co jest zadowalającym wynikiem. Jako drugi przykład pozostawimy czytelnikowi pokazanie, że funkcja $|z|^2 \equiv zz^*$ jest różniczkowalna tylko w początku układów współrzędnych i zatem nie jest nigdzie analityczna. Z równań Cauchy'ego–Riemanna wynika natychmiast pewien godny uwagi rezultat, który wskazuje na związki z fizyką. Zakładając, że równania te spełnione są w pewnym obszarze mamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0, \quad (6.4)$$

jeżeli drugie pochodne cząstkowe są ciągłe tak, że możemy zamienić porządek różniczkowania w mieszanych pochodnych cząstkowych. W ten sam sposób możemy stwierdzić, że funkcja v także spełnia dwuwymiarowe równanie Laplace'a, a więc części rzeczywista i urojona funkcji analitycznej, posiadające ciągłe drugie pochodne cząstkowe, obie spełniają dwuwymiarowe równanie Laplace'a. Udowodnimy później, stosując teorię całki,

że drugie pochodne cząstkowe funkcji analitycznej są z konieczności ciągłe; to zastrzeżenie można więc opuścić. Interesujące jest, że te twierdzenia o pochodnych mogą być udowodnione tylko drogą całkowania.

Każda funkcja spełniająca $\nabla^2\phi = 0$ nazywana jest funkcją harmoniczną. Jeżeli $f = u + iv$ jest funkcją analityczną, to $\nabla^2u = \nabla^2v = 0$ i wtedy u i v nazywane są *stowarzyszonymi funkcjami harmonicznymi*. Jeżeli dana jest jedna z dwóch stowarzyszonych funkcji harmonicznymi, można użyć równań Cauchy'ego–Riemanna do znalezienia drugiej z dokładnością do stałej. Przykładowo łatwo zauważyć, że funkcja $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ jest harmoniczną. W celu znalezienia stowarzyszonej do niej funkcji harmonicznymi postępujemy następująco:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow v = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x),$$

gdzie $\phi(x)$ jest pewną funkcją x . Używając teraz drugiego równania Cauchy'ego–Riemanna otrzymujemy

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow -6xy + \phi'(x) = -6xy \Rightarrow \phi' = 0,$$

zatem $\phi(x)$ musi być stałą i funkcja harmoniczną stowarzyszona do u ma postać

$$v = 2y - 3x^2y + y^3 + \text{const.}$$

Zauważmy, że funkcja $w = u + iv = 2z - z^3 + C$ jest funkcją analityczną, tak jak być powinno.

Zanim pójdziemy dalej, spróbujmy korzystając z faktu, że jesteśmy fizykami, zaprezentować inne, krótsze wyprowadzenie tych warunków, oparte na użyciu nieskończenie małych przyrostów. Niech $w = u + iv$ i $w' = p + iq$, wtedy $\delta w = w' \delta z$ lub biorąc część rzeczywistą i urojoną

$$\delta u = p \delta x - q \delta y, \quad \delta v = p \delta y + q \delta x.$$

Stąd wynika natychmiast, że

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = p, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = q.$$

Równania powyższe są identyczne z równaniami Cauchy'ego–Riemanna (6.1).

Kontynuując te nieformalne rozważania, możemy wyprowadzić inny, ściśle związany wynik, który pozwoli nam lepiej zrozumieć sens analityczności. Ponownie, niech $w(z) = w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Pokażemy teraz, że $\partial w / \partial z^* = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy równania Cauchy'ego–Riemanna są spełnione. Nie będziemy kłopotać się sensem tej pochodnej względem z^* , ale po prostu formalnie zróżniczkujemy traktując pochodną symbolicznie. Z pomocą wyrażeń

$$x = (z + z^*)/2 \quad \text{i} \quad y = (z - z^*)/2i$$

mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z^*} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(-\frac{1}{2i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Jeżeli równania Cauchy'ego–Riemanna są spełnione, ostatnie wyrażenie znika. Jeżeli z drugiej strony $\partial w/\partial z^* = 0$, wtedy zarówno rzeczywista jak i zespolona część ostatniego wyrażenia musi znikać, a więc równania Cauchy'ego–Riemanna są spełnione.

Ten czysto formalny wynik, który można otrzymać ściśle, sugeruje nam, że funkcje analityczne są niezależne od z^* ; są one funkcjami tylko z . Tak więc funkcje analityczne są prawdziwymi funkcjami zmiennej zespolonej, a nie po prostu zespolonymi funkcjami dwóch zmiennych rzeczywistych (patrz np. zadanie 1), które ogólnie rzecz biorąc będą zależały zarówno od z^* , jak również od z , zgodnie z

$$f(x, y) = f\left(\frac{z+z^*}{2}, \frac{z-z^*}{2i}\right).$$

6.2. NIEKTÓRE PODSTAWOWE FUNKCJE ANALITYCZNE

Jedną z najbardziej użytecznych funkcji zmiennej zespolonej jest funkcja wykładnicza, którą dla $z = x + iy$ definiujemy przez

$$e^z \equiv e^x(\cos y + i \sin y). \quad (6.5)$$

Z tej definicji i z naszych poprzednich rozważań wynika prosto, że e^z jest funkcją analityczną i że

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Inne znane własności funkcji wykładniczych, w szczególności $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ wynikają bezpośrednio z równania (6.5). Zauważmy, że e^z jest funkcją okresową o okresie $2\pi i$, tzn.

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

Z równania (6.5) widzimy, że

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

skąd wynika, iż

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Wzory te sugerują, że dla dowolnego zespolonego z możemy zdefiniować

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (6.6)$$

i

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (6.7)$$

a ponieważ

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z,$$

to łatwo jest obliczyć pochodne $\cos z$ i $\sin z$. Otrzymujemy

$$\frac{d}{dz} \cos z = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z,$$

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \cos z,$$

jak moglibyśmy się spodziewać sądząc z przypadku zmiennej rzeczywistej. Używając równań (6.6) i (6.7) łatwo sprawdzić, że wszystkie znane tożsamości trygonometryczne, takie jak

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

pozostają słuszne dla zmiennych zespolonych.

Zespolone funkcje sinus i cosinus mogą oczywiście być zapisane w postaci $u(x, y) + iv(x, y)$. Przykładowo

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} [e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}] = \frac{1}{2i} e^{-y}(\cos x + i \sin x) - \frac{1}{2i} e^y(\cos x - i \sin x) = \\ &= \sin x(e^y + e^{-y})/2 + i \cos x(e^y - e^{-y})/2, \end{aligned}$$

zatem

$$\sin z = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x. \quad (6.8)$$

Podobnie

$$\cos z = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x. \quad (6.9)$$

Kładąc $x = 0$ uzyskujemy użyteczne relacje $\sin(iy) = i \sinh y$ i $\cos(iy) = \cosh y$. Widzimy także, że warunki Cauchy'ego-Riemanna spełnione są wszędzie tak, jak wiemy, że powinny być. Z równań (6.8) i (6.9) wynikają bezpośrednio inne własności

$$\begin{aligned} (\sin z)^* &= \sin(z^*), \\ \sin(-z) &= -\sin(z), \\ \sin(z + 2\pi) &= \sin(z). \end{aligned}$$

Używając funkcji sinus i cosinus definiujemy inne znane funkcje trygonometryczne, np.

$$\operatorname{tg} z = \sin z / \cos z.$$

W podobny sposób przez analogię z przypadkiem rzeczywistym definiujemy cotangens, secans i cosecans. Funkcje te różnią się od sinusa i cosinusa w ten sposób, że nie są wszędzie analityczne. Tangens będący stosunkiem dwóch funkcji analitycznych będzie analityczny wszędzie z wyjątkiem punktów, w których $\cos z = 0$. Używając części rzeczywistej i zespolonej cosinusa możemy napisać ten warunek jako

$$\cosh y \cos x = 0, \quad \sinh y \sin x = 0.$$

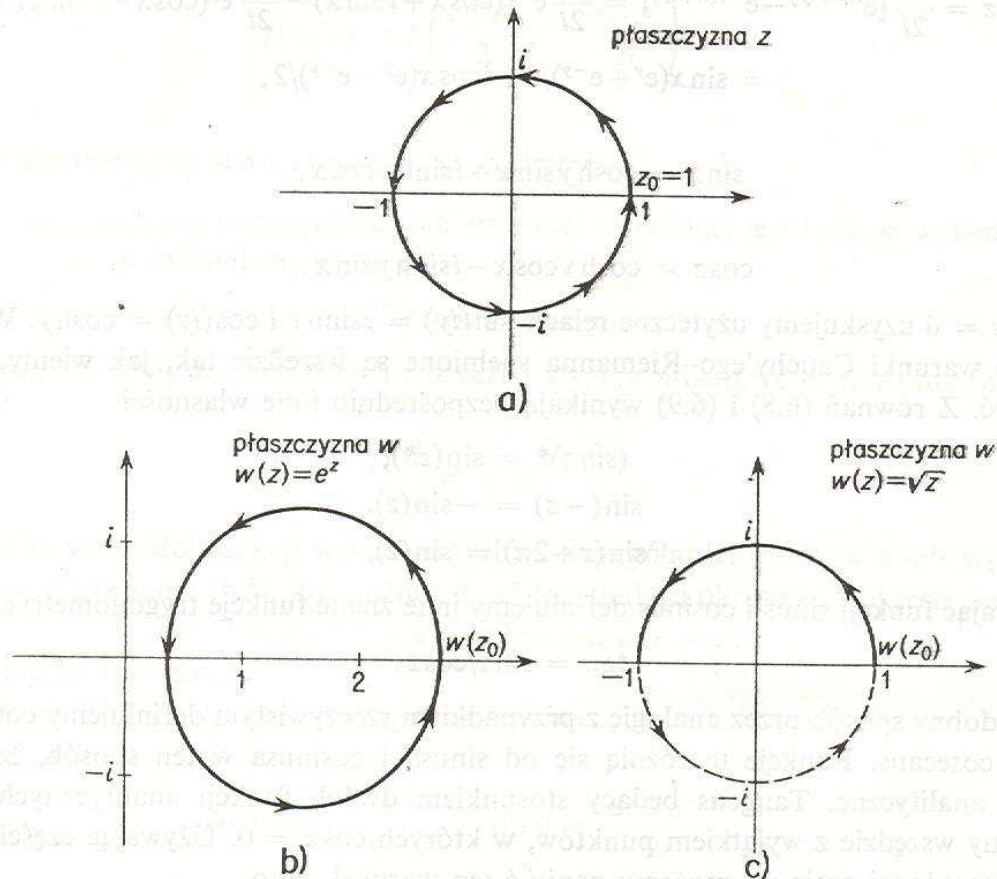
Teraz $\cosh y \geq 1$ dla wszystkich rzeczywistych y ; pierwsze równanie ma więc rozwiązania wszędzie, gdzie $\cos x = 0$ lub $x = (2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. W tych punktach $\sin x = \pm 1$, więc drugie równanie wymaga, aby $\sinh y = 0$, tzn. $y = 0$. Zatem tangens jest funkcją osobliwą w punktach $(2n+1)\pi/2$ dla $n = 0, \pm 1, \dots$ na osi rzeczywistej i tylko w tych punktach. Wobec tego $\operatorname{tg} z$ staje się nieskończony w dokładnie tych samych punktach, gdzie $\operatorname{tg} x$ (x rzeczywiste) staje się nieskończony i tylko w tych punktach.

Na podstawie powyższych dyskusji kuszące może być przypuszczenie, że zespolone funkcje trygonometryczne są „po prostu tym samym” co ich rzeczywiste odpowiedniki. Jednakże czytelnik może łatwo pokazać, że

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

i wyrażenie powyższe wzrasta bezgranicznie, gdy y dąży do nieskończoności. Kontrastuje to zasadniczo z przypadkiem rzeczywistym, gdzie $|\sin x| \leq 1$ dla wszystkich rzeczywistych x .

Wszystkie funkcje, które dyskutowaliśmy do tej pory, miały taką własność, że jeżeli wybierzemy dowolny punkt z_0 w płaszczyźnie zespolonej i wyjdziemy z tego punktu, aby poruszając się po dowolnej drodze powrócić do niego z powrotem, to wartość funkcji zmienia się w sposób ciągły wzdłuż pewnej drogi powracając do pierwotnej wartości w z_0 . Przypuśćmy przykładowo, że rozważamy funkcję $w(z) = e^z$ i zaczynając z punktu $z_0 = 1$ okrążamy w płaszczyźnie z początek układu po kole jednostkowym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Rys. 6.1(a) pokazuje kołową drogę w płaszczyźnie z , a rys. 6.1(b) odpowiednią drogę w płaszczyźnie w . [Użycie dwóch płaszczyzn zespolonych w celu



Rys. 6.1(a) Kontur kołowy w płaszczyźnie z wokół początku układu. (b) Odwzorowanie konturu z rys. 6.1(a) przez funkcję e^z . (c) Odwzorowanie konturu z rys. 6.1(a) przez funkcję \sqrt{z} .

„wykreślenia” funkcji $w(z)$ jest często używane w teorii zmiennej zespolonej.] Zauważmy, że obie drogi są zamknięte, co jest właśnie geometrycznym stwierdzeniem faktu, że jeżeli startujemy z punktu z_0 , gdzie funkcja ma wartość $w(z_0)$, i gdy poruszając się po krzywej zamkniętej wrócimy z powrotem do z_0 , to wartości funkcji tworzą także linię ciągłą powracającą do $w(z_0)$. W wypadku funkcji e^z rezultat ten trudno uważać za niezwykły, ponieważ tak zdefiniowaliśmy e^z , kierując się własnościami rzeczywistej funkcji wykładniczej, aby funkcja ta zachowywała się w opisany sposób. Jeżeli teraz przyjrzymy się innej prostej funkcji, mianowicie pierwiastkowi kwadratowemu, to zobaczymy, że nie zawsze sprawy wyglądają tak prosto. Napiszmy formalnie

$$w(z) \equiv \sqrt{z} \equiv \sqrt{x+iy}.$$

Zauważmy, że definicja ta pozbawiona jest znaczenia, ponieważ nie dysponujemy w tej

chwili żadnym zbiorem operacji, które pozwoliłyby nam znaleźć $w(z)$ dla jakichś danych x i y (z wyjątkiem $y = 0$). Jest to sytuacja pżeciwna niż w przypadku równania (6.5), gdzie znane operacje na zmiennych rzeczywistych wystarczały do rozwiązania wszystkich problemów związanych z wyliczeniem wartości funkcji.

Na szczęście w przypadku pierwiastka kwadratowego istnieje inna możliwość, a mianowicie możemy zapisać z w postaci biegunowej*, jako $z = re^{i\theta}$. W tej postaci logiczne jest rozszerzenie pierwiastka kwadratowego na płaszczyznę zespoloną zawarte w definicji:

$$w(z) \equiv \sqrt{z} \equiv \sqrt{r} e^{i\theta/2} = \sqrt{r} [\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)].$$

Funkcja ta w oczywisty sposób spełnia relację $w^2 = z$, co jest z pewnością minimalnym wymaganiem dla każdej sensownej definicji pierwiastka kwadratowego. Spróbujmy posługując się tą definicją zmieniać z wzdłuż tej samej drogi wybranej na rysunku 6.1(a) zaczynając od $r = 1$ i $\theta = 0$. Rys. 6.1(c) pokazuje odpowiadającą temu drogę w płaszczyźnie w . Zauważmy, że nie jest to droga zamknięta; po dokonaniu pełnego obiegu wokół początku układu w płaszczyźnie z , docieramy w płaszczyźnie w do punktu $w = -1$, a nie $w = +1$. Aby dotrzeć z powrotem do $w = +1$, musimy zmieniać θ od 2π do 4π , tzn. przebyć drogę po okręgu w płaszczyźnie z jeszcze jeden raz. [Patrz krzywa przerywana na rys. 6.1(c).] W rzeczywistości nie jest to najlepszy sposób opisywania sytuacji; nie chcemy mówić o poruszaniu się po okręgu w pierwotnej płaszczyźnie po raz drugi, wolimy raczej mówić o poruszaniu się po identycznej drodze w innej płaszczyźnie z . Odpowiada to faktowi, że przy pierwszym okrążeniu θ zmieniało się od 0 do 2π , a przy drugim od 2π do 4π . Sytuacja ta nie różni się tak bardzo od przypadku funkcji w rodzaju e^z , jak mogłoby się to na pierwszy rzut oka wydawać. W zmiennych biegunowych możemy napisać

$$e^z = e^{r \cos \theta} [\cos(r \sin \theta) + i \sin(r \sin \theta)]$$

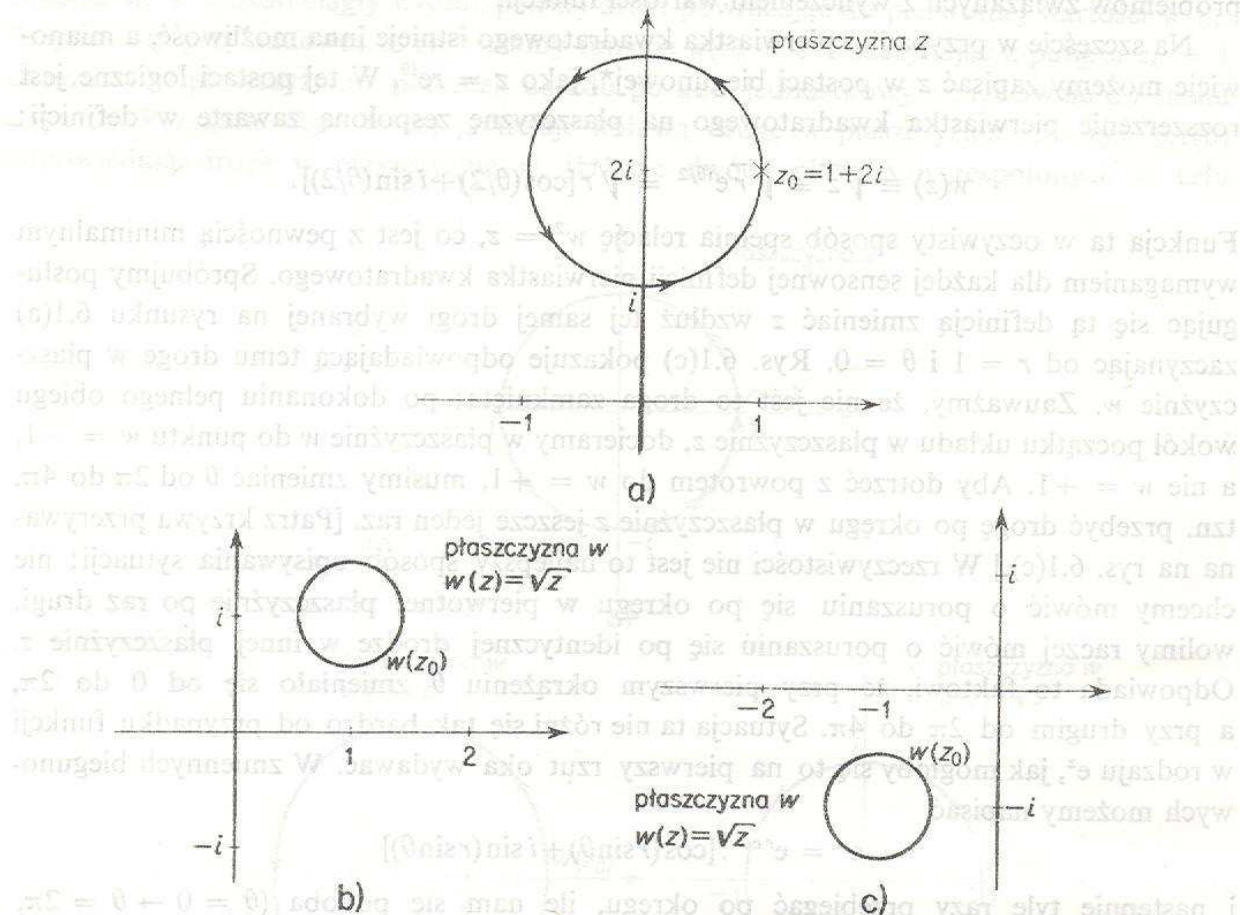
i następnie tyle razy przebiegać po okręgu, ile nam się podoba ($\theta = 0 \rightarrow \theta = 2\pi$, $\theta = 2\pi \rightarrow \theta = 4\pi$ itd.). W tym wypadku otrzymujemy tę samą wartość e^z dla każdego obiegu. Nie tracimy zatem żadnej informacji o e^z , jeżeli będziemy identyfikować ze sobą płaszczyzny odpowiadające $\theta = 0 \rightarrow \theta = 2\pi$, $\theta = 2\pi \rightarrow \theta = 4\pi$ itd. Jednakże w przypadku $w(z) = \sqrt{z}$ potrzebujemy dwóch płaszczyzn nazywanych zwykle *placami Riemanna* w celu jednoznacznego scharakteryzowania funkcji $w(z)$.

Jest oczywiste, że dwie płaszczyzny wystarczają: jeżeli θ będzie zmieniać się od 4π do 6π , i uzyskujemy te same wartości jak przy θ w granicach od 0 do 2π .

Ważną jest rzeczą pamiętać, że droga pokazana na rys. 6.1(a) okrąży początek układu. Jeżeli wybierzemy drogę, która ani nie okrąży początku układu, ani nie przecina dodatniej osi x , wtedy w płaszczyźnie w także otrzymamy drogę zamkniętą. Rys. 6.2(a) i 6.2(b) pokazują sytuację dla $w(z) = \sqrt{z}$, przy czym zaczynamy od $z_0 = \sqrt{5} e^{i\phi_0}$, gdzie $\phi_0 = \arctg 2$ (posługujemy się zwykłą trygonometryczną konwencją, według której $\arctg x$ przyjmuje wartości między 0 i $\pi/2$). Możemy powiedzieć, że na rys. 6.2(a) zaczynamy od punktu $z_0 = 1 + 2i$ na pierwszym płacie Riemanna i powracamy do tego punktu bez okrą-

* Jeżeli napiszemy $z = x + iy$ i dokonamy zamiany zmiennych przechodząc do współrzędnych biegunowych ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), uzyskujemy $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$, gdzie $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ i $\theta = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$.

zania początku układu. Jeżeli uczynimy to samo dla $z_0 = 1+2i$ na drugim płacie Riemanna (tzn. $\phi_0 = \operatorname{arctg} 2 + 2\pi$), w płaszczyźnie w zostanie wykreślona odpowiednia krzywa zamknięta (rys. 6.2(c)).



Rys. 6.2 (a) Zamknięty kontur w płaszczyźnie z , który nie obejmuje początku układu współrzędnych. (b) Odwzorowanie konturu z rysunku 6.2(a) przez funkcję \sqrt{z} , w przypadku przyjęcia, że kontur z rys. 6.2(a) leży na pierwszym płacie Riemanna. (c) Odwzorowanie konturu z rys. 6.2(a) przez funkcję \sqrt{z} w przypadku przyjęcia, że kontur z rys. 6.2(a) leży na drugim płacie Riemanna.

Łatwo zauważyć, że opisane powyżej trudności będą występować także dla $w(z) = \sqrt[3]{z}$ i każdej drogi zaczynającej się na dodatniej osi rzeczywistej i powracającej do pierwotnego punktu po okrążeniu początku układu. Jeżeli zatem chcemy rozważyć $w(z) = \sqrt[3]{z}$ w podobnie prosty sposób jak e^z , to stwierdzamy, że funkcja $\sqrt[3]{z}$ nie jest ciągła wzdłuż dodatniej osi x i nie jest tam analityczna. Aby jednak uniknąć tej kłopotliwej sytuacji, możemy powiedzieć, że gdy wracamy z powrotem na oś rzeczywistą po przebyciu łuku 2π radianów, to przechodzimy w sposób ciągły na drugi płat Riemanna. Gdy jeszcze raz obiegniemy $z = 0$ na drugim płacie powracając z powrotem na dodatnią oś rzeczywistą, przechodzimy wtedy w ciągły sposób na pierwszy płat Riemanna. Można sobie zatem wyobrazić, że oba płaty są przecięte wzdłuż dodatniej osi x i połączone w sposób zilustrowany na rys. 6.3. Przy pomocy tej konstrukcji funkcja $w(z) = \sqrt[3]{z}$ staje się jednowartościowa [na obu płatach kładziemy $w(0) = 0$] i analityczna wszędzie z wyjątkiem początku układu, gdzie dla $\sqrt[3]{z}$ występuje ta sama trudność co dla \sqrt{x} w przypadku zmiennej rzeczywistej. Początek układu jest zatem punktem osobliwym dla $w(z) = \sqrt[3]{z}$.

Przyjmijmy w ogólności, że mamy jakiś punkt osobliwy z_0 pewnej funkcji $w(z)$ i drogę zaczynającą się w z_1 , która okrąży ten punkt. Jeżeli w celu powrotu do pierwotnej wartości $w(z_1)$ kąt θ musi przebiegać zakres większy niż od 0 do 2π , wtedy z_1 nazywane jest *punktem rozgałęzienia* funkcji $w(z)$. Cięcie, które wychodzi z tego punktu, nosi czasem nazwę *cięcia gałęziowego*. W prostym przypadku, który dyskutowaliśmy powyżej [$w(z) = \sqrt{z}$] wartość $w(z_1)$ dla z_1 z drugiego płatu różni się po prostu znakiem od $w(z_1)$ dla z_1 z pierwszego płatu. Zauważcie, że możliwe jest, aby punkt z_1 z pierwszego płatu był punktem, dla którego pewna funkcja $w(z)$ jest analityczna, podczas gdy punkt z_1 z drugiego płatu jest *punktem osobliwym*. Przykładem takiej funkcji jest

$$w(z) = \frac{1}{i + \sqrt{z}};$$

$w(z)$ jest jednowartościową funkcją określoną na dwupłatowej powierzchni Riemanna przeciętej wzdłuż dodatniej osi rzeczywistej i połączonej tak, jak pokazuje rys. 6.3. Funkcja ta jest analityczna w $z = -1$ dla $\phi = \pi$ na pierwszym płacie Riemanna i osobliwa w $z = -1$ dla $\phi = 3\pi$ na drugim płacie Riemanna.



Rys. 6.3 Widok z boku dwóch płatów Riemanna funkcji $w(z) = \sqrt{z}$ patrząc wzdłuż osi rzeczywistej w kierunku początku układu.

W powyższej dyskusji moglibyśmy oczywiście upierać się, że θ będące argumentem z ma przedział zmienności wynoszący tylko 2π radianów. Moglibyśmy wtedy powiedzieć, że

$$w_1(z) \equiv \sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

definiuje pewną jednowartościową funkcję, analityczną wszędzie w zespolonej płaszczyźnie z z wyjątkiem punktów leżących na dodatniej osi rzeczywistej (włącznie z punktem $z = 0$) i, że

$$w_2(z) = \sqrt{r} e^{i(\theta+2\pi)/2} = -\sqrt{r} e^{i\theta/2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

także definiuje pewną funkcję. Obie funkcje $w_1(z)$ i $w_2(z)$ spełniają równość $w_1^2 = w_2^2 = z$ i są nazywane *jednowartościowymi gałęziami* \sqrt{z} . Jest oczywiste, że jeżeli zdefiniujemy

$$w_3(z) = \sqrt{r} e^{i(\theta+4\pi)/2}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

to będziemy mieli $w_3(z) = w_1(z)$; w ten więc sposób nie uzyskamy nowej gałęzi. Pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie pokazanie, że można zdefiniować trzy jednowartościowe gałęzie funkcji $w(z) = \sqrt[3]{z}$ i że jeżeli chce się w tym przypadku zdefiniować $w(z)$ jako jednowartościową funkcję analityczną wszędzie z wyjątkiem punktu $z = 0$, to potrzebna jest trzypłatowa powierzchnia Riemanna.

Należy zwrócić uwagę, że wybór osi rzeczywistej jako cięcia dla funkcji $w(z) = \sqrt{z}$ był całkowicie dowolny. Dowolna inna półprosta, powiedzmy $\theta = \theta_0$, byłaby równie dobra. Jediną rzeczą, która nie jest dowolna, jest wybór punktu $z = 0$ jako punktu rozgałęzienia; $z = 0$ jest *prawdziwym punktem osobliwym* funkcji $w(z) = \sqrt{z}$ i tego nie można zmienić.

Jednakże w przypadku zdefiniowanych powyżej funkcji $w_1(z)$ i $w_2(z)$ półprosta osobiwa $\theta = 0$ jest, z wyjątkiem $z = 0$, linią osobiwości „stworzonych przez człowieka”. Równie dobrze, moglibyśmy wybrać półprostą $\theta = \theta_0$ jako linię osobiwości. Moglibyśmy np. zdefiniować

$$w_1(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$$

i podobnie

$$w_2(z) = \sqrt{r} e^{i(\theta+2\pi)/2} = -\sqrt{r} e^{i\theta/2}$$

$$\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi.$$

Jeżeli chcemy mieć do czynienia z jednowartościową funkcją analityczną wszędzie z wyjątkiem $z = 0$, to możemy skonstruować dwupłatową powierzchnię Riemanna przeciętą i złączoną wzdłuż linii $\theta = \theta_0$. Na krawędzi cięcia przeciwnej do ruchu wskazówek zegara $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\theta_0/2}$. Po przebyciu łuku 2π radianów nie powracamy do tej wartości, ale do wartości $-\sqrt{r} e^{i\theta_0/2}$ i przechodzimy na drugi płatek. Zauważcie, że w tym przypadku pewne wartości $w(z) = \sqrt{z}$, które były na pierwszym płacie Riemanna, gdy cięcie biegło wzdłuż $\theta = 0$, znajdują się teraz na drugim płacie Riemanna i na odwrót. Dowodzi to, że konstrukcja Riemanna jest jedynie sposobem jednowartościowego zapisu funkcji. Rozróżnienia między pierwszym i drugim płatkiem są kwestią umowy. W rzeczywistości nie powinno stanowić trudności dla czytelnika wyobrazić sobie, że jakakolwiek rozsądna krzywa biegnąca od środka układu współrzędnych do nieskończoności mogłaby stanowić dopuszczalne cięcie, wzdłuż którego dwa płatki Riemanna funkcji $w(z) = \sqrt{z}$ mogą być połączone.

Zanim porzucimy ten przykład, spróbujmy najpierw zastanowić się nad rozumowaniem, które na pierwszy rzut oka wydaje się zaprzeczać temu, o czym właśnie mówiliśmy. Rozważmy dowolny punkt $x_0 \neq 0$ na dodatniej osi rzeczywistej. Wyobrażamy sobie, że istnieje pewne otoczenie punktu x_0 , w którym możemy napisać $z = x_0 + \varrho$, gdzie ϱ jest pewną liczbą zespoloną, i definiujemy zatem \sqrt{z} za pomocą szeregu potęgowego

$$\sqrt{z} \equiv \sqrt{x_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varrho}{x_0} - \frac{1}{8} \frac{\varrho^2}{x_0^2} + \dots \right),$$

jeżeli tylko szereg jest zbieżny (zobaczymy później, że szereg ten jest zbieżny, jeżeli tylko $|\varrho| < x_0$). Jest to funkcja jednowartościowa definiująca \sqrt{z} w sposób ciągły w jakimś obszarze zawierającym część dodatniej osi rzeczywistej. Jednakże definicji tej nie można zastosować do całej płaszczyzny zespolonej, ponieważ szereg powyższy nie wszędzie jest zbieżny. Okazuje się, że nie jest możliwe rozszerzenie (lub „przedłużenie”) tej funkcji na wszystkie punkty płaszczyzny z w ten sposób, aby \sqrt{z} był jednowartościowy i analityczny. Powrócimy do tego zagadnienia, gdy będziemy dyskutować w dalszej części tego rozdziału zasady przedłużania analitycznego. Fakt, że funkcja zdefiniowana za pomocą szeregu jest ciągła przy przechodzeniu przez dodatnią oś rzeczywistą, nie jest w sprzeczności z umieszczeniem cięcia wzdłuż tej osi, jak to pierwotnie zrobiliśmy, ponieważ (co zostało pokazane powyżej) cięcie może być umieszczone gdziekolwiek indziej, o ile tylko zaczyna się w $z = 0$. W szczególności cięcie można wybrać w ten sposób, że leży ono całkowicie poza obszarem zbieżności szeregu użytego do definicji \sqrt{z} (np. można wybrać cięcie wzdłuż ujemnej osi rzeczywistej). Na zakończenie zwrócimy uwagę, że moglibyśmy z powodzeniem zde-

finiować w ten sposób funkcję e^z . Funkcja ta ma dla rzeczywistych wartości x szereg potęgowy zbieżny wszędzie i nietrudno uwierzyć, że zespolony szereg potęgowy z tymi samymi współczynnikami ($1/n!$) będzie zbieżny wszędzie w płaszczyźnie zespolonej.

Jako inny przykład wielowartościowej funkcji rozważymy logarytm. Używając ponownie $z = re^{i\theta}$ zdefiniujemy

$$\log z \equiv \ln r + i\theta,$$

gdzie \ln oznacza zwykły logarytm naturalny dodatniej liczby rzeczywistej. Zauważmy, że

$$e^{\log z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

oraz

$$\log(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2) = \ln r_1 + i\theta_1 + \ln r_2 + i\theta_2 = \log z_1 + \log z_2.$$

Tak więc logarytm posiada główne własności, których można byłoby się spodziewać przez analogię z przypadkiem zmiennej rzeczywistej. W przypadku logarytmu opisane powyżej trudności wynikające z wielowartościowości są poważniejsze, ponieważ bez względu na to, jak wiele razy okrążamy środek układu współrzędnych zaczynając, powiedzmy, z jakiegoś punktu na dodatniej osi rzeczywistej, nigdy nie powrócimy do pierwotnej wartości logarytmu. Logarytm wzrasta o $2\pi i$ przy każdym obiegu (lub zmniejsza się o $2\pi i$, jeżeli poruszamy się w kierunku malejącego θ). Wobec tego, aby uczynić $\log z$ funkcją jednowartościową, potrzebna jest nieskończona liczba płatów Riemanna, z których każdy połączony jest z płatem poniżej poprzez cięcie wzdłuż dodatniej osi rzeczywistej. W wyniku takiej konstrukcji $\log z$ jest analityczny wszędzie z wyjątkiem $z = 0$; punktowi temu przypisujemy wartość $\log(z = 0) = -\infty$ na wszystkich płatach. Możemy także utworzyć nieskończoną liczbę jednowartościowych gałęzi logarytmu:

$$w_n(z) = \ln r + i\theta + 2\pi ni, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ i $w_n(z)$ jest jednowartościową funkcją analityczną wszędzie z wyjątkiem $z = 0$ i punktów leżących na dodatniej osi rzeczywistej. Zupełnie tak jak poprzednio

$$e^{w_n(z)} = z,$$

ale

$$w_n(z_1 z_2) = w_n(z_1) + w_n(z_2) - 2\pi ni.$$

Gałąź

$$w_0(z) = \ln r + i\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

nazywana jest *wartością główną* lub *główną gałęzią logarytmu* i bywa zwykle oznaczana $\text{Log} z$. Mamy

$$e^{\text{Log} z} = z$$

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log} z_1 + \text{Log} z_2.$$

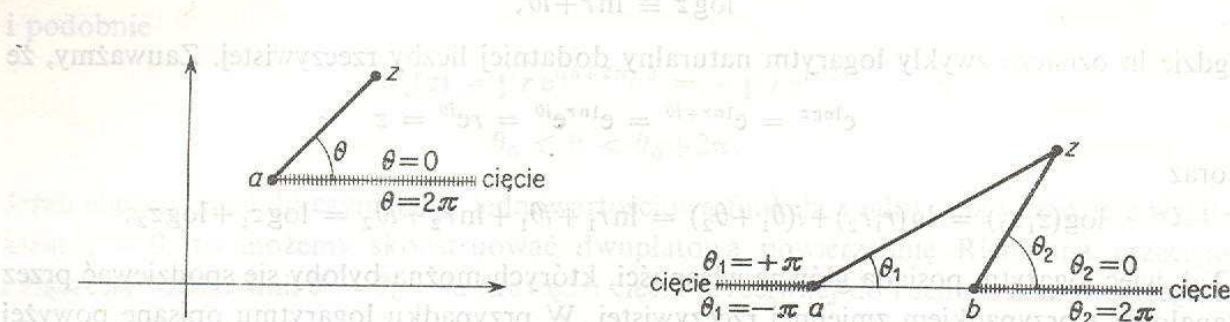
Tak jak poprzednio wybór półprostej $\theta = 0$ jako linii osobliwości jest całkowicie arbitralny.

Na podstawie poprzednich przykładów przejście do bardziej skomplikowanych przypadków jest całkiem proste, na przykład funkcja

$$w(z) = \sqrt{z-a}$$

jest jednowartościową funkcją na dwupłatowej powierzchni Riemanna z cięciem od a do nieskończoności. Punkt $z = a$ jest punktem rozgałęzienia; jeżeli wybierzemy cięcie równoległe do osi rzeczywistej, uzyskujemy obrazek przedstawiony na rys. 6.4. Używając oznaczeń z rys. 6.4 możemy zatem zdefiniować

$$w(z) \equiv |z-a|^{1/2} e^{i\theta/2}.$$



Rys. 6.4 Możliwy przebieg cięcia dla funkcji

$$w(z) = \sqrt{z-a}.$$

Rys. 6.5 Możliwy przebieg cięć dla funkcji

$$w(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Funkcja

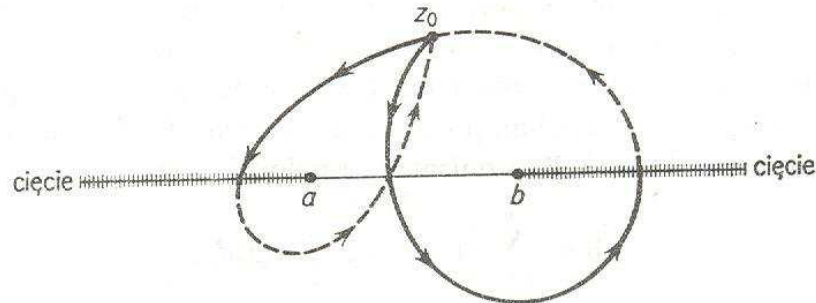
$$w(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

stanowi przypadek wymagający głębszego zastanowienia się. W celu uproszczenia geometrycznych rozważań ograniczymy się do szczególnej sytuacji, kiedy a i b są rzeczywiste. Najbardziej oczywistym sposobem postępowania jest po prostu wprowadzenie dwóch cięć z punktów rozgałęzienia $z = a$ i $z = b$ tak, jak pokazano na rys. 6.5. Takie proste kierunki cięć zostały wybrane ze względu na wygodę rysunku. Cięcie lewostronne odpowiada temu, co mielibyśmy dla funkcji $\sqrt{z-a}$, cięcie prawostronne temu, co mielibyśmy dla $\sqrt{z-b}$. Przyjmujemy tutaj, że θ_1 zaczyna się od wartości $-\pi$ na „spodzie” cięcia i dochodzimy do wartości $+\pi$ na „wierzchu” cięcia. Przy wartości π przechodzimy na drugi płat i θ_1 rośnie dalej do wartości 3π , dla której powracamy na pierwszy płat. Jeżeli popatrzymy wzdłuż ujemnej osi rzeczywistej w kierunku początku układu, oba płaty będą tam połączone tak, jak pokazuje rys. 6.3. Podobnie dla prawostronnego cięcia zaczynamy na „wierzchu” cięcia od $\theta_2 = 0$; poruszając się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara przechodzimy na drugi płat przy $\theta_2 = 2\pi$ i wreszcie powracamy na pierwszy płat, gdy $\theta_2 = 4\pi$. Wzdłuż dodatniej osi rzeczywistej oba płaty są połączone tak, jak pokazuje rys. 6.3. Stosując powyższą umowę definiujemy

$$w(z) \equiv |z-a|^{1/2} |z-b|^{1/2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2}.$$

Jak pokazuje rys. 6.6, dowolny punkt z_0 na drugim płacie może być osiągnięty z punktu z_0 na pierwszym płacie zarówno drogą idącą przez lewostronne cięcie, jak i prawostronne cięcie. Te dwie możliwości różnią się tylko w ten sposób, że w pierwszym przypadku θ_1 wzrasta o 2π , podczas kiedy w drugim przypadku θ_2 wzrasta o 2π . W obu przypadkach wartość $w(z)$ jest taka sama (równa wartości funkcji w odpowiednim punkcie na pierwszym płacie z minusem), jak to musi mieć miejsce dla funkcji jednowartościowej. Dzięki powyższej konstrukcji $w(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ staje się jednowartościową funkcją analityczną wszędzie z wyjątkiem punktów $z = a$ i $z = b$. Zauważmy, że jeżeli w powyższym przy-

kładzie zmienimy o 2π zarówno θ_1 i θ_2 , zaczynając przykładowo z „wierzchu” prawostronnego cięcia, to przejdziemy na drugi płat przez lewostronne cięcie i powrócimy do naszego pierwotnego punktu na pierwszym płacie przez prawostronne cięcie. Sugeruje to, że równie dobrze mogłoby być możliwe przecięcie i połączenie obu płatów wzdłuż osi rzeczywistej od a do b . Dla czytelnika może być interesujące pokazanie, że ma to rzeczywiście miejsce.



Rys. 6.6 Dwie różne drogi, po których można od punktu $z = z_0$ na pierwszym płacie dotrzeć do punktu $z = z_0$ na drugim płacie. Rozpatrywaną funkcją jest $w(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$.

Posługując się wprowadzonymi powyżej pojęciami możemy także uzyskać sensowne wyrażenia dla odwrotnych funkcji trygonometrycznych. Rozważmy przykładowo

$$w = \operatorname{arctg} z.$$

Zapisując to jako

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}},$$

otrzymujemy łatwo

$$(1 - iz)e^{iw} = (1 + iz)e^{-iw}$$

i stąd

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Biorąc logarytm obu stron znajdujemy

$$w = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i - z}{i + z} \right),$$

a więc

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i + z}{i - z} \right).$$

Zupełnie jak w przypadku logarytmu, możemy mówić o jednowartościowych gałęziach $\operatorname{arctg} z$ odpowiadających jednowartościowym gałęziom $\log z$. Główna gałąź odwrotnego tangensa zdefiniowana jest, jak można się spodziewać, w następujący sposób

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} [\operatorname{Log}(i + z) - \operatorname{Log}(i - z)].$$

Podobne rozważania stosują się do funkcji $\operatorname{arcsin} z$ i $\operatorname{arccos} z$.

6.3. CAŁKOWANIE ZESPOLONE — TWIERDZENIE CAUCHY'EGO-GOURSATA

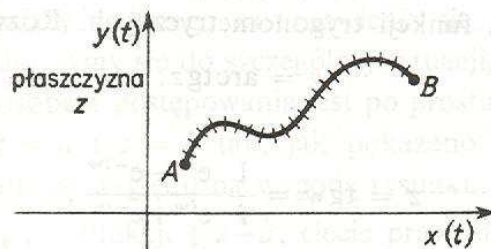
Przechodzimy teraz do całkowania funkcji zespolonych, tego działu teorii, który jest szczególnie interesujący zarówno dla matematyków, jak i fizyków. Ze względu na odpowiedniość między liczbami zespolonymi i dwuwymiarowymi wektorami spodziewamy się, że będziemy mogli zdefiniować całkę krzywoliniową funkcji zespolonej wzdłuż jakiejś krzywej w płaszczyźnie z .

Niech t będzie rzeczywistym parametrem zmieniającym się od t_A do t_B i niech $z = z(t)$ będzie jakąś krzywą, lub konturem C , w płaszczyźnie zespolonej o końcach $A = z(t_A)$

$B = z(t_B)$ (patrz rys. 6.7). Zaznaczamy teraz pewną liczbę punktów t_i pomiędzy t_A i t_B i przybliżamy krzywą przez szereg linii prostych prowadzonych od każdego $z(t_i)$ do $z(t_{i+1})$. W celu zdefiniowania całki funkcji w zmiennej zespolonej tworzymy wielkość

$$\lim_{|\Delta z_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n w(z_i) \Delta z_i \equiv \int_C w(z) dz,$$

gdzie $\Delta z_i = z(t_{i+1}) - z(t_i)$ oraz $w(z_i)$ jest wartością funkcji w dowolnym punkcie z_i leżącym na C pomiędzy $z(t_{i+1})$ i $z(t_i)$. Suma obliczana jest w granicy dowolnie drobnego podziału odcinka, który przebiega rzeczywisty parametr t generując kontur od A do B ; to znaczy dla $n \rightarrow \infty$ lub, co oznacza to samo, w granicy dowolnie małych Δz_i dla wszystkich i .



Rys. 6.7

Pisząc $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ i $dz = dx + i dy$ mamy

$$\int_C w(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx). \quad (6.10)$$

Możemy to zapisać również w postaci parametrycznej, wtedy

$$dx = \frac{dx}{dt} dt, \quad dy = \frac{dy}{dt} dt$$

i zatem

$$\int_C w(z) dz = \int_{t_A}^{t_B} \left(u \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} \right) dt + i \int_{t_A}^{t_B} \left(u \frac{dy}{dt} + v \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

Dla danego konturu C biegnącego od A do B definiujemy kontur przeciwny, oznaczony przez $-C$, który będzie tą samą krzywą, przebieganą jednak od B do A . Całka z $w(z)$ wzdłuż $-C$ jest oczywiście dana powyższym równaniem, ale z t_A i t_B zamienionymi miejscami, zatem

$$\int_{-C} w(z) dz = - \int_C w(z) dz. \quad (6.11)$$

Można także pokazać, że

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{C_1+C_2}. \quad (6.12)$$

Jeżeli C jest krzywą zamkniętą nie przecinającą się, będziemy zawsze interpretować \oint_C jako całkę po zamkniętym konturze C przebieganym w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

A oto jeszcze inna własność całki, którą będziemy bardzo często wykorzystywać:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq ML, \quad (6.13)$$

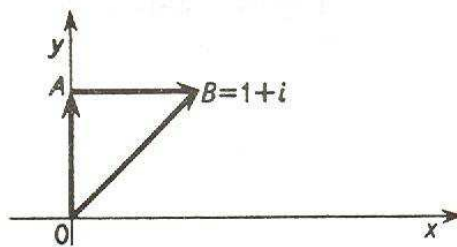
gdzie M jest maksymalną wartością $|f(z)|$ na konturze C , a L jest długością konturu. Pierwsza nierówność występująca w (6.13) jest uogólnieniem nierówności trójkąta $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Obie nierówności wyprowadzane są dokładnie tak samo, jak w przypadku rzeczywistym.

Zanim przedstawimy ogólne twierdzenia o całkowaniu funkcji zmiennej zespolonej, wyliczymy przykładowo dwie całki posługując się jedynie otrzymanymi dotąd rezultatami. Najpierw obliczymy całkę

$$I = \int_C \sin z dz$$

po dwóch drogach pokazanych na rys. 6.8: (1) $C_1 = OB$, (2) $C_2 = OA + AB$. Ponieważ

$$\sin z = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x,$$



Rys. 6.8

więc posługując się równaniem (6.10) mamy

$$I \equiv \int_C \sin z dz = \int_C [\cosh y \sin x dx - \sinh y \cos x dy] + i \int_C [\cosh y \sin x dy + \sinh y \cos x dx].$$

Na krzywej C_1 wartość $x = y$, zatem

$$I_1 = (1+i) \int_0^1 \cosh x \sin x dx - (1-i) \int_0^1 \sinh x \cos x dx = (1 - \cosh 1 \cos 1) + i(\sinh 1 \sin 1).$$

Obliczymy teraz I wzdłuż C_2 . Wzdłuż drogi z O do A $x = 0$ i $dx = 0$, a wzdłuż drogi z A do B $y = 1$ i $dy = 0$, zatem

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{C_2} \sin z dz = - \int_0^1 \sinh y dy + \int_0^1 \cosh 1 \sin x dx + \\ &+ i \int_0^1 \sinh 1 \cos x dx = 1 - \cosh 1 \cos 1 + i \sinh 1 \sin 1 = I_1. \end{aligned}$$

Całka z O do B jest taka sama dla obu dróg całkowania. W rzeczywistości, jak udowodnimy później, całka jest taka sama dla jakiejkolwiek drogi — zależy tylko od punktów wyznaczających początek i koniec konturu. Widzimy również, że całka po zamkniętym konturze składającym się z C_1 i $-C_2$ (tzn. C_2 przebieganego w kierunku odwrotnym) jest zerem. Pokażemy, że wynik ten zachowuje się dla każdej funkcji, która jest analityczna wewnątrz zamkniętego konturu i na nim samym.

Zauważmy, że jeżeli wyliczymy formalnie, zgodnie z regułami analizy rzeczywistej, to mamy

$$I_1 = I_2 = \int_0^{1+i} \sin z \, dz = -\cos z \Big|_0^{1+i} = 1 - \cosh 1 \cos 1 + i \sinh 1 \sin 1,$$

gdzie posłużyliśmy się równaniem (6.9). W dalszym ciągu udowodnimy także to „podstawowe twierdzenie analizy funkcji zespolonych”, które jest słuszne w każdym obszarze, w jakim funkcja podcałkowa jest analityczna.

Jako drugi przykład, spróbujmy scałkować funkcję $f(z) = z^*$ po kole jednostkowym o środku w początku układu, obiegając kontur w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Wartości z na tej krzywej dane są równaniem $z = e^{i\theta}$, gdzie θ zmienia się od 0 do 2π , zatem

$$I = \oint_C z^* \, dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} \, d\theta = 2\pi i.$$

Ponieważ $zz^* = 1$ na C , otrzymujemy także rezultat

$$\oint_C \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i.$$

Żadna z tych całek po zamkniętym konturze nie jest zerem. Jak zobaczymy poniżej, wynika to z faktu, że z^* nie jest nigdzie analityczna, a zatem nie jest analityczna wewnątrz konturu C i na nim, a z^{-1} nie jest analityczna w punkcie $z = 0$, który leży wewnątrz C .

Oba przykłady wyjaśnia

Twierdzenie Cauchy'ego. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna na jakimś zamkniętym konturze C i wewnątrz niego i $f'(z)$ jest ciągła na tym obszarze, to

$$\oint_C f(z) \, dz = 0.$$

Podamy dwa dowody tego twierdzenia:

Dowód 1.

$$\oint_C f(z) \, dz = \oint_C (u \, dx - v \, dy) + i \oint_C (u \, dy + v \, dx).$$

W celu obliczenia dwóch całek krzywoliniowych stojących po prawej stronie używamy twierdzenia Greena o całkach krzywoliniowych. Stwierdza ono, że jeżeli P i Q są ciągłymi funkcjami na zamkniętym konturze C i wewnątrz niego, to

$$\oint_C (P \, dx + Q \, dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy,$$

gdzie R jest powierzchnią ograniczoną przez C . Z założenia $f'(z)$ jest ciągłe, pierwsze pochodne cząstkowe u i v są więc także ciągłe. Z twierdzenia Greena wynika zatem, że

$$\begin{aligned} & \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (u dy + v dx) = \\ & = \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Ponieważ równania Cauchy'ego–Riemanna są spełnione, wszystkie powyższe funkcje podcałkowe znikają. Wobec tego

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

c.b.d.o.

Dowód 2. Twierdzenie Cauchy'ego można również dowieść posługując się twierdzeniem Stokesa, które jest ściśle związane z twierdzeniem Greena, a jest być może lepiej znane. Piszemy

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + i \oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l},$$

gdzie

$$\mathbf{F} = ui - vj, \quad \mathbf{G} = vi + uj \quad \text{i} \quad d\mathbf{l} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}.$$

Niech S będzie obszarem składającym się z konturu C i jego wnętrza. Ponieważ warunki Cauchy'ego–Riemanna spełnione są na S , wynika stąd, że $(\nabla \times \mathbf{F})_z = 0$ i $(\nabla \times \mathbf{G})_z = 0$ na obszarze S , gdzie z oznacza k -tą składową rotacji w kierunku \mathbf{k} , np.

$$(\nabla \times \mathbf{F})_z = \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

dzięki równaniom Cauchy'ego–Riemanna. Posługując się teraz twierdzeniem Stokesa, którego ważność zależy od ciągłości czterech pierwszych pochodnych cząstkowych u i v , mamy

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + i \oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} + i \int_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \int_S (\nabla \times \mathbf{F})_z dS + i \int_S (\nabla \times \mathbf{G})_z dS = 0, \end{aligned}$$

gdzie $d\mathbf{S} = \mathbf{k} dS$,

c.b.d.o.

Możliwe jest udowodnienie twierdzenia Cauchy'ego bez zakładania ciągłości $f'(z)$. Wynika to z faktu, że każda funkcja analityczna w jakimś obszarze ma tam z konieczności ciągłą pochodną. W rzeczywistości, jak udowodnimy, funkcja analityczna ma pochodne dowolnego rzędu i wszystkie te pochodne są ciągłe, przy czym ciągłość n -tej pochodnej jest konsekwencją istnienia pochodnej rzędu $n+1$. Jednakże ten rezultat dotyczący wyższych pochodnych będziemy mogli otrzymać dopiero potem, jak pokażemy, że ciągłość $f'(z)$ nie jest konieczna do udowodnienia twierdzenia Cauchy'ego.

Złagodzenie lub osłabienie założeń, przy których

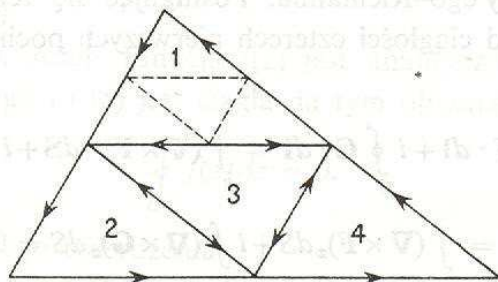
$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

ma zatem zasadnicze znaczenie, w rzeczywistości jest to centralny punkt teorii funkcji analitycznych. Niektórzy autorzy (nigdy matematycy) definiują funkcję analityczną jako funkcję różniczkowalną o ciągłej pochodnej. Centralny rezultat teorii wynika wtedy w sposób trywialny, jak widzieliśmy z poprzedniego twierdzenia. Jest to jednak matematyczne oszustwo kosmicznych rozmiarów. Goursat pierwszy udowodnił, że warunek, aby $f'(z)$ było ciągle, jest zbyteczny. Właśnie rezultat Goursata jest tym, co odróżnia w istotny sposób teorię całkowania funkcji zmiennej zespolonej od teorii całek krzywoliniowych na płaszczyźnie rzeczywistej. Chociaż twierdzenie to nazywane jest często twierdzeniem Cauchy'ego, „część Goursata” daje mu rzeczywistej matematycznej mocy. Dowodząc to twierdzenie będziemy opierać się na rozumowaniu zaproponowanym przez Franklina i Knoppa.

Twierdzenie Cauchy'ego–Goursata. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna na zamkniętym konturze C i wewnątrz niego, to $\oint_C f(z) dz = 0$.

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie najpierw dla obszaru trójkątnego; łatwo je następnie rozszerzyć na dowolny obszar. Niech R oznacza zamknięty obszar składający się z punktów leżących wewnątrz i na brzegu trójkąta ograniczonego zamkniętym konturem T o całkowitej długości L . Ponieważ $f(z)$ jest analityczne na R , $f'(z)$ istnieje na R i zatem $f(z)$ jest ciągle na R . Podzielimy teraz R na mniejsze trójkąty, jak pokazuje rys. 6.9. Każdy mniejszy trójkąt jest podobny do pierwotnego trójkąta, ale jego boki i obwód są o połowę krótsze. Granice małych trójkątów oznaczymy przez T_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Oczywiście

$$\oint_T f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \oint_{T_i} f(z) dz,$$



Rys. 6.9

gdzie wszystkie kontury przebiegane są w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Wszystkie trzy boki trójkąta 3 przebiegane są w obu kierunkach i zatem całki wzdłuż tych odcinków znoszą się. Stosując do tego równania nierówność trójkąta otrzymujemy

$$\left| \oint_T f(z) dz \right| \leq \sum_{i=1}^4 \left| \oint_{T_i} f(z) dz \right|.$$

Dowód polega na pokazaniu, że wielkość po lewej stronie jest dowolnie mała.

Niech teraz C_1 oznacza trójkąt, który daje największy wkład do powyższej sumy. Mamy wtedy

$$\left| \oint_T f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{C_1} f(z) dz \right|,$$

gdzie długość $C_1 \equiv L_1 = L/2$. Powtórzmy teraz ten proces na trójkącie ograniczonym przez C_1 . To znaczy znajdziemy kontur C_2 ograniczający taki trójkąt wchodzący w skład C_1 , że

$$\left| \oint_{C_1} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{C_2} f(z) dz \right|,$$

gdzie długość $C_2 \equiv L_2 = L/2^2$. Jeżeli podział jest powtórzony n razy, otrzymujemy taki szereg trójkątnych konturów C_n , zawartych jeden w drugim, że

$$\left| \oint_T f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \oint_{C_n} f(z) dz \right|, \quad (6.14)$$

gdzie długość $C_n \equiv L_n = L/2^n$. W celu zakończenia dowodu musimy pokazać, iż

$$\left| \oint_{C_n} f(z) dz \right|$$

maleje z n szybciej niż 4^n wzrasta z n .

Oznaczmy przez R_n zamknięty obszar składający się z C_n i punktów wewnętrznych powstałego przy n -tym podziale trójkąta ograniczonego przez C_n . Jest oczywiste, że każdy punkt R_{n+1} należy do R_n i w miarę jak $n \rightarrow \infty$, ten ciąg zawartych jeden w drugim domkniętych zbiorów zbiega się do jakiegoś pojedynczego punktu z_0 , który zawiera się w każdym R_n i także w R . (Jeżeli R jest kontynentem afrykańskim i wybieramy R_n jako ten obszar, który zawiera największego lwa w Afryce, mamy algorytm złapania wielkiego lwa — po prostu budujemy klatkę wokół z_0 .) Ponieważ $f'(z)$ istnieje, z definicji wynika, że dla każdego ε istnieje takie δ , że jeżeli tylko $0 < |z - z_0| < \delta$, to

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Rozważmy teraz funkcję $g(z)$ zdefiniowaną przez

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & \text{dla } z \neq z_0, \\ 0 & \text{dla } z = z_0. \end{cases}$$

Zauważmy, że $|g(z)| \leq \varepsilon$, jeżeli $|z - z_0| < \delta$, to $g(z)$ jest zatem ciągłe w $z = z_0$.

Funkcja $f(z)$ jest więc dana dla wszystkich punktów z należących do R przez

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)g(z).$$

Użyjemy tego związku do obliczenia $\oint_{C_n} f(z) dz$. Dwa pierwsze człony są całkowitymi funkcjami z (z_0 jest stałe) o pochodnych wszędzie ciągłych. Możemy zatem zastosować wcześniejszą wersję twierdzenia Cauchy'ego i stwierdzimy, że

$$\oint_{C_i} [f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)] dz = 0$$

dla wszystkich i , zatem

$$\oint_{C_n} f(z) dz = \oint_{C_n} (z - z_0) g(z) dz.$$

Dokonujemy teraz wystarczająco wielu podziałów (tzn. wybieramy n dostatecznie duże) tak, aby $2^n > L/\delta$, wtedy $L_n = L/2^n < \delta$. Ponadto dla każdego punktu z na C_n wartość $|z - z_0| < L_n < \delta$, ponieważ z_0 leży wewnątrz R_n i odległość od dowolnego punktu wewnątrz do dowolnego punktu na obwodzie trójkąta jest oczywiście mniejsza niż obwód tego trójkąta; zatem dla $|z - z_0| < \delta$ i $|g(z)| < \varepsilon$ wynika, że $|(z - z_0)g(z)| \leq L_n \varepsilon$. Stąd mamy, iż

$$\left| \oint_{C_n} f(z) dz \right| = \left| \oint_{C_n} (z - z_0) g(z) dz \right| \leq L_n^2 \varepsilon = \varepsilon (L/2^n)^2 = \varepsilon L^2 / 4^n,$$

przy czym skorzystaliśmy z równania (6.13). Z równania (6.14) wynika teraz, że

$$\left| \oint_T f(z) dz \right| \leq \varepsilon L^2.$$

Ponieważ L jest ustalonym skończonym obwodem trójkątnego obszaru R , a ε jest dowolne, możemy uczynić wielkość εL^2 mniejszą od jakiegokolwiek zadanej uprzednio liczby ε' . Wobec tego

$$\left| \oint_T f(z) dz \right| = 0 \quad \text{i stąd} \quad \oint_T f(z) dz = 0.$$

Dowodzi to twierdzenia Cauchy'ego–Goursata dla trójkątnych konturów.

Nie będziemy podawać formalnego rozszerzenia tego wyniku na przypadek dowolnego obszaru, ponieważ metoda postępowania i wynik są jasne i proste. Mając dowolny kontur C wpisujemy w niego wielokąt. Każdy wielokąt może być rozłożony na sumę trójkątów, wiemy więc, że twierdzenie zachowuje słuszność dla wielokąta o dowolnej liczbie boków. Jest jasne, że różnica

$$\left| \oint_C f(z) dz - \oint_P f(z) dz \right|,$$

gdzie P jest obwodem wielokąta wpisanego w C , może być dowolnie mała, jeżeli wybrać wielokąt z wystarczająco wielką liczbą boków. Dowodzi to twierdzenia Cauchy'ego–Goursata dla obszaru o dowolnym kształcie.

Podczas przeprowadzania dowodu zakładaliśmy milcząco, że obszar R jest obszarem jednospójnym. Oznacza to, że każdy zamknięty kontur zawarty w R obejmuje tylko punkty należące do R . Przypuśćmy jednak, że obszar R ma jeden lub więcej „wyciętych” podobszarów. Byłoby zatem możliwe skonstruowanie krzywych wokół tych „dziur” w taki sposób, że krzywe te leżałyby całkowicie w R , ale zamykałyby wewnątrz punkty nie należące do R . Obszary takie nazywają się *obszarami wielospójnymi*. Twierdzenie Cauchy'ego nie jest słuszne dla dowolnych konturów w obszarach wielospójnych.

6.4. KONSEKWENCJE TWIERDZENIA CAUCHY'EGO

Największy wysiłek jest poza nami; będziemy teraz badać niektóre główne następstwa twierdzenia Cauchy'ego.

Niezależność od drogi

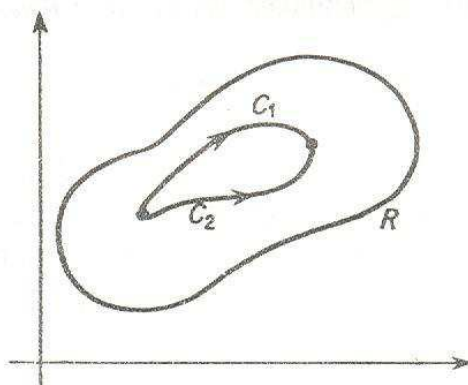
Udowodnimy najpierw, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze R , a C_1 i C_2 leżą w R i mają wspólne punkty początkowy i końcowy, to

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz.$$

Dowód wynika natychmiast z zastosowania twierdzenia Cauchy'ego do konturu zamkniętego składającego się z C_2 i $-C_1$, jak pokazuje rys. 6.10,

$$\int_{C_2} + \int_{-C_1} = 0 \Rightarrow \int_{C_2} = - \int_{-C_1} = \int_{C_1},$$

przy czym korzysta się z równania (6.11).



Rys. 6.10

Podstawowe twierdzenie analizy

Z naszej dyskusji niezależności całki od drogi wynika, że równanie

$$F(z) \equiv \int_{z_0}^z f(z') dz'$$

definiuje jednoznaczną funkcję z , jeżeli $f(z')$ jest analityczna w obszarze zawierającym drogę między z_0 i z .

Twierdzenie. $F(z)$ jest analityczne i $F'(z) = f(z)$.

Dowód:

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z + \Delta z} f(z') dz',$$

gdzie droga od z do $(z + \Delta z)$ może być przyjęta jako linia prosta. Możemy napisać

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} dz' = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(z) dz'$$

i stąd wynika, że

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(z') - f(z)] dz'.$$

Funkcja $f(z)$ jest ciągła, ponieważ jest analityczna; zatem dla wszystkich $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeżeli $|z' - z| < \delta$, to $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$. Weźmy teraz $0 < |\Delta z| < \delta$. Wtedy mamy

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z + \Delta z} |dz'| = \varepsilon.$$

To znaczy, że

$$F'(z) \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Funkcja $F(z)$ jest zatem analityczna i jej pochodną jest $f(z)$.

Zatem całka $F(z)$ z funkcji analitycznej $f(z)$ jest analityczną funkcją górnej granicy całki, o ile droga całkowania zawarta jest w obszarze R , w którym funkcja podcałkowa jest analityczna. Z powyższego wynika natychmiast *podstawowe twierdzenie rachunku całkowego*

$$\int_a^b f(z) dz = \int_{z_0}^b f(z) dz - \int_{z_0}^a f(z) dz = F(b) - F(a),$$

gdzie a i b są punktami z obszaru R i $F'(z) = f(z)$, tzn. $F(z)$ jest funkcją pierwotną $f(z)$. Zauważyliśmy już poprzednio, że ten sposób obliczania całek stosował się w szczególnym przypadku do całki z $\sin z$ od $a = 0$ do $b = 1 + i$ (patrz paragraf 6.3).

Całkowy wzór Cauchy'ego

Udowodnimy teraz jedno z najbardziej użytecznych twierdzeń w całej matematycznej fizyce.

Twierdzenie. Jeżeli $f(z)$ jest analityczna wewnątrz jakiejś zamkniętej krzywej C i na tej krzywej, wtedy dla każdego punktu z_0 wewnątrz C

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (6.15)$$

Dowód. Narysujmy wewnątrz krzywej C okrąg \tilde{C}_0 o promieniu r wokół z_0 i rozważmy krzywą pokazaną na rysunku 6.11. Składa się ona z okręgu \tilde{C}_0 i krzywej C połączonych dwoma prostoliniowymi odcinkami L_1 i L_2 , które leżą dowolnie blisko siebie. Nazwijmy ten cały kontur C' . Rozważmy teraz

$$\oint_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\tilde{C}_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{L_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Wewnątrz C' wyrażenie $f(z)/(z - z_0)$ jest analityczne, a więc z twierdzenia Cauchy'ego-Goursata

$$\oint_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

Gdy zbliżamy teraz liniowe odcinki L_1 i L_2 dowolnie blisko siebie,

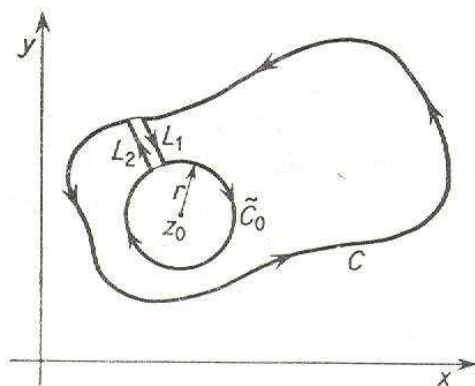
$$\int_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \rightarrow - \int_{L_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

ponieważ odcinki te przebiegane są w przeciwnych kierunkach. W granicy mamy więc

$$\oint_{\tilde{C}'} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0 = \oint_{\tilde{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \oint_{\tilde{C}_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

skąd

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = - \oint_{\tilde{C}_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$



Rys. 6.11

Zauważmy w tym miejscu, że \tilde{C}_0 rozpatrywane jako osobny kontur, tzn. nie jako część C' , jest przebiegane w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Zdefiniujmy wobec tego $C_0 = -\tilde{C}_0$, tak że C_0 jest teraz przebiegane w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (tak jak C). Możemy wtedy napisać

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Zauważmy, że dla potrzeb powyższych rozważań C_0 nie musi być okręgiem, równie dobrze mógłby to być dowolny kontur zamknięty, leżący całkowicie wewnątrz C i tak samo zorientowany. Ostatnie równanie możemy napisać w postaci

$$\oint_{\tilde{C}} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) \oint_{\tilde{C}_0} \frac{dz}{z-z_0} + \oint_{\tilde{C}_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz.$$

Skorzystamy teraz z faktu, że C_0 jest okręgiem, pisząc $z-z_0 = re^{i\theta}$ na konturze C_0 . Pierwsza całka po prawej stronie wynosi zatem

$$\oint_{\tilde{C}_0} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta}} = 2\pi i$$

dla wszystkich $r > 0$ wewnątrz C . Wzór Cauchy'ego będzie zatem dowiedziony, jeżeli możemy pokazać, że druga całka znika dla jakiegoś wybranego konturu C_0 . Ciągłość $f(z)$ w z_0 mówi nam, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie δ , że jeżeli $|z-z_0| \leq \delta$, to $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$. Biorąc więc $r = \delta$ spełniamy równanie $|z-z_0| = \delta$, co z kolei pociąga za sobą

$$\left| \oint_{\tilde{C}_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq \oint_{\tilde{C}_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} |dz| < \frac{\varepsilon}{\delta} (2\pi\delta) = 2\pi\varepsilon.$$

Biorąc więc dostatecznie małe r , ale ciągle większe od 0, można osiągnąć to, że bezwzględna wartość całki będzie mniejsza od dowolnej uprzednio zadanej liczby, skąd

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Wynik ten jest kolejną wskazówką zadziwiająco silnej wewnętrznej struktury funkcji analitycznych. Oznacza on, że jeżeli funkcja jest analityczna na konturze C i wewnątrz niej, to wartość tej funkcji w każdym punkcie wewnątrz C określona jest przez jej wartości na ograniczającej krzywej C . W elektrostatyce znany jest następujący równoważny rezultat: jeżeli rzeczywista funkcja $u(x, y)$ jest ustalona na pewnej krzywej zamkniętej i jeżeli $\nabla^2 u = 0$, to u określone jest wszędzie wewnątrz tej krzywej. Funkcja analityczna zbudowana jest z pary takich funkcji harmonicznych. Moglibyśmy, gdybyśmy chcieli, studiować „teorie funkcji harmonicznych” zamiast „teorii funkcji analitycznych”.

Pochodne funkcji analitycznych

Używając całkowej formuły Cauchy'ego możemy udowodnić, że wszystkie pochodne funkcji analitycznej są analityczne. Analogiczne twierdzenie dla zmiennej rzeczywistej nie jest prawdziwe: funkcja, która jest raz różniczkowalna w jakimś obszarze, nie jest koniecznie w tym obszarze różniczkowalna nieskończenie wiele razy. Na przykład funkcja $f(x) = x|x|$ ma pochodną $f'(x) = 2|x|$, która jest wszędzie ciągła, jednakże $f'(x)$ nie jest różniczkowalna w $x = 0$.

Jeżeli zróżniczkujemy obie strony całkowego wzoru Cauchy'ego zmieniając porządek różniczkowania i całkowania, otrzymamy

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz. \quad (6.16)$$

Ponieważ z_0 jest dowolnym punktem wewnątrz C , możemy go przyjąć jako zmienną. Aby dowieść tego wzoru ściśle, zauważmy, że używając całkowego wzoru Cauchy'ego możemy napisać

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \oint_C \left[\frac{f(z)}{z-z_1} - \frac{f(z)}{z-z_0} \right] \frac{dz}{z_1 - z_0} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_0)} dz, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \oint_C f(z) \left[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_0)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(z-z_0)^2} \right] dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{z_1 \rightarrow z_0} (z_1 - z_0) \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_0)^2} dz. \end{aligned}$$

Oznaczając $z_1 - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$, mamy

$$\left| f'(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \oint_C \frac{|f(z)| |dz|}{|(z-z_0) - \varepsilon e^{i\theta}| |z-z_0|^2}.$$

Zastępując $|z-z_0|$ przez wartość minimalną, powiedzmy μ , a $|f(z)|$ przez wartość maksymalną M , otrzymujemy

$$\left| f'(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{ML}{\mu^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\mu - \varepsilon} = 0,$$

gdzie L jest długością konturu. Udowodniliśmy w ten sposób równanie (6.16). Powtarzając rozumowanie otrzymujemy

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz$$

i ogólnie dla n -tej pochodnej

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \quad (6.17)$$

Wynik ten można łatwo udowodnić przez indukcję w ten sam sposób, w jaki dowodziliśmy równ. (6.16). Funkcja $f(z)$ ma więc wewnątrz C pochodne wszystkich rzędów, więc k -ta pochodna $f(z)$ jest ciągła, bo $(k+1)$ -sza pochodna istnieje. Jeżeli zatem napiszemy $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, to pochodne cząstkowe u i v w wszystkich rzędów są ciągłe, gdy tylko funkcja f jest analityczna. W naszym wyprowadzeniu równania (6.4) możemy wobec tego opuścić żądanie, aby drugie pochodne cząstkowe były ciągłe; ich ciągłość jest zagwarantowana przez analityczność f .

Twierdzenie Liouville'a. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest całkowita i $|f(z)|$ jest ograniczona dla wszystkich wartości z , wtedy funkcja $f(z)$ jest stała.

Dowód. Z całkowej formuły Cauchy'ego znaleźliśmy, że

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

Jeżeli weźmiemy C w formie okręgu $|z-z_0| = r_0$, wtedy

$$|f'(z_0)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \oint_C \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^2|} |dz| < \frac{1}{2\pi r_0^2} M 2\pi r_0 = \frac{M}{r_0},$$

gdzie $|f(z)| < M$ wewnątrz i na konturze C_0 . Zatem $|f'(z_0)| < M/r_0$ i możemy wziąć r_0 tak duże, jak nam się podoba, ponieważ funkcja $f(z)$ jest całkowita. Biorąc zaś r_0 dostatecznie duże, możemy uczynić $|f'(z_0)| < \varepsilon$ dla każdego uprzedniego zadanego ε . To znaczy $|f'(z_0)| = 0$, co pociąga za sobą $f'(z_0) = 0$ dla wszystkich z_0 , skąd $f(z_0) = \text{const}$, c.b.d.o.

Przykład. Funkcje całkowite $\sin z$ i $\cos z$ nie mogą być ograniczone. Z równań (6.8) i (6.9) jest jasne, że nie są.

Podstawowe twierdzenie algebry

To twierdzenie, które trudno dowieść algebraicznie, prosto wynika z twierdzenia Liouville'a i stanowi godny uwagi związek między analizą i algebrą. Przedstawiamy tu dowód ze względu na jego ogromną prostotę i elegancję.

Twierdzenie. Jeżeli $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$ jest wielomianem od z pierwszego lub wyższego stopnia, to równanie $P(z) = 0$ ma przynajmniej jeden pierwiastek.

Dowód. Zróbmy założenie przeciwne, mianowicie $P(z) \neq 0$ dla dowolnego z . Wtedy funkcja $1/P(z)$ jest całkowita. Co więcej $|1/P(z)| \rightarrow 0$ dla $|z| \rightarrow \infty$, a więc $|1/P(z)|$ jest ograniczone dla wszystkich z . Zatem z twierdzenia Liouville'a wynika $1/P(z) = \text{const}$, co stanowi sprzeczność, ponieważ $P(z)$ jest stopnia pierwszego lub wyższego. Stąd $P(z) = 0$ przynajmniej dla jednej wartości z , c.b.d.o.

6.5. TRANSFORMATY HILBERTA I WARTOŚĆ GŁÓWNA CAUCHY'EGO

Przy studiowaniu różnych układów fizycznych zdarza się często, że mamy do czynienia z funkcjami o wartościach zespolonych — współczynniki załamania, podatności elektrycznej i magnetycznej, amplitudy rozpraszania, zawady itp., które mają sens fizyczny tylko wtedy, gdy argument funkcji (który mógłby przykładowo być częstością lub energią) przyjmuje wartości rzeczywiste. W wielu przypadkach jest możliwe uzyskanie, za pomocą praw rządzących układem, informacji o ogólnych własnościach takich właśnie funkcji, gdy argument jest zespolony; na przykład może się okazać, że funkcja jest analityczna w pewnym obszarze płaszczyzny zespolonej. Ponieważ dane eksperymentalne można uzyskać tylko dla rzeczywistych wartości argumentu, interesujące jest sprawdzić, czy możemy użyć ogólnych własności, takich jak analityczność, do wywnioskowania związków między rzeczywistymi wielkościami mającymi bezpośrednie znaczenie fizyczne. Podstawą realizacji takiego programu są *pary transformat Hilberta*, które będziemy badać w tym paragrafie.

Zacznijmy od rozważenia funkcji $f(z)$, która jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie i która jest taka, że $|f(z)| \rightarrow 0$, gdy $|z| \rightarrow \infty$ w górnej półpłaszczyźnie. (Zauważmy, że jedyną funkcją, która jest w stanie spełnić te warunki w całej płaszczyźnie, jest $f \equiv 0$.) Rozważmy teraz całkę po konturze

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz,$$

gdzie C jest konturem pokazanym na rysunku 6.12 i α jest rzeczywiste. Z założenia $f(z)$ jest analityczne wewnątrz i na C , tak samo jak wyrażenie $1/(z-\alpha)$, zatem

$$\oint \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0.$$

Podzielmy tę całkę następująco

$$\oint \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \equiv \int_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx + \int_{S_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz + \int_{\alpha+\delta}^R \frac{f(x)}{x-\alpha} dx + \int_{S_R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0,$$

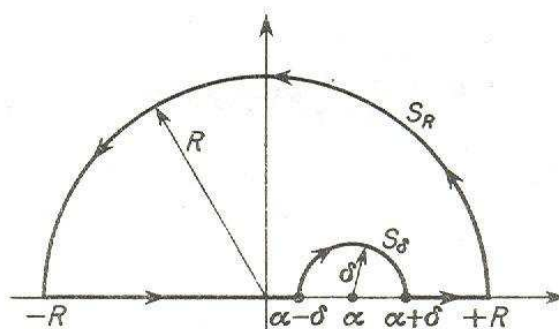
gdzie δ jest promieniem małego półokręgu S_δ centrowanego w $x = \alpha$, a R jest promieniem dużego półokręgu S_R centrowanego w środku układu współrzędnych, tak jak pokazuje

rys. 6.12. Promień δ może być wybrany dowolnie mały, a promień R może być wybrany dowolnie duży. W granicy dowolnie małego δ wielkość

$$\int_{-R}^{\alpha-\delta} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx + \int_{\alpha+\delta}^R \frac{f(x)}{x-\alpha} dx$$

nazywana jest *wartością główną całki* z $f(x)/(x-\alpha)$ i jest oznaczana przez

$$P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x-\alpha} dx.$$



Rys. 6.12 Kontur C używany przy wyprowadzaniu równ. (6.18). Promień R półokręgu S_R można dowolnie powiększyć i promień δ półokręgu S_δ można tak bardzo zmniejszyć, jak sobie tego życzymy.

Poniżej powiemy więcej o tej całce. Wzdłuż dużego półokręgu S_R położymy teraz $z = Re^{i\theta}$ tak, że

$$\int_{S_R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = i \int_0^\pi \frac{f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-\alpha} Re^{i\theta} d\theta$$

i stąd

$$\left| \int_{S_R} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \right| \leq \frac{R}{|R-\alpha|} \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| d\theta,$$

ponieważ

$$|Re^{i\theta}-\alpha| = |R^2 + \alpha^2 - 2R\alpha \cos\theta|^{1/2} \geq [R^2 + \alpha^2 - 2R\alpha]^{1/2} = |R-\alpha|.$$

Ale dla $R \rightarrow \infty$, $|f(z)| \rightarrow 0$ i $R/|R-\alpha| \rightarrow 1$. Wobec tego całka po półokręgu o promieniu R może być dowolnie mała, o ile wybierzemy wystarczająco duże R . Możemy zatem napisać

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x-\alpha} dx = - \int_{S_\delta} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = -f(\alpha) \int_{S_\delta} \frac{dz}{z-\alpha} - \int_{S_\delta} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} dz,$$

gdzie dodaliśmy i odjęliśmy człon $\int_{S_\delta} [f(\alpha)/(z-\alpha)] dz$. Kładąc $z-\alpha = \delta e^{i\theta}$ w pierwszej całce po prawej stronie tego równania znajdujemy, że

$$-f(\alpha) \int_{S_\delta} \frac{dz}{z-\alpha} = -if(\alpha) \int_\pi^0 d\theta = i\pi f(\alpha),$$

zatem

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x-\alpha} dx = i\pi f(\alpha) - \int_{S_\delta} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} dz.$$

Ponieważ $f(z)$ jest ciągle w $z = \alpha$, argument użyty przy wyprowadzaniu całkowego wzoru Cauchy'ego mówi nam, że ta ostatnia całka po S_δ znika. Stąd

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x-\alpha} dx = i\pi f(\alpha).$$

Dla uproszczenia notacji zapiszemy to po prostu jako

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\alpha} dx = i\pi f(\alpha), \quad (6.18)$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej. Możemy tę funkcję zapisać w postaci

$$f(x) \equiv f_R(x) + if_I(x).$$

Przyrównując rzeczywiste i urojone części w równaniu (6.18) otrzymujemy

$$f_R(\alpha) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_I(x)}{x-\alpha} dx, \quad (6.19a)$$

$$f_I(\alpha) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_R(x)}{x-\alpha} dx. \quad (6.19b)$$

Każda para funkcji, które spełniają równania (6.19a) i (6.19b), nazywana jest *parą transformat Hilberta*. Zauważmy, iż równania te mówią nam, że jeżeli $f_I(x) \equiv 0$, to $f_R(x) \equiv 0$.

Wartość główna całki jest, jak widzimy, sposobem unikania osobliwości na drodze całkowania: całkuje się do odległości δ od osobliwości, przeskakuje nad osobliwością całkuje od odległości δ za nią. Przepis ten pozwala nadać sens takim całkom jak

$$P \int_{-R}^R \frac{dx}{x}.$$

Chcielibyśmy, aby ta całka zerowała się, ponieważ całkujemy nieparzystą funkcję po symetrycznym obszarze. Jeżeli jednak nie postawimy P przed tą całką, osobliwość w $x = 0$ powoduje, że całkowanie nie ma sensu. Postępując zgodnie z przepisem na wartość główną całki łatwo możemy powyższą całkę obliczyć. Mamy

$$P \int_{-R}^R \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^R \frac{dx}{x} \right].$$

Położymy w pierwszej całce po prawej stronie $x = -y$, wtedy

$$P \int_{-R}^R \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_R^{\delta} \frac{dy}{y} + \int_{\delta}^R \frac{dx}{x} \right].$$

Suma dwóch całek w nawiasie jest zerem, ponieważ

$$\int_{-R}^{\delta} = - \int_{\delta}^R,$$

zatem

$$P \int_{-R}^R \frac{dx}{x} = 0.$$

W podobny sposób możemy wyliczyć

$$P \int_{-R}^R \frac{dx}{x-a},$$

gdzie $-R < a < R$. Jak powyżej, piszemy

$$P \int_{-R}^R \frac{dx}{x-a} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{a-\delta} \frac{dx}{x-a} + \int_{a+\delta}^R \frac{dx}{x-a} \right].$$

Kładąc ponownie $x = -y$ w pierwszej całce po prawej stronie znajdujemy, że

$$\begin{aligned} P \int_{-R}^R \frac{dx}{x-a} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_R^{\delta-a} \frac{dy}{y+a} + \ln(R-a) - \ln \delta \right] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} [\ln \delta - \ln(R+a) + \ln(R-a) - \ln \delta], \end{aligned}$$

zatem

$$P \int_{-R}^R \frac{dx}{x-a} = \ln \left(\frac{R-a}{R+a} \right), \quad -R < a < R. \quad (6.20)$$

W przypadku całki

$$P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x-a} dx$$

równanie (6.20) prowadzi do

$$P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x-a} dx = P \int_{-R}^R \frac{f(a)}{x-a} dx + P \int_{-R}^R \frac{f(x)-f(a)}{x-a} dx$$

lub

$$P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x-a} dx = f(a) \ln \left(\frac{R-a}{R+a} \right) + P \int_{-R}^R \frac{f(x)-f(a)}{x-a} dx. \quad (6.21)$$

Często będzie się zdarzać, że druga całka po prawej stronie równ. (6.21) nie będzie osobliwa w $x = a$ [np. będzie to miało miejsce, gdy $f(x)$ jest różniczkowalna w $x = a$], tak że symbol P można opuścić. Pozostawiamy czytelnikom uzyskanie równania

$$P \int_0^R \frac{f(x)}{x^2-a^2} dx = f(a) \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{R-a}{R+a} \right) + P \int_0^R \frac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2} dx, \quad (6.22)$$

które jest ściśle związane z równ. (6.21). W celu zilustrowania metody wartości głównej, a także ilustracji użycia równań (6.19a) i (6.19b) rozważmy funkcję $f(z) = 1/(z+i)$. Funkcja ta spełnia wszystkie założenia zrobione przy wyprowadzaniu równań (6.19a) i (6.19b). Widzimy, że

$$f_R(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad f_I(x) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Zbadamy równanie (6.19b). Zapišemy je w postaci

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \int_{-R}^R \frac{f_R(x)}{x-\alpha} dx = -\pi f_I(\alpha).$$

Chcemy sprawdzić, czy $f(z) = 1/(z+i)$ spełnia tę relację. Używając równania (6.21) mamy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \int_{-R}^R \frac{f_R(x)}{x-\alpha} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[f_R(\alpha) \ln \left(\frac{R-\alpha}{R+\alpha} \right) + P \int_{-R}^R \frac{f_R(x) - f_R(\alpha)}{x-\alpha} dx \right]. \quad (6.23)$$

Ponieważ teraz $f_R(x) = x/(x^2+1)$, znajdujemy, że

$$\frac{f_R(x) - f_R(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{1-\alpha x}{(\alpha^2+1)(x^2+1)},$$

możemy więc po prawej stronie równania (6.23) opuścić znak wartości głównej. Mamy również

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{R-\alpha}{R+\alpha} \right) = 0,$$

równanie (6.23) przyjmuje więc postać

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \int_{-R}^R \frac{f_R(x)}{x-\alpha} dx = \frac{1}{\alpha^2+1} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1-\alpha x}{x^2+1} dx = \frac{1}{\alpha^2+1} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2+1},$$

ponieważ $x/(x^2+1)$ jest funkcją nieparzystą. Zatem

$$\lim_{R \rightarrow \infty} P \int_{-R}^R \frac{f_R(x)}{x-\alpha} dx = \frac{2}{\alpha^2+1} \lim_{R \rightarrow \infty} \arctg R = \frac{\pi}{\alpha^2+1} = -\pi f_I(\alpha)$$

i równanie (6.19b) jest wobec tego rzeczywiście spełnione. Pozostawiamy czytelnikowi pokazanie, że równanie (6.19a) jest także spełnione. Jest oczywiste, że równanie (6.21) jest bardzo użyteczne w połączeniu z równaniami (6.19a) i (6.19b), ponieważ przy założeniach zrobionych przy wyprowadzaniu tych równań $f(z)$ jest różniczkowalne w $z = \alpha$. Zatem

$$f_R(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_I(x) - f_I(\alpha)}{x-\alpha} dx, \quad (6.24a)$$

$$f_I(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_R(x) - f_R(\alpha)}{x-\alpha} dx, \quad (6.24b)$$

gdzie w przypadku jakichś niejednoznaczności

$$\int_{-\infty}^{\infty} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R.$$

Metody te mogą być czasami użyte do obliczania rzeczywistych całek oznaczonych. Na przykład rozważmy funkcję $f(z) = e^{iz}$. Funkcja ta jest wszędzie analityczna i jeżeli napiszemy $z = Re^{i\theta}$, wtedy $|f(z)| \rightarrow 0$, gdy $R \rightarrow \infty$ dla wszystkich θ takich, że $0 < \theta < \pi$. Nie jest to dokładnie to samo, czego używaliśmy powyżej dla pokazania, że całka po dużym półokręgu z $f(z)/(z-\alpha)$ znika (choć byłoby tym samym, jeżeli mielibyśmy $0 \leq \theta \leq \pi$). Jednakże czytelnik może pokazać, że dla $f(z) = e^{iz}$ wkład od dużego półokręgu znika i równania (6.19a) i (6.19b) są spełnione. W takim razie $f_R(x) = \cos x$ i $f_I(x) = \sin x$, używając więc równania (6.24a) uzyskujemy

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha} dx.$$

Ponieważ $\sin x - \sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}(x-\alpha) \cos \frac{1}{2}(x+\alpha)$, widzimy, że rzeczywiście wyrażenie podcałkowe nie jest osobliwe w $x = \alpha$. W przypadku szczególnym $\alpha = 0$ znajdujemy, że

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

to znaczy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Na podstawie tego rezultatu z własności symetrii otrzymamy także

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Widzimy tutaj, że oscylacje $\sin x$, gdy x jest duże, zapewniają zbieżność całki, nawet mimo że wyrażenie

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

jest rozbieżne. Jest to analogiczne do faktu, że szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (= \ln 2)$$

zbiega się, podczas gdy $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ jest rozbieżny.

6.6. WPROWADZENIE DO ZWIĄZKÓW DISPERSYJNYCH

Równania wyprowadzone w poprzednich paragrafach są interesujące same w sobie z matematycznego punktu widzenia. Jednakże fizyk chce oczywiście wiedzieć, czy istnieją jakies układy fizyczne, do których można otrzymane rezultaty zastosować. Pokażemy teraz, że przy dosyć ogólnych, fizycznie umotywowanych założeniach, można znaleźć

wielkości fizyczne posiadające analityczne własności niezbędne do tego, aby mogły one spełniać związek transformat Hilberta. W szczegółowych zastosowaniach skupimy uwagę na elektromagnetyzmie, wiele z naszych rezultatów będzie wszakże miało bardziej ogólny charakter.

Zacznijmy od rozważenia układu fizycznego, dla którego zaburzenie $I(t)$ związane jest z reakcją układu $R(t)$ następującą liniową relacją

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')I(t')dt', \quad (6.25)$$

gdzie $I(t')$ mogłoby przykładowo być polem elektrycznym w chwili t' , a $R(t)$ mogłoby być polaryzacją układu w chwili t . Założyliśmy, że G zależy tylko od $t-t'$, ponieważ chcemy aby system reagował na gwałtowne zaburzenie w chwili t_0 , gdy $I(t') = I_0\delta(t'-t_0)$, w ten sam sposób, w jaki reagowałby na gwałtowne zaburzenie w chwili $t_0 + \tau$, tzn. w czasie późniejszym o τ . W pierwszym przypadku mamy

$$R_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')I_0\delta(t'-t_0)dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_0G(t-t_0).$$

W drugim przypadku mamy

$$R_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')I_0\delta(t'-t_0-\tau)dt' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_0G(t-t_0-\tau)$$

albo innymi słowami

$$R_2(t+\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_0G(t-t_0) = R_1(t).$$

Jeżeli zatem przesuniemy zaburzenie o τ , to przesuniemy reakcję układu o τ .

Co teraz możemy powiedzieć o $G(\tau)$ z ogólnego fizycznego punktu widzenia? Po pierwsze widzimy, że zaburzenie w chwili t nie powinno prowadzić do reakcji układu w chwilach wcześniejszych od t , tzn. $G(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$, a więc

$$R(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t')I(t')dt',$$

co pokazuje, że reakcja w chwili t jest ważoną superpozycją liniową wszystkich zaburzeń, które miały miejsce przed czasem t . Jest to *warunek przyczynowości*. Możliwość, że $G(\tau)$ jest osobliwe dla jakiegokolwiek skończonego τ , jest wykluczona, ponieważ reakcja układu na gwałtowne zaburzenie $I(t') = I_0\delta(t-t')$ wynosi

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}I_0G(t-t_0), \quad t > t_0$$

i ponieważ z fizycznego punktu widzenia wymagamy, aby reakcja układu była zawsze skończona, $G(\tau)$ jest skończone dla wszystkich τ . Ponadto robimy fizycznie rozsądne założenie, że zaburzenie układu w odległej przeszłości nie ma dostrzegalnego wpływu na sytuację w chwili bieżącej. Można to sformułować jako żądanie, aby $G(\tau) \rightarrow 0$, gdy $\tau \rightarrow \infty$, ponieważ na podstawie poprzedniego równania sprowadza się to do założenia,

że reakcja układu na jakiegokolwiek zaburzenie wygasa po dostatecznie długim czasie (tzn. w każdym układzie istnieje jakiś mechanizm dyssypacji).

Rozważmy teraz transformatę Fouriera równania (6.25). Używając twierdzenia o splocie (patrz paragraf 5.7) znajdujemy, że

$$r(\omega) = g(\omega)i(\omega),$$

gdzie

$$r(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{i\omega t} dt, \quad g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt,$$

$$i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{i\omega t} dt.$$

W elektromagnetyzmie, gdzie I jest przyłożonym polem elektrycznym \mathbf{E} , a R jest polaryzacją \mathbf{P} , $g(\omega)$ oznacza się zwyczajowo przez $\chi(\omega)$, które nazywane jest podatnością elektryczną, zatem

$$P(\omega) = \chi(\omega)E(\omega).$$

Zakładając, że $G(\tau)$ spełnia

$$\int_0^{\infty} |G(\tau)| d\tau < \infty,$$

jesteśmy w stanie zagwarantować istnienie ograniczonego $g(\omega)$ dla wszystkich ω . Możemy teraz podsumować nasze fizycznie umotywowane założenia odnośnie $G(\tau)$:

- $G(\tau)$ jest ograniczone dla wszystkich τ ,
- $|G(\tau)|$ jest całkowalne, a więc $G(\tau) \rightarrow 0$ szybciej niż $1/\tau$ dla $\tau \rightarrow \infty$,
- $G(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$.

Możemy zwrócić uwagę, że (a) i (b) razem pociągają za sobą całkowalność w kwadracie funkcji $G(\tau)$ i stąd (patrz paragraf 9.6) $g(\omega)$ jest całkowalne w kwadracie.

Chcemy teraz pokazać, że możemy przedłużyć $g(\omega)$ na płaszczyznę zespoloną z w ten sposób, iż $g(z)$ spełnia warunki, przy których wyprowadziliśmy parę transformat Hilberta [równ. (6.19a) i (6.19b)] w poprzednim paragrafie. Po pierwsze, ponieważ $G(\tau) = 0$ dla $\tau < 0$, napiszemy

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt.$$

Rozszerzamy tę relację na płaszczyznę zespoloną używając definicji

$$g(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{izt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt,$$

gdzie napisaliśmy $z = \omega + i\omega'$. Ograniczymy teraz naszą uwagę do górnej półpłaszczyzny ($\omega' > 0$), gdzie ze względu na warunek przyczynowości podany w założeniu (c) powyżej ($t > 0$ w powyższej całce), czynnik $e^{-\omega' t}$ jest gasnącą eksponentą. Dla $0 < \theta < \pi$ mamy

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M_G \int_0^{\infty} e^{-[z|\sin\theta]t} dt,$$

gdzie zastąpiliśmy $G(t)$ przez wartość maksymalną M_G [założenie (a) powyżej], zatem

$$|g(z)| \leq \frac{M_G}{\sqrt{2\pi} |z| \sin \theta},$$

co dąży do zera, gdy $|z| \rightarrow \infty$. Dla $\theta = 0$ lub π mamy

$$g(\omega, \omega' = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt.$$

Ponieważ $G(t)$ jest całkowalne w kwadracie, $g(\omega, \omega' = 0)$ również jest całkowalne w kwadracie jako funkcja ω (patrz paragraf 9.6) i zatem $|g(\omega, \omega' = 0)|$ dąży do zera, gdy $\omega \rightarrow \infty$. Wobec tego w dowolnym kierunku w górnej półpłaszczyźnie $|g(z)| \rightarrow 0$, gdy $|z| \rightarrow \infty$.

Chcemy teraz pokazać, że $g(z)$ jest analityczne w górnej półpłaszczyźnie. Używając

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{izt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt \quad (6.26)$$

widzimy, że dla $\omega' > 0$

$$\frac{d^n g}{dz^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) \frac{d^n}{dz^n} e^{izt} dt = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} t^n G(t) e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt, \quad (6.27)$$

ponieważ w tym przypadku zarówno (6.26) jak i (6.27) są jednostajnie zbieżne ze względu na czynnik $e^{-\omega' t}$ ($\omega' > 0$, $t > 0$). Zatem $g(z)$ jest analityczne w górnej półpłaszczyźnie ($\omega' > 0$). Jednakże jest jasne, że nasze założenia odnośnie $G(t)$ nie pozwalają nam rozszerzyć obszaru analityczności na $\omega' \geq 0$. Możemy niemniej powiedzieć, że $g(z)$ jest ograniczone na osi rzeczywistej, tak że jedyne osobliwości, gdy $\omega' = 0$, mogą być typu punktu rozgałęzienia; możemy nawet powiedzieć, że takie osobliwości typu punktu rozgałęzienia jak $1/\sqrt{z}$ czy $\log z$ są wykluczone przez żądanie ograniczoności funkcji. Czytelnik może sprawdzić powracając do wyprowadzenia oryginalnej pary równań transformaty Hilberta [równ. (6.19a) i (6.19b)], że można je zmodyfikować tak, aby włączyć ograniczone osobliwości typu punktu rozgałęzienia, obchodząc każdy taki punkt po małym półokręgu. Równania (6.19a) i (6.19b) pozostają zatem niezmienione przez obecność takich osobliwości (cięcia można zawsze tak wybrać, aby omijały górną półpłaszczyznę). W celu wykluczenia możliwości tych osobliwości typu punktu rozgałęzienia należałoby założyć wykładnicze zanikanie $G(\tau)$ dla $\tau \rightarrow \infty$. Dla dowolnego $g(z)$ powstającego z $G(t)$, które spełnia założenia (a), (b) i (c), możemy zatem napisać

$$g_R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}, \quad (6.28a)$$

$$g_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_R(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}. \quad (6.28b)$$

Wobec tego dokonując kilku bardzo sensownych założeń o rozważanym przykładzie możemy pokazać, że części urojona i rzeczywista fizycznej wielkości $g(\omega)$ są ściśle ze sobą związane dla rzeczywistych wartości argumentu relacją, która jest w zasadzie związkiem

dyspersyjnym. Podstawowym założeniem jest warunek przyczynowości; możemy powiedzieć, że przyczynowość pociąga za sobą w rozpatrzonym przez nas przypadku istnienie związków dyspersyjnych. Normalnie znaczenie terminu „związek dyspersyjny” ograniczane jest do całkowitej relacji między dwoma obserwowalnymi wielkościami, która zawiera tylko całkowanie po wartościach argumentu mających sens fizyczny. Zatem w równaniach (6.28a) i (6.28b) tylko dodatnie częstotliwości są dostępne eksperymentalnie, relacje te nie są więc w przedstawionej postaci bezpośrednio użyteczne. Jednakże $G(t)$ jest rzeczywiste, możemy więc postąpić następująco:

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{izt} dt,$$

$$g^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G^*(t) e^{-iz^*t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} G(t) e^{-iz^*t} dt = g(-z^*).$$

Mamy więc $g^*(z) = g(-z^*)$, co zwykle nazywa się *warunkiem rzeczywistości*. Jeżeli z jest rzeczywiste ($z = \omega$), to znajdujemy, że

$$g_R(\omega) - ig_I(\omega) = g_R(-\omega) + ig_I(-\omega)$$

lub

$$g_R(\omega) = g_R(-\omega), \quad (6.29a)$$

$$g_I(\omega) = -g_I(-\omega), \quad (6.29b)$$

tzn. g_R jest parzystą funkcją ω , a g_I jest nieparzystą funkcją ω . Zauważmy, że jeżeli równania (6.29a) i (6.29b) są spełnione, to funkcja

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

jest funkcją rzeczywistą.

Napiszmy teraz w równaniu (6.28a)

$$g_R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}.$$

Położmy w pierwszej całce $\bar{\omega} \rightarrow -\bar{\omega}$, zatem

$$g_R(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{\infty}^0 \frac{g_I(-\bar{\omega})}{-\bar{\omega} + \omega} d\bar{\omega} + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}.$$

Używając równania (6.29b) otrzymujemy ostatecznie

$$g_R(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} g_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega} \quad (6.30a)$$

i w identyczny sposób

$$g_I(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{g_R(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \quad (6.30b)$$

W równaniach tych występują tylko dodatnie, eksperymentalnie dostępne częstotliwości. Dla podatności elektrycznych mamy np.

$$\chi_R(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} \chi_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}, \quad (6.31a)$$

$$\chi_I(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\chi_R(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \quad (6.31b)$$

Równania (6.31a) i (6.31b) zostały po raz pierwszy wyprowadzone przez H. A. Kramersa i R. de Kroniga i noszą nazwę *związków dyspersyjnych Kramersa-Kroniga*.

Teraz zgodnie z równaniami elektromagnetyzmu możemy napisać

$$n^2(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega),$$

gdzie $n(\omega)$ jest zespolonym współczynnikiem załamania. Ponieważ z jest analityczne w górnej półpłaszczyźnie, więc $n^2(z)$ ma tę samą własność i funkcja

$$n(z) = \sqrt{1 + 4\pi\chi(z)} \quad (6.32)$$

jest również analityczna w tym obszarze, jeżeli $1 + 4\pi\chi(z)$ nie ma zer w górnej półpłaszczyźnie. Jeżeli $1 + 4\pi\chi(z)$ znika dla jakiegoś $z = z_0$ w górnej półpłaszczyźnie, wtedy zgodnie z warunkiem rzeczywistości

$$\chi^*(z_0) = \chi(-z_0^*)$$

znajdujemy, że $1 + 4\pi\chi(z)$ znika także dla $z = -z_0^*$. Ponieważ $-z_0^*$ leży w górnej półpłaszczyźnie i ma część urojoną $\text{Im} z_0$, to w górnej półpłaszczyźnie będzie znajdować się cięcie biegnące od $-z_0^*$ do z_0 . W tym przypadku związki dyspersyjne (6.31a) i (6.31b) musiałyby być zmodyfikowane. Założymy, że $n(z)$ nie ma zer w górnej półpłaszczyźnie i jest zatem analityczne w tym obszarze. Jednakże ze względu na równanie (6.32) $|n(z)|$ nie dąży do zera dla $|z| \rightarrow \infty$. W rzeczywistości

$$n(z) \rightarrow 1 \quad \text{dla } |z| \rightarrow \infty,$$

w górnej półpłaszczyźnie. Pociąga to za sobą konieczność modyfikacji traktowania członu pochodzącego od dużego półokręgu na rys. 6.12 przy otrzymywaniu równania (6.18). W przypadku $n(z)$ mamy

$$\int_{S_R} \frac{n(z)}{z - \alpha} dz \Big|_{|z| \rightarrow \infty} = \int_0^{\pi} \frac{dz}{z} = i\pi$$

w notacji z poprzedniego paragrafu (patrz rys. 6.12). Zatem w przypadku $n(z)$ równanie (6.18) należy zastąpić przez

$$i\pi n(\omega) = i\pi + P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}.$$

Rozdzielając części rzeczywistą i zespoloną otrzymujemy

$$n_R(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}, \quad (6.33a)$$

$$n_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_R(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}. \quad (6.33b)$$

Korzystając z warunku rzeczywistości można przepisać te równania w postaci

$$n_R(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} n_I(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}, \quad (6.34a)$$

$$n_I(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{n_R(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \quad (6.34b)$$

Wielkość $\mu(\omega) \equiv (2\omega/c)n_I(\omega)$, gdzie c jest prędkością światła w próżni, nazywane jest *współczynnikiem absorpcji* i jest odwrotnością odległości, jaką fala

$$\psi(x, t) = A \exp \left\{ i\omega \left[\frac{n(\omega)}{c} x - t \right] \right\}$$

przebywa, nim jej natężenie spadnie do $1/e$ wartości początkowej w $x = 0$. Używając μ mamy

$$n_R(\omega) = 1 + \frac{c}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\mu(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}. \quad (6.35)$$

Zatem rzeczywista część współczynnika załamania jest całkowicie określona przez znajomość współczynnika absorpcji dla wszystkich częstotliwości! To właśnie z równania (6.35) związki dyspersyjne biorą swoją nazwę. Równanie (6.35) wiąże własności absorpcyjne substancji z ich własnościami dyspersyjnymi, to znaczy ze sposobem, w jaki współczynnik załamania zmienia się z częstotliwością. Właśnie ta zmiana współczynnika załamania z częstotliwością powoduje znane rozdzielanie (dyspersję) różnych długości fali przy przejściu przez pryzmat.

Bardziej współcześnie termin związek dyspersyjny jest używany na oznaczenie jakiegokolwiek związku między częściami rzeczywistą i urojoną jakiejś wielkości fizycznej np. amplitudy rozpraszania w mechanice kwantowej, który ma ogólną postać transformaty Hilberta. Zauważmy, że ponieważ z fizycznych przesłanek $\mu(\omega)$ musi być dodatnie dla wszystkich częstotliwości (nie spodziewamy się, aby istniały fale, których amplituda wzrasta z czasem przy przechodzeniu przez jakąś substancję), równanie (6.35) stwierdza, że

$$n_R(0) = 1 + \frac{c}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\mu(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2} d\bar{\omega}, \quad (6.36)$$

widzimy więc, że $n_R(0) > 1$. Zatem znana statyczna stała dielektryczna ϵ dana przez $\epsilon = n^2(0)$ jest zawsze większa od jedności. Ponieważ $n_I(0) = 0$, widzimy, że całka w równaniu (6.36) jest zbieżna bez użycia techniki wartości głównej. Używając zatem równości $n(0) = \sqrt{\epsilon}$ możemy równanie (6.36) zapisać w postaci

$$\sqrt{\epsilon} - 1 = \frac{c}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mu(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2} d\bar{\omega}.$$

Związek ten znany jest pod nazwą *reguły sum* dla współczynnika absorpcji; wiąże on ważoną całkę po wszystkich wartościach współczynnika absorpcji z prostą, eksperymentalnie dostępną stałą.

Wyprowadzenie związku dyspersyjnego dla współczynnika załamania wykazuje pewne cechy często spotykane przy wyprowadzaniu związków dyspersyjnych. Zdarza się mianowicie często, że rozważana wielkość nie dąży do 0, gdy $|z|$ dąży do nieskończoności i co więcej, rzadko jesteśmy w tej szczęśliwej sytuacji, że znamy dokładnie zachowanie się tej wielkości, gdy $|z|$ dąży do nieskończoności, z wyjątkiem np. informacji, że jest ona ograniczona dla dużych wartości $|z|$. W tym przypadku możemy postąpić następująco. Niech α_0 będzie jakimś punktem na osi rzeczywistej, w którym funkcja $f(z)$ jest analityczna, wtedy funkcja

$$\frac{f(z) - f(\alpha_0)}{z - \alpha_0} \equiv \phi(z)$$

nie jest osobiwa w $z = \alpha_0$ i $|\phi(z)| \rightarrow 0$, gdy $|z| \rightarrow \infty$. Jeżeli $f(z)$ jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie, to $\phi(z)$ jest tam także analityczna i możemy napisać związek dyspersyjny dla $\phi(z)$

$$i\pi \left[\frac{f(\alpha) - f(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \right] = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(\alpha_0)}{(x - \alpha)(x - \alpha_0)} dx.$$

Ale

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \alpha_0)} = \frac{1}{\alpha - \alpha_0} \left[\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \alpha_0} \right],$$

wobec tego nasz związek dyspersyjny przyjmuje postać

$$i\pi f(\alpha) = i\pi f(\alpha_0) + (\alpha - \alpha_0) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x - \alpha)(x - \alpha_0)} - f(\alpha_0) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - \alpha} + f(\alpha_0) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - \alpha_0}.$$

Zgodnie z wynikami poprzedniego paragrafu dwie ostatnie całki w sensie wartości głównej znikają i mamy po prostu

$$i\pi f(\alpha) = i\pi f(\alpha_0) + (\alpha - \alpha_0) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x - \alpha)(x - \alpha_0)}.$$

Rozdzielając części rzeczywistą i urojoną uzyskujemy ostatecznie

$$f_R(\alpha) = f_R(\alpha_0) + \frac{1}{\pi} (\alpha - \alpha_0) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_I(x)}{(x - \alpha)(x - \alpha_0)} dx, \quad (6.37a)$$

$$f_I(\alpha) = f_I(\alpha_0) - \frac{1}{\pi} (\alpha - \alpha_0) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_R(x)}{(x - \alpha)(x - \alpha_0)} dx. \quad (6.37b)$$

Relacje typu równań (6.37a) i (6.37b) nazywane są *związkami dyspersyjnymi z jednym odjęciem*. Aby zrobić z nich użytek, trzeba mieć sposób określenia powiedzmy $f_R(\alpha_0)$ dla jakiejś wartości α_0 , oprócz posiadania normalnych informacji wymaganych przez zwykłe związki dyspersyjne typu równania (6.19a). Jeżeli własności $f(z)$ dla dużych $|z|$ są jeszcze „gorsze”, niż było założone powyżej [przypuśćmy na przykład, że $|f(z)/z|$ dąży do pewnej

niezerowej stałej, gdy $|z|$ dąży do nieskończoności] moglibyśmy wprowadzić więcej punktów odjęcia, α_1, α_2 itd. w analogiczny sposób.

Widzieliśmy już, że przyczynowość pociąga za sobą pewne własności analityczności; zakończymy ten paragraf pokazując, że odwrotne twierdzenie też jest prawdziwe, mianowicie że analityczność pociąga za sobą przyczynowość! Dokonamy tego używając analitycznych własności $n(z)$ w celu pokazania, że sygnały elektromagnetyczne nie mogą w jakimkolwiek ośrodku rozchodzić się z prędkością większą niż prędkość światła. Rozważmy front falowy przesuwany się w kierunku x w ośrodku dielektrycznym o zespolonym współczynniku załamania $n(z)$. Przypuśćmy, że w $x = 0$ nie ma żadnego zaburzenia przed czasem $t = 0$, tzn. $\psi(0, t) = 0$ dla wszystkich $t < 0$. Dowolną falę $\psi(x, t)$ możemy zapisać jako superpozycję fal płaskich o wszystkich częstościach

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) \exp \left\{ i\omega \left[\frac{n(\omega)}{c} x - t \right] \right\} d\omega.$$

Zauważmy, że

$$\psi(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

a więc

$$\psi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(0, t) e^{i\omega t} dt. \quad (6.38)$$

Możemy teraz użyć równania (6.38), aby zdefiniować $\psi(z)$ dla zespolonych z

$$\psi(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \psi(0, t) e^{i\omega t} e^{-\omega' t} dt,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\psi(0, t) = 0$ dla $t < 0$ i napisaliśmy jak zwykle $z = \omega + i\omega'$. Na podstawie naszych poprzednich argumentów $\psi(z)$ jest analityczne w górnej półpłaszczyźnie i co do modułu dąży do zera, gdy $|z|$ dąży do nieskończoności w tym obszarze. Rozważmy teraz

$$\oint_C \psi(z) \exp \left[iz \left(\frac{n(z)}{c} x - t \right) \right] dz$$

wzdłuż konturu pokazanego na rys. 6.13. Ponieważ $\psi(z)$ i $n(z)$ są analityczne w górnej półpłaszczyźnie

$$\oint_C \psi(z) \exp \left[iz \left(\frac{n(z)}{c} x - t \right) \right] dz = 0,$$

zatem

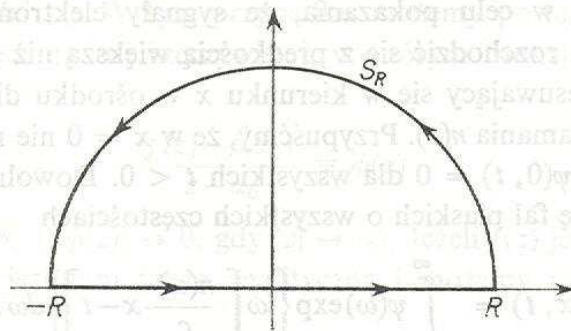
$$\int_{-R}^R \psi(\omega) \exp \left[i\omega \left(\frac{n(\omega)}{c} x - t \right) \right] d\omega + \int_{S_R} \psi(z) \exp \left[iz \left(\frac{n(z)}{c} x - t \right) \right] dz = 0. \quad (6.39)$$

Oznaczając drugą całkę w równ. (6.39) przez I_R mamy

$$|I_R| \leq \int_0^{\pi} |\psi(z)| \exp \left[-R \sin \theta \left(\frac{n_R}{c} x - t \right) - R \cos \theta \frac{n_I}{c} x \right] R d\theta,$$

gdzie R jest pewną dowolnie dużą liczbą. Gdy teraz $R \rightarrow \infty$, to jak widzieliśmy powyżej, $n_I \rightarrow 0$ i $n_R \rightarrow 1$. Zatem w tej sytuacji

$$|I_R| \leq 2R \int_0^{\pi/2} |\psi(z)| \exp \left[-R \left(\frac{x}{c} - t \right) \sin \theta \right] d\theta,$$



Rys. 6.13 Kontur C używany w równ. (6.39). R może stać się dowolnie duże.

ale $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ dla $0 \leq \theta \leq \pi/2$. [Aby to stwierdzić, zauważcie, że $g(\theta) = \sin \theta - 2\theta/\pi$ znika dla $\theta = 0$ i $\theta = \pi/2$ oraz $g(\theta)$ jest dodatnie dla $\theta = \pi/4$, a więc aby stało się równe 0 lub miało wartość ujemną wewnątrz odcinka $[0, \pi/2]$, musi mieć w tym obszarze minimum. Jednakże $g''(\theta)$ jest zawsze ujemne w $[0, \pi/2]$, funkcja ta nie może więc w żaden sposób przyjmować minimum. Można to stwierdzić rysując wykresy $\sin \theta$ i $2\theta/\pi$. Jeżeli zatem $(x/c - t)$ jest dodatnie, to

$$|I_R| \leq 2R \int_0^{\pi/2} |\psi(z)| \exp \left[-\frac{2R}{\pi} \left(\frac{x}{c} - t \right) \theta \right] d\theta.$$

Mamy teraz $|\psi(z)| \rightarrow 0$ dla $R \rightarrow \infty$, napiszmy więc dla dużych R , $|\psi(z)| \leq aR^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$); wtedy

$$|I_R| \leq 2aR^{1-\lambda} \int_0^{\pi/2} \exp \left[-\frac{2}{\pi} R \left(\frac{x}{c} - t \right) \theta \right] d\theta$$

lub

$$|I_R| \leq \frac{\pi a}{R^\lambda [(x/c) - t]} \left[1 - \exp \left\{ -R \left(\frac{x}{c} - t \right) \right\} \right].$$

Jeżeli przyjmiemy, że $x/c > t$, wtedy dla $R \rightarrow \infty$ widzimy, że $|I_R| \rightarrow 0$. Zauważcie, że jeżeli $x/c < t$, to nie możemy takiego wniosku wyciągnąć ze względu na obecność w powyższej nierówności rosnącej eksponenty. Tak więc dla $R \rightarrow \infty$ równ. (6.39) przyjmuje postać

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) \exp \left\{ i\omega \left[\frac{n(\omega)}{c} x - t \right] \right\} d\omega = 0$$

dla $x/c > t$. Dochodzimy zatem do zadowalającego wniosku, że jeżeli nie ma żadnego sygnału w $x = 0$ w chwili $t = 0$, to nie będzie żadnego sygnału w $x = x_0 > 0$ przed czasem $t = x_0/c$, co oznacza, że sygnał może rozchodzić się co najwyżej z prędkością światła c , nawet mimo że $c/n(\omega)$ może być większe niż c , ponieważ wiadomo z eksperymentu, iż $n(\omega)$ może być dla dużych częstotliwości mniejsze niż 1 [nie może być oczywiście mniejsze od 1 dla małych częstotliwości, bo jak pokazaliśmy $n(0) \geq 1$].

6.7. ROZWINIĘCIE FUNKCJI ANALITYCZNEJ NA SZEREG POTĘGOWY

Przechodzimy teraz do jednego z najważniejszych zastosowań twierdzenia Cauchy'ego-Goursata, a mianowicie do możliwości rozwinięcia funkcji analitycznej na szereg potęgowy.

Twierdzenie Laurenta. Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w pierścieniowym obszarze zamkniętym między dwoma okręgami C_1 i C_2 o wspólnym środku z_0 . Wtedy dla każdego punktu w tym pierścieniu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n, \quad (6.40)$$

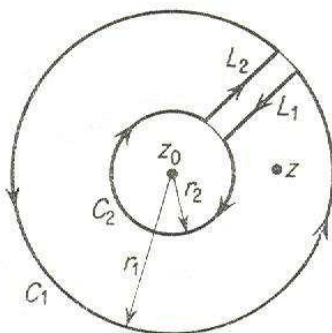
przy czym szereg ten jest jednostajnie zbieżny w każdym domkniętym obszarze leżącym całkowicie wewnątrz pierścienia; w powyższym wzorze

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz', \quad (6.41)$$

dla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a C jest dowolnym zamkniętym konturem wewnątrz pierścienia okrążającego z_0 .

Dowód. Rozważmy kontur K otaczający obszar R tak, jak na rys. 6.14; symbolicznie można napisać $K = C_1 + L_1 - C_2 + L_2$. Trzymamy się tutaj umowy, że proste kołowe kontury są zawsze przebiegane w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Ponieważ wewnętrzny okrąg przebiegany jest w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, gdy rozważamy go jako część K , piszemy go w postaci $-C_2$, gdzie C_2 jest konwencjonalnie skierowaną krzywą. Ponieważ funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz i na K , to

$$2\pi i f(z) = \oint_K \frac{f(z')}{z'-z} dz' = \int_{C_1} \frac{f(z')}{z'-z} dz' + \int_{L_1} \frac{f(z')}{z'-z} dz' + \int_{-C_2} \frac{f(z')}{z'-z} dz' + \int_{L_2} \frac{f(z')}{z'-z} dz',$$



Rys. 6.14

gdzie $z \in R$. Przy pomocy tego samego argumentu, którego używaliśmy przy wyprowadzaniu całkowitej formuły Cauchy'ego widzimy, że jeżeli L_1 i L_2 będą poprowadzone dowolnie blisko siebie, całki wzdłuż L_1 i L_2 zniósą się i

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')}{z'-z} dz' - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')}{z'-z} dz', \quad (6.42)$$

gdzie użyliśmy równania (6.11). Równanie (6.42) jest punktem wyjścia do dowodu twierdzenia Laurenta. Aby pójść dalej, skorzystamy z tożsamości

$$\frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)}.$$

Drugi wyraz wynosi po prostu $(\beta/\alpha)[1/(\alpha - \beta)]$, tzn. β/α razy pierwotnie rozkładana wielkość, tak więc iterując N razy otrzymujemy

$$\frac{1}{\alpha - \beta} = \sum_{n=0}^N \frac{\beta^n}{\alpha^{n+1}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{N+1} \frac{1}{\alpha - \beta}. \quad (6.43)$$

Pamiętając o tym ostatnim równaniu napiszmy równ. (6.42) w postaci

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z')}{[(z' - z_0) - (z - z_0)]} dz' + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z')}{[(z - z_0) - (z' - z_0)]} dz'.$$

Używając równania (6.43) możemy to wyrażenie zapisać jako

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^N \oint_{C_1} \frac{(z - z_0)^n}{(z' - z_0)^{n+1}} f(z') dz' + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left[\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right]^{N+1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^N \oint_{C_2} \frac{(z' - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}} f(z') dz' + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \left[\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right]^{N+1} \frac{f(z')}{z - z'} dz'. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Zgodnie ze znanymi już teraz argumentami kontury C_1 i C_2 w pierwszym i trzecim członie powyższego równania mogą być zastąpione przez dowolny kontur C wokół z_0 , który jest zawarty w pierścieniu ograniczonym przez C_1 i C_2 . Dokonując w trzecim członie zamiany wskaźnika $m = n + 1$ otrzymujemy

$$f(z) = \sum_{n=-N-1}^N A_n (z - z_0)^n + R_N(z),$$

gdzie A_n dane jest równaniem (6.41) i

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left[\frac{z - z_0}{z' - z_0} \right]^{N+1} \frac{f(z')}{z' - z} dz' + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \left[\frac{z' - z_0}{z - z_0} \right]^{N+1} \frac{f(z')}{z - z'} dz'.$$

Jeżeli możemy pokazać, że dla dostatecznie dużego N , gdzie N jest niezależne od z , wielkość $R_N(z)$ może być uczyniona mniejszą od dowolnie uprzednio zadanej liczby ε , wtedy dowód będzie kompletny. Niech r_1 będzie promieniem C_1 i r_2 promieniem C_2 , mamy wtedy

$$|R_N(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{|z - z_0|^{N+1}}{r_1^{N+1}} \frac{|f(z')|}{|z' - z|} r_1 d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{r_2^{N+1}}{|z - z_0|^{N+1}} \frac{|f(z')|}{|z - z'|} r_2 d\theta \right].$$

Definiujemy teraz

$$\begin{aligned} M_1 &\equiv \text{Max}_{z \in C_1} |f(z)|, & M_2 &\equiv \text{Max}_{z \in C_2} |f(z)|, \\ l_1 &\equiv \text{Max}_{z \in R} |z - z_0|, & l_2 &\equiv \text{Min}_{z \in R} |z - z_0|, \\ d_1 &\equiv \text{Min}_{\substack{z \in R \\ z' \in C_1}} |z' - z|, & d_2 &\equiv \text{Min}_{\substack{z \in R \\ z' \in C_2}} |z' - z|. \end{aligned}$$

Ponieważ R jest obszarem wewnątrz pierścienia ograniczonego przez C_1 i C_2 ,

$$l_1 < r_1, \quad l_2 > r_2, \quad (6.45)$$

zatem

$$|R_N(z)| \leq \frac{M_1 r_1}{d_1} \left(\frac{l_1}{r_1}\right)^{N+1} + \frac{M_2 r_2}{d_2} \left(\frac{r_2}{l_2}\right)^{N+1}. \quad (6.46)$$

Ale zgodnie z (6.45) $(l_1/r_1) < 1$ i $(r_2/l_2) < 1$, niezależnie od z i zatem dla dostatecznie dużego N wielkość $R_N(z)$ może być dowolnie mała. Ponieważ ograniczenie (6.46) jest niezależne od z , dowód jednostajnej zbieżności szeregu (6.40) jest zupełny. Szereg ten znany jest pod nazwą *rozwinęcia Laurenta* funkcji $f(z)$ wokół punktu z_0 .

Przykład 1. Rozważmy funkcję

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 4}{(z-1)^3}.$$

Otrzymamy rozkład Laurenta funkcji $f(z)$ wokół osobliwego punktu $z = 1$. Pisząc $z \equiv (z-1) + 1$, mamy

$$f(z) = \frac{[(z-1) + 1]^3 + 2[(z-1) + 1]^2 + 4}{(z-1)^3} = 1 + \frac{5}{z-1} + \frac{7}{(z-1)^2} + \frac{7}{(z-1)^3}.$$

W oczywisty sposób jest to rozkład Laurenta funkcji $f(z)$ wokół punktu $z = 1$ i zaleca się czytelnikowi sprawdzenie tego przez obliczenie tych współczynników A_n z równ. (6.41), które nie znikają dla tej szczególnej funkcji $f(z)$.

Przykład 2. Rozważmy teraz szereg Laurenta w mniej trywialnym przypadku, mianowicie dla funkcji $\cosh(z + 1/z)$. Cosinus hiperboliczny jest funkcją całkowitą. Jej argument $z + 1/z$ jest analityczny wszędzie z wyjątkiem początku układu, a zatem $\cosh(z + 1/z)$ jest analityczny wszędzie z wyjątkiem początku układu. Możemy wobec tego wybrać w charakterze C_2 dowolnie mały okrąg wokół początku układu i jako C_1 dowolnie duży okrąg o tym samym środku. Wtedy mamy

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^n, \quad \text{gdzie} \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\cosh(z' + 1/z')}{(z')^{n+1}} dz'$$

i C jest dowolnym zamkniętym konturem wokół początku układu. Niech C będzie jednostkowym okręgiem, wtedy $z' = e^{i\theta}$ na C , całka przyjmuje więc postać

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(2 \cos \theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(2 \cos \theta) \cos n\theta d\theta.$$

Całka ta może być obliczona z pomocą całkowego przedstawienia dla funkcji Bessela, które będzie dyskutowane w paragrafie 6.9. W dalszej części tego paragrafu obliczymy A_n jeszcze inną metodą, ale tutaj dla pełności podamy wynik

$$A_{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+2|n|)!}, \quad (6.47)$$

$$A_{2n+1} = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Przykład 3. W celu zilustrowania problemu innego rodzaju związanego z rozwiniciem Laurenta, rozważmy funkcję $f(z) = (z^2 - 1)^{-1/2}$. Zgodnie z dyskusją z paragrafu 6.2, funkcja ta ma punkty rozgałęzienia w $z = -1$ i $z = 1$. Możemy wybrać cięcie biegnące

między tymi dwoma punktami wzdłuż osi rzeczywistej definiując jednowartościową gałąź przez

$$f(z) = (\varrho_1 \varrho_2)^{-1/2} e^{-i\phi_1/2} e^{-i\phi_2/2},$$

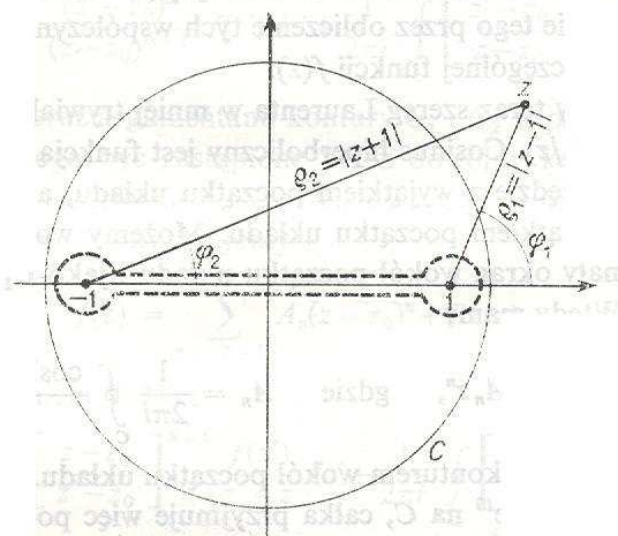
gdzie $0 \leq \phi_1 < 2\pi$, $0 \leq \phi_2 < 2\pi$, $\varrho_1 = |z-1|$, $\varrho_2 = |z+1|$ i $(\varrho_1 \varrho_2)^{-1/2}$ oznacza dodatni pierwiastek kwadratowy z $1/\varrho_1 \varrho_2$ (patrz rys. 6.15). Przy tych definicjach funkcja $f(z)$ jest analityczna wszędzie z wyjątkiem osi rzeczywistej między punktami $z = -1$ i $z = 1$. Jeżeli zatem wybierzemy C_2 jako okrąg wokół $z = 0$ o promieniu infinitezymalnie większym niż 1 i C_1 jako okrąg o dowolnie dużym promieniu, możemy uzyskać rozwinięcie Laurenta funkcji $f(z)$ w pierścieniu między C_1 i C_2 . Jak zwykle

$$(z^2 - 1)^{-1/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^n,$$

gdzie

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z'^2 - 1)^{-1/2}}{(z')^{n+1}} dz'.$$

Dla $n \geq 0$ wybieramy C jako okrąg o dowolnie dużym promieniu; jest oczywiste, że dla tego konturu odpowiednie całki znikają, a więc $A_n = 0$ dla $n \geq 0$. W przypadku n ujemnych wybieramy jako kontur dowolny okrąg o promieniu większym od 1 (patrz rys. 6.15).



Rys. 6.15 Kołowy kontur C jest punktem wyjścia przy wyliczaniu współczynników A_n szeregu Laurenta funkcji $(z^2 - 1)^{-1/2}$ dla n ujemnych. ϱ_1 , ϱ_2 , ϕ_1 i ϕ_2 definiują jednowartościową gałąź tej funkcji i narysowany linią przerywaną kontur o kształcie „psiej kości” powstaje przez deformację konturu C , która umożliwi nam obliczenie współczynników.

Zgodnie z naszymi wynikami odnośnie niezależności całki od drogi, kontur ten może być zdeformowany do konturu o kształcie „psiej kości”, jak pokazuje rys. 6.15. Wkłady do A_n od nieskończenie małych okręgów na końcach konturu znikają, mamy więc po prostu

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_1^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{-i\pi/2} x^n dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{-i(\pi+2\pi)/2} x^n dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

gdzie $m = -n-1$ (zauważcie, że dla rozważanego zakresu zmienności n , m nie jest nigdy ujemne). Widać jasno, że dla m nieparzystych (n parzystych) A_n znika. Dla m parzystych (n nieparzystych) całka jest elementarnie prosta, mamy wtedy

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^m \theta d\theta = \frac{m!}{2^m [(m/2)!]^2},$$

zatem

$$(z^2-1)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{2^m [(m/2)!]^2} \frac{1}{z^{m+1}},$$

gdzie prim wskazuje, że tylko parzyste wartości m wchodzią do sumy. Kładąc $m = 2\nu$, mamy ostatecznie

$$(z^2-1)^{-1/2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{4^{\nu} (\nu!)^2} \frac{1}{z^{2\nu+1}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^3} + \frac{3}{8} \frac{1}{z^5} + \frac{5}{16} \frac{1}{z^7} + \dots$$

Wynik ten nie jest zaskakujący, bowiem to właśnie otrzymalibyśmy rozwijając $(z^2-1)^{-1/2}$ przy użyciu metod zmiennej rzeczywistej. Zauważcie, że w zgodzie z naszą definicją jednowartościowych gałęzi funkcji $(z^2-1)^{-1/2}$ szereg Laurenta daje wartość pierwiastka kwadratowego, która jest dodatnia na dodatniej części osi rzeczywistej i ujemna na ujemnej części tej osi.

Do tej pory mówiliśmy o osobliwościach jako o punktach, w których funkcja jest nieanalityczna, ale nie próbowaliśmy dokonać żadnej klasyfikacji punktów osobliwych. Różnice między takimi punktami istnieją, jak możemy się spodziewać rozważając punkty osobliwe $z = 0$ trzech funkcji $1/z$, $1/z^2$ i $\cosh(z+1/z)$. Czujemy, że osobliwość $1/z^2$ jest trochę gorsza niż $1/z$ i że osobliwość $\cosh(z+1/z)$ jest okropna. Sposobu klasyfikacji osobliwości dostarcza szereg Laurenta każdej funkcji.

Przypuśćmy, że funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze R z wyjątkiem $z = z_0$. Rozwińmy $f(z)$ na szereg Laurenta wokół z_0 w obszarze R

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

Jeżeli $b_n = 0$ dla $n = N+1, N+2, \dots$ tzn., jeżeli szereg ujemnych potęg $(z-z_0)$ kończy się na N -tej potędze, wtedy mówimy, że $f(z)$ ma biegun rzędu N w z_0 . Funkcje $1/z$ i $1/z^2$ mają bieguny rzędu odpowiednio pierwszego i drugiego. Natomiast rozwinięcie Laurenta funkcji $\cosh(z+1/z)$ ma nieskończoną liczbę ujemnych potęg z ; to samo ma miejsce w przypadku rozwinięcia Laurenta funkcji $e^{1/z}$, jak wkrótce się przekonamy. Osobliwości tych funkcji w początku układu noszą nazwę *istotnych osobliwości*. Nie dają się one usunąć drogą mnożenia funkcji przez jakąś skończoną potęgę z , jak to ma miejsce w przypadku biegunów $1/z$ i $1/z^2$. Zauważcie jednak, że obecność nieskończonej liczby ujemnych potęg z w szeregu Laurenta nie gwarantuje obecności istotnej osobliwości. Przykład 3 powyżej pokazuje, że osobliwość typu punktu rozgałęzienia może także prowadzić do nieskończonej liczby ujemnych potęg w szeregu Laurenta. Tylko wtedy gdy wiemy, że rozważana osobliwość może być zamknięta w dowolnie małym obszarze, możemy wnioskować, że nieskończona liczba ujemnych potęg z pociąga za sobą istnienie

istotnej osobliwości. Funkcję nie posiadającą w jakimś obszarze istotnych osobliwości — choć może mieć ona tam bieguny — nazywamy *funkcją meromorficzną*.

Twierdzenie Laurenta ma szczególnie ważne konsekwencje, w przypadku gdy nie ma żadnych osobliwości wewnątrz mniejszego okręgu C_2 , tzn. $f(z)$ jest analityczne wszędzie wewnątrz C_1 . Używając twierdzenia Laurenta możemy napisać

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n,$$

gdzie

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz'. \quad (6.48)$$

Jeżeli jednak $f(z')$ jest analityczne wewnątrz C_1 , wtedy dla $n = -1, -2, \dots$ wyrażenie podcałkowe w równ. (6.48) jest analityczne wewnątrz i na C_1 , ponieważ C leży wewnątrz C_1 . Zatem zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego-Goursata $A_n = 0$ dla $n \leq -1$. Co więcej, dla $n \geq 0$ mamy, używając równania (6.17),

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}} dz' = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

gdzie $f^{(n)}(z_0)$ oznacza n -tą pochodną $f(z)$ w $z = z_0$, a $f^{(0)}(z) \equiv f(z)$, zatem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z-z_0)^n. \quad (6.49)$$

Wynik ten znany jest jako twierdzenie Taylora i szereg w równaniu (6.49) nazywany jest *szeregiem Taylora* dla $f(z)$ wokół punktu z_0 . Ten bardzo ważny rezultat może być sformułowany następująco:

Twierdzenie Taylora. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna we wszystkich punktach wewnętrznych okręgu C o środku z_0 , wtedy w dowolnym zamkniętym obszarze zawartym całkowicie w C

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z-z_0)^n \quad (6.50)$$

i szereg ten jest jednostajnie zbieżny.

Możemy teraz wyrazić funkcję analityczną $f(z)$ jako jednostajnie zbieżny szereg funkcji analitycznych (łatwo pokazać, że dowolny, jednostajnie zbieżny szereg funkcji analitycznych jest analityczny). Ze względu na jednostajną zbieżność łatwo można pokazać, że całka $f(z)$ wzdłuż dowolnej drogi w obszarze zbieżności szeregu potęgowego (6.49) może być obliczona przez całkowanie szeregu człon po członie (patrz zadanie 6.28). Posługując się równaniem (6.17) widzimy, że oznacza to także, iż pochodne funkcji $f(z)$ mogą być obliczone również przez różniczkowanie człon po członie. Równanie (6.49) podaje zatem funkcję $f(z)$ i jej wszystkie pochodne w całym obszarze zbieżności.

Przykłady

$$1. e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{dla } |z| < \infty.$$

$$2. \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{dla } |z| < \infty.$$

$$3. (1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{dla } |z| < 1.$$

Wszystkie te szeregi sprrowadzają się dla rzeczywistych wartości z do znanych wzorów.

Często jest możliwe uzyskanie rozwinięcia Laurenta jakiejś funkcji przy użyciu związanego z nim rozwinięcia Taylora. Zatem w przykładzie 1 powyżej otrzymujemy

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}, \quad (|z| > 0).$$

Widać z tego jasno, że $e^{1/z}$ ma w $z = 0$ istotną osobliwość. Trochę ważniejszym przykładem jest rozwinięcie Taylora funkcji $\cosh z$. Łatwo pokazać, że

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

dla $|z| < \infty$. Zatem dla $|z| > 0$ mamy

$$\cosh(z+1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (z+1/z)^{2n}.$$

Stosując wzór dwumianowy znajdujemy

$$\cosh(z+1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n} \frac{z^{2(n-m)}}{(2n-m)! m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu=-n}^n \frac{z^{2\mu}}{(n+\mu)! (n-\mu)!}.$$

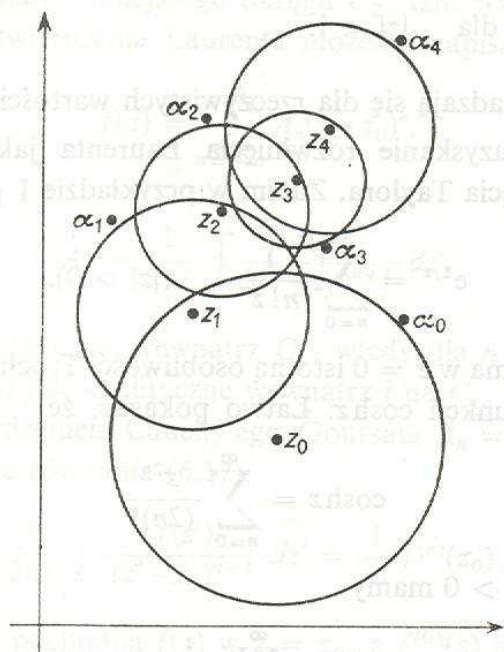
Jeżeli w równaniu (6.50) zamienimy porządek sumowania i następnie dokonamy zamiany zmiennych $\nu = n - \mu$, otrzymujemy

$$\cosh(z+1/z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} z^{2\mu} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+2|\mu|)! \nu!} \right]$$

w zgodzie z równaniem (6.47).

Obszar, w którym można dla funkcji stosować rozwinięcie Taylora wokół punktu z_0 , ograniczony jest przez istnienie osobliwości tej funkcji. Widzieliśmy, że jeżeli osobliwość ta ma miejsce w punkcie α_0 , rozwinięcie Taylora stosuje się wewnątrz okręgu o promieniu $|\alpha_0 - z_0|$ wokół z_0 . Rozwinięcie Taylora daje wartości funkcji analitycznej i jej wszystkich pochodnych w każdym punkcie w obszarze analityczności. W szczególności wielkości te znane są w punkcie z_1 (patrz rys. 6.16) w pobliżu granicy obszaru. Możemy teraz użyć punktu z_1 jako punktu, wokół którego rozwiniemy funkcję w inny szereg Taylora. Możemy to zrobić, ponieważ $f^{(n)}(z_1)$ znane jest dla wszystkich n z pierwszego rozwinięcia funkcji wokół z_0 . Promień zbieżności tego drugiego rozwinięcia na szereg wokół z_1 określony jest przez odległość od z_1 do najbliższej osobliwości. Postępując tym sposobem (rys. 6.16) możemy funkcję określić we wszystkich punktach z wyjątkiem tych, w których jest osobliwa. Przy takim postępowaniu potrzebujemy tylko znać na początek wartości funkcji analitycz-

nej w jakimś obszarze, dowolnie małym. Proces ten nazywa się *przedłużaniem analitycznym*. To tak, jak gdyby paleontolog zrekonstruował całego dinozaura ze skamieniałych pozostałości jego jednego pazura.



Rys. 6.16 Ciąg rozwinięć Taylora, które przedłużają analitycznie funkcję znaną pierwotnie w pewnym obszarze wokół z_0 . Promień pierwszego rozwinięcia ograniczony jest przez osobliwość w α_0 . Następne rozwinięcie Taylora wokół z_1 (które leży wewnątrz promienia zbieżności pierwszego rozwinięcia) ograniczone jest przez drugą osobliwość w α_1 itd.

Proces przedłużania analitycznego jest najlepszą demonstracją sztywnej struktury wewnętrznej funkcji analitycznych. Widzimy ponownie, jak bardzo są od siebie zależne wartości funkcji analitycznych: wartości funkcji analitycznej w jakimkolwiek obszarze na płaszczyźnie określają jej wartości wszędzie, gdzie jest ona analityczna. Ten plan rekonstrukcji wszystkich wartości funkcji analitycznej demonstruje również konieczność własności, która mówi, że wszystkie pochodne funkcji analitycznej są analityczne. Gdyby tak nie było, nie moglibyśmy przedłużyć funkcji analitycznej przez ciąg rozwinięć Taylora. Aby dało się to zrobić, niezbędna jest możliwość przybliżenia funkcji dowolnie dobrze, a to z kolei oznacza, że wszystkie jej pochodne muszą istnieć tak, aby szereg Taylora mógł być rozciągnięty dla uzyskania dowolnej dokładności. Natychmiastową konsekwencją faktu, iż funkcja analityczna może być przedłużona, jest to, że funkcja, która jest zerem wzdłuż dowolnej krzywej w obszarze R , w którym jest analityczna, musi być zerem wszędzie w R . Oznacza to, że jeżeli dwie funkcje $f(z)$ i $g(z)$ są równe na jakiejś krzywej w jednospójnym obszarze R , w którym obie są jednowartościowe i analityczne, wtedy muszą one być równe wszędzie w R , ponieważ $f(z) - g(z)$ jest zerem na tej krzywej, a więc wszędzie w R . Jak pamiętamy, funkcje analityczne e^z , $\sin z$, $\sinh z$ itp. były zdefiniowane dla zespolonych argumentów w sposób, który sprowadzał się do zwykłej definicji na osi rzeczywistej. Dyskutowana wyżej zasada wskazuje, że nie mogłyby one być inaczej zdefiniowane poza osią rzeczywistą tak, aby pozostać analitycznymi. Ponadto wyjaśnia to, czemu wszystkie znane tożsamości spełniane przez funkcje dla wartości rzeczywistych pozostają nadal słuszne na płaszczyźnie zespolonej.

Należy także zwrócić uwagę, że proces przedłużania analitycznego jest ściśle związany z problemem funkcji wielowartościowych i płatów Riemanna diskutowanych w paragrafie 6.2. Przypuśćmy, że mamy dany analityczny szereg potęgowy dla pewnej funkcji w jakimś obszarze, np.

$$w(z) = \sqrt{z} = \sqrt{1-(1-z)} = 1 - \frac{1}{2}(1-z) - \frac{1}{8}(1-z)^2 + \dots$$

w obszarze składającym się z wnętrza okręgu o jednostkowym promieniu i środku w $z = 1$. Jeżeli próbujemy przedłużać taką funkcję wzdłuż pewnych dróg w płaszczyźnie z (w powyższym przypadku wzdłuż dowolnej drogi okrążającej początek układu współrzędnych), to może się zdarzyć, że wracając do pierwotnego obszaru, w którym funkcja była zdefiniowana, nie powrócimy do pierwotnych wartości funkcji. Prowadzi to w naturalny sposób do konstrukcji płatów Riemanna diskutowanych w paragrafie 6.2.

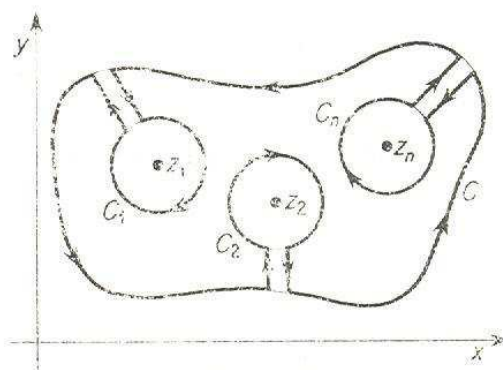
6.8. TEORIA RESIDUÓW — OBLICZANIE RZECZYWISTYCH CAŁEK OZNACZONYCH I SUMOWANIE SZEREGÓW

W tym paragrafie nie ma w zasadzie nic nowego. Wszystkie twierdzenia były już udowodnione; tutaj zastosujemy je po prostu na różne sposoby w celu wyznaczenia wartości pewnych rzeczywistych całek oznaczonych.

Twierdzenie o residuach. Całka z $f(z)$ wzdłuż zamkniętego konturu C zawierającego skończoną liczbę n punktów osobliwych funkcji $f(z)$ równa się sumie n całek z $f(z)$ po n okręgach, z których każdy otacza jeden i tylko jeden z punktów osobliwych.

Dowód. Jeżeli zastosujemy twierdzenie Cauchy'ego do obszaru pokazanego na rys. 6.17, to otrzymamy

$$\int_C f(z) dz + \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz = 0.$$



Rys. 6.17

Zauważcie, że kontury C_j przebiegane są na rys. 6.17 w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Wynika stąd, że

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n R_j,$$

gdzie $R_j = (1/2\pi i) \oint_{C_j} f(z) dz$ nazywane jest *residuum* w punkcie z_j . W tym równaniu na R_j znak całki ma zwykły sens, tzn. kontury C_j przebiegane są w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

W powyższym twierdzeniu nie ma nic nowego z wyjątkiem nazwy „residuum”. W celu obliczania residuów będziemy często używać całkowej formuły Cauchy’ego, albo formuły dla pochodnej funkcji analitycznej wyprowadzonej z formuły Cauchy’ego przez różniczkowanie.

Istnieje jednak inny, czasem użyteczny, sposób obliczania residuów. Rozwińmy funkcję $f(z)$ na szereg Laurenta wokół osobliwego punktu z_0 , wtedy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n},$$

przy czym $b_1 = (1/2\pi i) \oint_{C_0} f(z) dz = R_0$. Pouczające jest sprawdzenie tego wzoru przez scałkowanie obu stron rozwinięcia Laurenta po okręgu, który zawiera z_0 , ale nie zawiera innych osobliwości. Zamieniając kolejność sumowania i całkowania, co jest dozwolone, ponieważ szeregi te są jednostajnie zbieżne, otrzymujemy

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_{C_0} (z-z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \oint_{C_0} \frac{dz}{(z-z_0)^n}.$$

Pierwsza całka znika dla wszystkich n , ponieważ $(z-z_0)^n$ jest analityczne. Dla $n=1$ druga całka daje, przy pomocy wzoru całkowego Cauchy’ego, $2\pi i b_1$. Dla $n > 1$ napiszemy $b_n \equiv g(z)$, wtedy z równania (6.17) otrzymujemy

$$\oint_{C_0} \frac{b_n dz}{(z-z_0)^n} = \oint_{C_0} \frac{g(z) dz}{(z-z_0)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} g^{n-1}(z_0) = 0,$$

ponieważ $g(z) = b_n = \text{const.}$ Zatem $(1/2\pi i) \oint_{C_0} f(z) dz = b_1 = \text{residuum w } z_0$, tak więc residuum może być znalezione przez rozwinięcie funkcji na szereg Laurenta i wybranie współczynnika przy wyrazie $(z-z_0)^{-1}$. Nie ma w tym nic tajemniczego; jest to po prostu konsekwencja całkowej formuły Cauchy’ego.

Przykłady

1. $I = \oint_C e^{1/z} dz$, gdzie C = jednostkowy okrąg wokół początku układu oraz $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$, a więc $b_1 = 1$, zatem $I = 2\pi i$.

2. $I = \oint_C \frac{3z^2+2}{z(z+1)} dz$, gdzie C jest okręgiem: $|z| = 3$. Najszybszym sposobem wykonania tej całki jest zapisanie jej w postaci

$$\oint_C = \oint_{C_0} + \oint_{C_1} = \oint_{C_0} \frac{(3z^2+2)/(z+1)}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{(3z^2+2)/z}{(z+1)} dz,$$

gdzie C_0 jest małym okręgiem wewnątrz C okrążającym $z=0$, ale nie $z=-1$ i C_1 jest małym okręgiem okrążającym $z=-1$, ale nie $z=0$. Używając wtedy całkowej formuły Cauchy’ego do obliczenia obu całek otrzymujemy $I = 2\pi i(2-5) = -6\pi i$.

3. $I = \oint_C \frac{3z+2}{z(z+1)^3} dz$,

gdzie C jest okręgiem: $|z| = 3$. Rozdzielając całkę na części tak, jak poprzednio mamy

$$I = \oint_{C_0} \frac{(3z+2)/(z+1)^3}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{(3z+2)/z}{(z+1)^3} dz = 2\pi i[2] + 2\pi i \left[\frac{f''(z)}{2!} \right]_{z=-1},$$

gdzie $f(z) = (3z+2)/z$. Zatem $f''(-1) = -4$, a więc residuum w $z = -1$ wynosi -2 , stąd $I = 2\pi i(2-2) = 0$.

W tym ostatnim przykładzie obliczyliśmy residuum funkcji mającej postać $f(z)/(z-z_0)^n$ w punkcie osobliwym z_0 posługując się wzorem Cauchy'ego dla pochodnej funkcji analitycznej. W ogólności, jeżeli $f(z)$ jest analityczne wewnątrz pewnego konturu C otaczającego z_0 i na nim, to residuum funkcji $f(z)/(z-z_0)^n$ w z_0 wynosi

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz = \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

Pouczającą interpretację tego wzoru można uzyskać rozwijając funkcję $f(z)$ na szereg Taylora wokół z_0 . Jest to możliwe, ponieważ funkcja $f(z)$ jest analityczna w pewnym obszarze wokół z_0 , bo osobliwości są odosobnione, wtedy

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

Jeżeli utworzymy teraz wielkość $f(z)/(z-z_0)^n$ dzieląc obie strony przez $(z-z_0)^n$, to współczynnik przy wyrazie $1/(z-z_0)$, który jest właśnie residuum funkcji $f(z)/(z-z_0)^n$, wynosi $f^{(n-1)}(z_0)/(n-1)!$, w zgodzie z powyżej podanym wzorem.

Zastosujemy teraz przedstawione metody do obliczania różnych całek określonych.

a) $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$, gdzie R jest funkcją wymierną, tzn.

$$R = \frac{a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta + a_3 \cos^2\theta + \dots}{b_1 \cos\theta + b_2 \sin\theta + b_3 \cos^2\theta + b_4 \sin^2\theta + \dots}$$

W celu obliczenia tej całki położmy $z = e^{i\theta}$ tak, że

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

i $d\theta = -i(dz/z)$. Całka przyjmuje postać

$$-i \oint_C R \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{z},$$

gdzie C jest okręgiem jednostkowym.

Przykład

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}, \quad a > 1.$$

$$I = -i \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(a + \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \right)} \frac{dz}{z} = -2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Mianownik może być rozłożony na czynniki jako $(z-\alpha)(z-\beta)$, gdzie

$$\alpha = -a+(a^2-1)^{1/2}, \quad \beta = -a-(a^2-1)^{1/2}.$$

Ponieważ $a > 1$, natychmiast widzimy, że $|\alpha| < 1$ i $|\beta| > 1$. Wyrażenie podcałkowe ma zatem jeden punkt osobliwy wewnątrz koła jednostkowego w $z = \alpha$ i

$$I = -2i(2\pi i) \frac{1}{\alpha-\beta} = \frac{2\pi}{(a^2-1)^{1/2}}.$$

Następnie rozważymy całki w postaci:

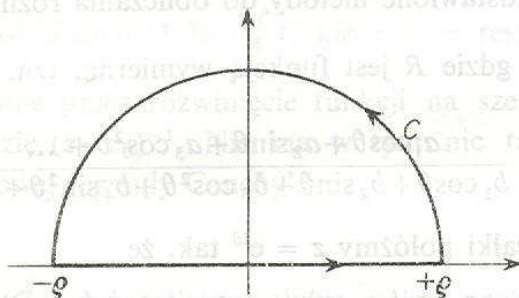
b) $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$, gdzie $R(x)$ jest funkcją wymierną, tzn. stosunkiem dwóch wielomianów, bez biegunów na osi rzeczywistej.

Jeżeli na osi rzeczywistej nie ma biegunów, wtedy całka istnieje, gdy stopień mianownika $R(x)$ jest przynajmniej o dwa wyższy od stopnia licznika. Oznacza to, że $|R(z)| \rightarrow 1/|z^2|$, gdy $|z| \rightarrow \infty$. Mamy zatem

$$\oint_C R(z) dz = \int_{-\varrho}^{\varrho} R(x) dx + \int_{\text{półokrąg}} R(z) dz$$

(patrz rys. 6.18). Gdy $\varrho \rightarrow \infty$, zamknięty kontur C obejmuje wszystkie bieguny $R(z)$ w górnej półpłaszczyźnie, a więc

$$\oint_C R(z) dz = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res } R(z),$$



Rys. 6.18

gdzie notacja ta ma oznaczać utworzenie sumy wszystkich residuów $R(z)$ z górnej półpłaszczyzny. Teraz w granicy dużych $|z|$

$$\left| \int_{\text{półokrąg}} R(z) dz \right| \leq \int \frac{|\text{const}| \varrho d\theta}{\varrho^2} = \frac{|\text{const}|}{\varrho},$$

co dąży do zera, gdy $\varrho \rightarrow \infty$, zatem

$$\oint_C R(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res } R(z).$$

Kiedy mówimy, że całka po „konturze w nieskończoności” znika, mamy w rzeczywistości na myśli, że dla dowolnego danego ε istnieje taki skończony kontur C , iż $\left| \oint_C f(z) dz \right| < \varepsilon$.

Jeżeli tak jest, mówimy, że całka po konturze w ∞ jest zerem; w rzeczywistości wszystkie kontury są skończone.

Przykład

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Aby znaleźć zera mianownika w górnej półpłaszczyźnie, musimy rozwiązać równanie $z^2 = -1$. Otrzymujemy $z = \pm i$. Tylko pierwiastek $+i$ znajduje się w górnej półpłaszczyźnie, zatem

$$I = \oint \frac{dz}{(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right) \Big|_{z=i} = (2\pi i) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Inną ważną klasą całek są całki typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx$. Jest to całka Fouriera wymiernej funkcji $R(x)$. Jej część rzeczywistą i zespoloną określają całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x dx \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x dx.$$

Zachowujemy założenie, że na osi rzeczywistej nie ma biegunów. Tym razem także rozważamy całkę $\oint_C R(z)e^{iz}dz$ po półokręgu. Ponieważ $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ dla każdego punktu w górnej półpłaszczyźnie, całka ta będzie istniała, jeżeli funkcja wymierna $R(x)$ ma w nieskończoności zero przynajmniej drugiego rzędu. Wtedy, jak poprzednio całka po nieskończonym półokręgu znika pozostawiając

$$\oint_C R(z) e^{iz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res}[R(z) e^{iz}].$$

Przykład

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{k^2 + \mu^2} dk.$$

Jeżeli $r > 0$, wtedy kładąc $x = rk$ stwierdzamy, że całka wynosi

$$\begin{aligned} I &= r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + (\mu r)^2} dx = r \oint \frac{e^{iz}}{z^2 + (\mu r)^2} dz = \\ &= 2\pi i r \sum_{y>0} \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z^2 + (\mu r)^2} \right) = 2\pi i r \frac{e^{iz}}{z + i\mu r} \Big|_{z=i\mu r} = \pi \frac{e^{-\mu r}}{\mu}. \end{aligned}$$

Zauważcie, że

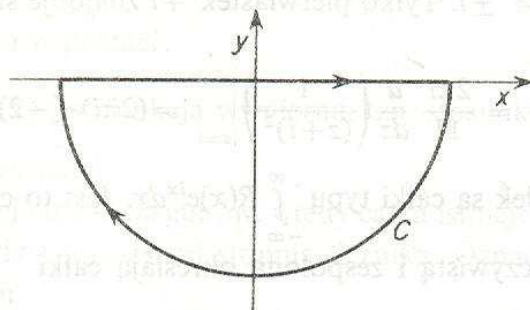
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kr}{k^2 + \mu^2} dk$$

i zatem powyższy rezultat jest faktycznie niezależny od znaku r . Wobec tego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{k^2 + \mu^2} dk = \pi \frac{e^{-\mu|r|}}{\mu}.$$

Innym sposobem stwierdzenia tego może być obliczenie całki przy założeniu, że $r < 0$. Wtedy musimy rozważyć kontur w dolnej półpłaszczyźnie, ponieważ $|e^{ikr}| = e^{-(\text{Im} k)r}$, co jest ograniczone tylko dla $\text{Im}(k) < 0$, jeżeli $r < 0$. Jak poprzednio dla dostatecznie dużego półokręgu (rys. 6.19)

$$\oint_C = \int_{-\infty}^{\infty} = -2\pi i \sum_{y < 0} \text{Res.}$$



Rys. 6.19

Znak minus bierze się stąd, że kontur C przebiegany jest zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Zatem

$$I = -2\pi i r \frac{e^{iz}}{z - i\mu r} \Big|_{z = -i\mu r} = \frac{\pi e^{\mu r}}{\mu},$$

co dla $r < 0 = \pi e^{-\mu|r|}/\mu$. Residuum obliczono tutaj dla jedynego bieguna w dolnej półpłaszczyźnie $z = -i\mu r$.

d) Problem stanowią całki typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\alpha x} dx$, gdzie funkcja wymierna $R(x)$ ma w nieskończoności zero rzędu pierwszego. Całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x dx \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x dx$$

stanowią rzeczywistą i urojoną część powyższej całki.

Z powyższej dyskusji nie jest jasne, czy całki te istnieją. Lemat Jordana, który teraz udowodnimy, mówi nam, że one istnieją. Znow zakładamy, że na osi rzeczywistej nie ma biegunów.

Lemat Jordana. Jeżeli dla $\varrho \rightarrow \infty$ (na rys. 6.20), $|R(z)| \rightarrow 0$ jednostajnie w θ dla $0 < \theta < \pi$, wtedy $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_{|z|=\varrho} R(z)e^{i\alpha z} dz = 0$ dla $\alpha > 0$.

Dowód. Lemat ten prawie udowodniliśmy w paragrafie o związkach dyspersyjnych. Tam jednakże korzystaliśmy z analityczności $R(z)$ w górnej półpłaszczyźnie. Tutaj skorzystamy z założenia o jednostajnej zbieżności $|R(z)|$ do zera. Niech $M(\varrho)$ będzie maksimum $|R(z)|$ na półokręgu $|z| = \varrho$. Wtedy stwierdzenie, że $|R(z)| \rightarrow 0$ jednostajnie oznacza, że $|R(z)| \leq M(\varrho)$, gdzie $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} M(\varrho) = 0$, niezależnie od θ .

Niech

$$I = \int_{|z|=\varrho} R(z)e^{i\alpha z} dz,$$

wtedy

$$|I| \leq M(\varrho) \int_0^\pi |e^{i\alpha(\varrho \cos\theta + i\varrho \sin\theta)}| |\varrho i e^{i\theta}| d\theta = \varrho M(\varrho) \int_0^\pi e^{-\alpha\varrho \sin\theta} d\theta.$$

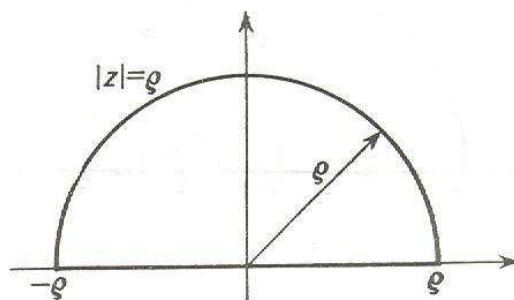
Postępując z tą całką dokładnie tak jak w paragrafie 6.6 otrzymujemy

$$|I| < \pi M(\varrho) \frac{(1 - e^{-\alpha\varrho})}{\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{gdy } \varrho \rightarrow \infty,$$

ponieważ $\alpha > 0$ i $M(\varrho) \rightarrow 0$, gdy $\varrho \rightarrow \infty$. Otrzymujemy zatem wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res}[R(z) e^{i\alpha z}]$$

dla $\alpha > 0$. Dla $\alpha < 0$ przy wyprowadzaniu rozważamy kontur leżący tylko w dolnej półpłaszczyźnie ($y < 0$) i do powyższego wzoru należy wprowadzić odpowiednie zmiany.



Rys. 6.20

Przykład

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^{ik \cdot r}}{k^2 + \mu^2} dk = \int_0^{2\pi} k d\phi \int_0^\pi k \sin\theta d\theta \int_0^\infty dk \frac{e^{ik \cdot |r| \cos\theta}}{k^2 + \mu^2} = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 dt \int_0^\infty dk \frac{k^2 e^{ik|r|t}}{k^2 + \mu^2} = \frac{2\pi}{i|r|} \int_0^\infty dk \frac{k(e^{ik|r|} - e^{-ik|r|})}{k^2 + \mu^2} = \frac{2\pi}{i|r|} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{ke^{ik|r|}}{k^2 + \mu^2}. \end{aligned}$$

Lemat Jordana mówi nam, że dla zespolonych k całka ta po nieskończonym półokręgu znika. Zatem

$$I = \frac{2\pi}{i|r|} 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res} \frac{ke^{ik|r|}}{k^2 + \mu^2} = \frac{4\pi^2}{|r|} \frac{i\mu e^{i \cdot i\mu|r|}}{2i\mu} = \frac{2\pi^2}{|r|} e^{-\mu|r|}, \quad (6.51)$$

ponieważ w górnej półpłaszczyźnie znajduje się tylko jeden biegun ($k = +i\mu$).

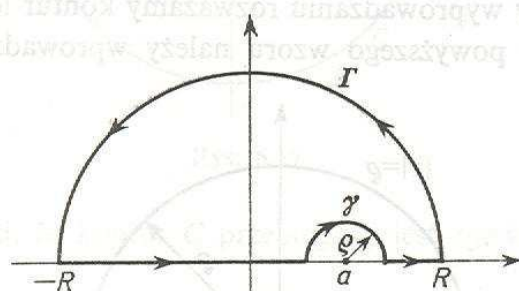
e) Jak dotąd nie dopuszczaliśmy, aby funkcja podcałkowa miała bieguny na osi rzeczywistej. Jeżeli $Q(z)$ jest funkcją meromorficzną w górnej półpłaszczyźnie, jeżeli na osi rzeczywistej funkcja ta ma tylko bieguny rzędu pierwszego (tzn. proste bieguny) i jeżeli $Q(z)$ zachowuje się w nieskończoności jak którekolwiek z wyrażeń podcałkowych klasy b, c lub d, wtedy metody zastosowane w tych przypadkach mogą być rozszerzone na przypadek całek typu

$$P \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx,$$

gdzie P oznacza wartość główną Cauchy'ego, która występuje tu ze względu na obecność biegunów na osi rzeczywistej.

Niech $Q(z)$ ma pojedynczy prosty biegun na osi rzeczywistej $z = a$. Rozważmy wygięty kontur C (rys. 6.21) składający się z małego półokręgu γ wokół punktu a , dużego półokręgu Γ wokół początku układu i dwóch prostoliniowych odcinków na osi rzeczywistej od $-R$ do $a-\rho$ i od $a+\rho$ do R . Weźmiemy γ tak małe, że obejmuje ono tylko biegun znajdujący się w a . Γ jest na tyle duże, że obejmuje wszystkie bieguny w górnej półpłaszczyźnie i na tyle duże, że całka po Γ dąży do zera, gdy $R \rightarrow \infty$. Mamy wtedy

$$\left(\int_{\Gamma} + \int_{-R}^{a-\rho} + \int_{\gamma} + \int_{a+\rho}^R \right) Q(z) dz = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res } Q(z).$$



Rys. 6.21

Biorąc granicę dla $R \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\left[\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^{a-\rho} + \int_{a+\rho}^R \right) + \int_{\gamma} \right] Q(z) dz = P \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx + \int_{\gamma} Q(z) dz = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res } Q(z).$$

Rozważamy teraz $\int_{\gamma} Q(z) dz$. Na γ , $z = a + \rho e^{i\theta}$, a więc

$$\int_{\gamma} Q(z) dz = \int_{\pi}^0 Q(a + \rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} i d\theta.$$

Ponieważ $Q(z)$ ma w a prosty biegun, zawiera ono czynnik $(z-a)^{-1}$. Możemy zatem napisać $Q(z) = \phi(z)/(z-a) + \psi(z)$, gdzie $\phi(z)$ i $\psi(z)$ są analityczne w $z = a$ i w sąsiedztwie tego punktu. Widać, że $\psi(z)$ nie daje wkładu do całki po konturze γ dla $\rho \rightarrow 0$, a ponieważ $z-a = \rho e^{i\theta}$, to mamy:

$$\int_{\gamma} Q(z) dz = \int_{\pi}^0 \phi(a + \rho e^{i\theta}) i d\theta.$$

Rozwijamy teraz ϕ na szereg Taylora wokół a (jest ono tam analityczne)

$$\phi(a + \rho e^{i\theta}) = \phi(a) + \text{człony zależne od } \rho,$$

zatem dla $\rho \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\int_{\gamma} Q(z) dz = \int_{\pi}^0 \phi(a) i d\theta = -i\pi\phi(a).$$

$\phi(a)$ jest oczywiście residuum $Q(z) = \phi(z)/(z-a)$ w $z = a$, a więc ostateczny wynik może być napisany w postaci

$$P \int_{-\infty}^{\infty} Q(x) dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res} Q(z) + \pi i \sum_{y=0} \text{Res} Q(z),$$

gdzie $\sum_{y=0} \text{Res} Q(z)$ oznacza sumę residuów $Q(z)$ w każdym z prostych biegunów tej funkcji na osi rzeczywistej (uogólniając przypadek do kilku prostych biegunów).

Przykład

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Wartość tej całki może być określona z następującej prostej zależności

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \sum_{y=0} \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z} \right) = \pi i.$$

W tym przypadku jedyny biegun leży na osi rzeczywistej w $z = x = 0$. Przyrównując część rzeczywistą i urojoną otrzymujemy

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0,$$

co jest trywialnym wynikiem, bo funkcja podcałkowa jest nieparzysta, ponadto

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

otrzymaliśmy poprzednio z teorii transformat Hilberta. W tym wzorze symbol P jest zbędny, bo funkcja podcałkowa nie ma bieguna. Wiele całek zawierających $\sin x$ lub $\cos x$ można obliczyć tak, jak to tutaj zrobiliśmy, zastępując funkcję trygonometryczną przez e^{iz} i biorąc następnie część rzeczywistą i urojoną.

f) W następnej kolejności rozważymy całki typu $\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} R(x) dx$, gdzie $R(z)$ jest wymierne, analityczne w $z = 0$ i nie ma biegunów na dodatniej osi rzeczywistej i gdzie $|z^{\lambda} R(z)| \rightarrow 0$ jednostajnie, gdy $|z| \rightarrow 0$ i gdy $|z| \rightarrow \infty$. Ponieważ przypadek całkowitego λ może być rozważony przy pomocy metod opisanych powyżej założymy, że λ nie jest równe liczbie całkowitej.

Zagadnienie to wiąże się z punktami rozgałęzienia i cięciami, ponieważ $z^{\lambda-1}$ nie jest w ogólności funkcją jednowartościową. Niech $z^{\lambda-1}$ oznacza następującą gałąź funkcji potęgowej

$$z^{\lambda-1} = \exp[(\lambda-1)\log z] = \exp[(\lambda-1)(\log r + i\theta)],$$

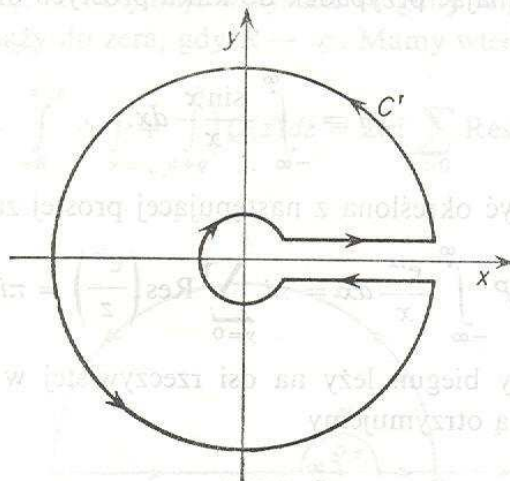
gdzie $0 < \theta < 2\pi$ i $r > 0$, wtedy

$$z^{\lambda-1} = r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad r > 0.$$

Cięcie zostało poprowadzone wzdłuż dodatniej osi rzeczywistej. Dla $\theta = 0$ funkcja potęgowa ma wartość

$$z^{\lambda-1} = r^{\lambda-1} = x^{\lambda-1}.$$

Rozważmy teraz całkę konturową $\oint_{C'} z^{\lambda-1} R(z) dz$, gdzie zamknięty kontur C' jest pokazany na rys. 6.22. C' składa się tu z małego okręgu wokół $z = 0$, którego promień będzie później ściągnięty do zera i dużego okręgu, który zostanie później rozszerzony do nieskończoności oraz dwóch całek wzdłuż dodatniej osi rzeczywistej w kierunkach przeciwnych i po przeciwnych krawędziach cięcia. Ponieważ funkcja podcałkowa jest nieciągła na cięciu, te dwie



Rys. 6.22

całki nie zniosą się. W celu wykonania całki należy wszędzie określić fazę wyrażenia $z^{\lambda-1}$. Dokonałiśmy tego powyżej definiując ją jako równą 0 na dodatniej osi rzeczywistej, a więc $z^{\lambda-1} = x^{\lambda-1}$, co jest zgodne ze zwykłą umową. Wobec tego tuż poniżej osi rzeczywistej $z^{\lambda-1} = x^{\lambda-1} e^{i2\pi(\lambda-1)}$. Całki po małym i dużym okręgu znikają, ponieważ $|z^{\lambda} R(z)| \rightarrow 0$ dla $|z| \rightarrow 0$ i $|z| \rightarrow \infty$, zatem

$$\oint_{C'} z^{\lambda-1} R(z) dz = - \int_0^{\infty} e^{2\pi i(\lambda-1)} x^{\lambda-1} R(x) dx + \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} R(x) dx,$$

gdzie pierwsza całka po prawej stronie jest wkładem od prostej poniżej osi x , a druga jest wkładem od prostej powyżej osi x . Razem całki te dają

$$[1 - e^{2\pi i(\lambda-1)}] \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} R(x) dx = \left(\frac{-2i \sin \pi \lambda}{e^{-\pi i \lambda}} \right) \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} R(x) dx.$$

Ponieważ

$$\oint_{C'} z^{\lambda-1} R(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{wewnątrz } C'} \text{Res}[z^{\lambda-1} R(z)],$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} R(x) dx &= \frac{-\pi e^{-\pi i \lambda}}{\sin \pi \lambda} \sum_{\text{wewnątrz } C'} \text{Res}[z^{\lambda-1} R(z)] = \\ &= \frac{\pi(-1)^{\lambda-1}}{\sin \pi \lambda} \sum_{\text{wewnątrz } C'} \text{Res}[z^{\lambda-1} R(z)], \end{aligned} \quad (6.52)$$

bo $e^{-i\pi z} = (-1)^z$. Dalej nie możemy już się posunąć bez wyspecyfikowania funkcji $R(z)$. Bardzo prostym przykładem tego typu jest całka

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Po obliczeniu tej całki użyjemy jej do uzyskania pewnych rezultatów związanych z funkcjami beta i gamma.

Po pierwsze, ponieważ $0 < \lambda < 1$ i $|z^{\lambda}/(1+z)| \rightarrow 0$ dla $|z| \rightarrow \infty$ i $|z| \rightarrow 0$, zatem

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi(-1)^{\lambda-1}}{\sin \pi \lambda} \operatorname{Res} \left(\frac{z^{\lambda-1}}{1+z} \right)_{z=-1} = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}.$$

Funkcja beta $\beta(x, y)$ zdefiniowana jest przez

$$\beta(x, y) \equiv \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0, \quad (6.53)$$

gdzie $\Gamma(x)$ jest funkcją gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (6.54)$$

Dowód tożsamości (6.53) można znaleźć w wielu podręcznikach z analizy; zauważmy że

$$\beta(x, 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x} dt, \quad \text{jeżeli } 0 < x < 1.$$

Jeżeli w ostatniej całce dokonamy zamiany zmiennych

$$t = \frac{u}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u},$$

przyjmuje ona postać

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u} du,$$

co dokładnie pokrywa się z całką, którą dopiero co obliczyliśmy, wtedy

$$\beta(x, 1-x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad \text{dla } 0 < x < 1. \quad (6.55)$$

Wzór ten może być uogólniony drogą przedłużenia analitycznego na wszystkie z w płaszczyźnie zespolonej. W szczególności dla $x = 1/2$ mamy $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi$, zatem

$$\pi^{1/2} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du, \quad (6.56)$$

gdzie dokonaliśmy podstawienia $t = u^2$.

Na zakończenie tego paragrafu o teorii residuów pokażemy, jak można dokonywać sumowania szeregów przy pomocy całkowania po konturach. Wynik, który otrzymamy, opie-

rał się będzie na tym, że $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ ma bieguny rzędu pierwszego w zerach funkcji $\sin \pi z$ (tzn. w $z = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) i residuum każdego z tych biegunów wynosi 1.

Twierdzenie. Niech $f(z)$ będzie funkcją meromorficzną i niech C będzie konturem, który obejmuje zera funkcji $\sin \pi z$, znajdujące się w punktach $z = \varrho, \varrho + 1, \dots, n$. Jeżeli założymy, że bieguny funkcji $f(z)$ i $\sin \pi z$ nie pokrywają się, to

$$\sum_{m=\varrho}^n f(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) dz - \sum_{\substack{\text{bieguny } f(z) \\ \text{wewnątrz } C'}} \operatorname{Res}[\pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z)]. \quad (6.57)$$

Dowód

$$\begin{aligned} \oint_C \pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) dz &= 2\pi i \sum (\operatorname{Residua} \text{ wszystkich biegunów funkcji podcałkowej}) = \\ &= 2\pi i \left[\sum_{m=\varrho}^n f(m) + \sum_{\substack{\text{bieguny } f(z) \\ \text{wewnątrz } C'}} \operatorname{Res}[\pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z)] \right] \end{aligned}$$

c.b.d.o.

Przykład. Użyjemy tego twierdzenia do udowodnienia równoważności funkcji Langevina ($\operatorname{ctgh} x - 1/x$) i sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2 \pi^2}.$$

Posłużymy się następnie tym twierdzeniem w celu wyrażenia $\sin \theta$ przez nieskończony iloczyn, co stanowi samo w sobie bardzo interesującą formułę.

Kładąc $f(z) = 2x/(x^2 + z^2 \pi^2)$ i używając powyższego wzoru otrzymujemy

$$\sum_{m=-N}^N \frac{2x}{x^2 + m^2 \pi^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) dz - \sum_{\substack{\text{bieguny } f(z) \\ \text{wewnątrz } C}} \operatorname{Res}[\pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z)],$$

gdzie C jest jakimś zamkniętym konturem, powiedzmy prostokątem obejmującym punkty $z = -N, -N+1, \dots, 0, 1, \dots, N-1, N$. Niech teraz długość i szerokość prostokąta C dążą do ∞ . Podczas tego

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) dz \right| \leq \frac{1}{2} \oint_C |\operatorname{ctg} \pi z| \left| \frac{2x}{x^2 + z^2 \pi^2} \right| |dz| \rightarrow 0.$$

W celu stwierdzenia, że ta całka znika, gdy $|z| \rightarrow \infty$ zauważmy, iż

$$|\operatorname{ctg} \pi z| = \frac{|\cos \pi z|}{|\sin \pi z|} = \left(\frac{\cos^2 \pi x + \sinh^2 \pi y}{\sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y} \right)^{1/2}.$$

Można teraz uzyskać dowolnie wielką dokładność w sumowaniu tego szeregu przez takie wybranie prostokąta, że jego pionowe boki przecinają oś x w dostatecznie dużej nieparzystej wielokrotności jednej drugiej, na przykład $\left(10^{97} + \frac{1}{2}\right)$, gdzie $\cos \pi \left(10^{97} + \frac{1}{2}\right) = 0$ i $\sin \pi \left(10^{97} + \frac{1}{2}\right) = 1$. Wtedy na tych bokach prostokąta

$$|\operatorname{ctg} \pi z| = \left| \left(\frac{\sinh^2 \pi y}{1 + \sinh^2 \pi y} \right)^{1/2} \right| = |\operatorname{tgh} \pi y| \leq 1.$$

Na poziomych bokach prostokąta $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\operatorname{ctg} \pi z| = 1$, zatem wyrażenie podcałkowe dąży do $|1/z^2|$ dla $|z| \rightarrow \infty$ i całka znika.

Jeżeli weźmiemy nieskończony kontur prostokątny, to

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + m^2 \pi^2} &= -\operatorname{Res} \left[\frac{(\pi \operatorname{ctg} \pi z) 2x}{x^2 + z^2 \pi^2} \right]_{z=\pm ix/\pi} = \\ &= -\frac{2x}{\pi} \left[\frac{\operatorname{ctg} \pi(ix/\pi)}{2ix/\pi} + \frac{\operatorname{ctg} \pi(-ix/\pi)}{-2ix/\pi} \right] = 2i \operatorname{ctg} ix = 2 \operatorname{ctgh} x. \end{aligned}$$

Zatem

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + m^2 \pi^2} + \frac{2}{x} = 2 \operatorname{ctgh} x$$

lub

$$\operatorname{ctgh} x - \frac{1}{x} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + m^2 \pi^2}, \quad (6.58)$$

co dowodzi sformułowanej na początku zależności.

Ten konkretny wzór, oprócz zilustrowania opisanej techniki sumowania, nie jest szczególnie interesujący. Jednak, gdy scałkujemy obie strony w granicach od 0 do x , to otrzymujemy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{m^2 \pi^2} \right) = \ln \left(\frac{\sinh x}{x} \right).$$

Stąd

$$\ln \left(\frac{\sinh x}{x} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{m^2 \pi^2} \right) = \ln \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{m^2 \pi^2} \right),$$

a więc

$$\frac{\sinh x}{x} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{m^2 \pi^2} \right). \quad (6.59)$$

Możemy uogólnić ten rezultat na wszystkie wartości z w płaszczyźnie zespolonej drogą przedłużenia analitycznego. Kładąc wtedy $x = i\theta$ (θ rzeczywiste) otrzymujemy

$$\sin \theta = \theta \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{n^2 \pi^2} \right). \quad (6.60)$$

To wyrażenie zawierające nieskończony iloczyn pokazuje w sposób jawny wszystkie zera funkcji $\sin \theta$. Stanowi ono kompletną faktoryzację szeregu Taylora. Faktycznie wyrażenie to może być użyte jako definicja funkcji sinus.

Przyrównując współczynniki przy członie θ^3 po obu stronach powyższego równania otrzymujemy użyteczny wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (6.61)$$

Jest to szczególna wartość funkcji dzeta Riemanna

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (6.62)$$

Istnieje wiele specyficznych trików użytecznych przy wykonywaniu całek i sumowaniu szeregów. Dokonałiśmy przeglądu tylko podstawowych metod, ale czytelnik nie będzie miał trudności w zrozumieniu żadnej szczególnej procedury, z którą może się zetknąć, jeżeli rozumie ten paragraf. Zadanie 31 dostarcza zastosowań wszystkich podstawowych metod rachunku reszduów, które były rozwinięte powyżej.

6.9. ZASTOSOWANIA DO FUNKCJI SPECJALNYCH I PRZEDSTAWIEŃ CAŁKOWYCH

W tym paragrafie użyjemy wzorów na pochodną funkcji analitycznej w celu znalezienia funkcji tworzących pewnych funkcji specjalnych i ich wzorów *Rodriguesa*. Wyprowadzimy także przedstawienia całkowe dla funkcji Bessela i wielomianów Legendre'a.

Funkcje Bessela

Funkcja $e^{(1/2)z(w-1/w)}$ jest analityczna wszędzie w płaszczyźnie w z wyjątkiem $w = 0$, może być więc rozwinięta na szereg Laurenta w dowolnym pierścieniu $R_2 < |w| < R_1$ bez względu na to, jak małe jest R_2 (> 0) lub jak duże R_1 . Oznaczając współczynniki rozwinięcia przez $J_n(z)$, mamy

$$e^{(1/2)z(w-1/w)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n. \quad (6.63)$$

Współczynniki rozwinięcia są funkcjami zmiennej zespolonej z . Oznaczenie przyjęte dla nich uprzedza fakt, że okażą się one funkcjami Bessela o całkowitym wskaźniku. Innymi słowami $e^{(1/2)z(w-1/w)}$ jest funkcją tworzącą dla funkcji Bessela.

Udowodnimy teraz, że funkcje $J_n(z)$ rzeczywiście spełniają różniczkowe równanie Bessela

$$z^2 \frac{d^2 J_n}{dz^2} + z \frac{dJ_n}{dz} + (z^2 - n^2) J_n = 0. \quad (6.64)$$

Po drodze znajdziemy całkowe przedstawienie dla funkcji Bessela i także jawną dla nich formułę.

Z twierdzenia Laurenta

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-w_0)^{n+1}} dw, \quad (6.65)$$

gdzie C jest dowolnym zamkniętym konturem zawartym w pierścieniu. Przyjmiemy C w postaci jednostkowego okręgu $w = e^{i\theta}$, wtedy w równaniu (6.65) $w_0 = 0$ i $f(w) = e^{(1/2)z(w-1/w)}$. Na jednostkowym okręgu $w - 1/w = 2i \sin \theta$, zatem

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\theta - z \sin \theta)} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta - z \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Druga całka jest jednak zerem, ponieważ wyrażenie podcałkowe jest nieparzyste w θ . Ponieważ pierwsza funkcja podcałkowa jest parzysta w θ , to

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta. \quad (6.66)$$

Jest to całkowe przedstawienie funkcji $J_n(z)$, która jak teraz udowodnimy przez podstawienie do równania (6.64), jest rozwiązaniem równania Bessela. Sprawdzenie tego jest bardziej zawile niż można się spodziewać, oprzemy się więc pokusie aby „pozostawić to czytelnikowi”. Zachęcamy oczywiście czytelnika, aby sam spróbował, nim będzie czytał dalej. Mamy

$$J'_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \sin(n\theta - z \sin \theta) d\theta = -\frac{1}{\pi} \cos \theta \sin(n\theta - z \sin \theta) \Big|_0^\pi + \quad (6.67a)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta \cos(n\theta - z \sin \theta) (n - z \cos \theta) d\theta, \quad (6.67b)$$

gdzie dokonaliśmy całkowania przez części. Pierwszy człon zeruje się. Różniczkując ponownie równanie (6.67a) mamy

$$J''_n(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta.$$

Tworzymy teraz wielkość $z^2(J''_n + J_n) + zJ'_n - n^2 J_n$, posługując się równaniem (6.67b) na $J'_n(z)$. Wyrażenie to musi być tożsamościowo równe zeru, jeżeli $J_n(z)$ są funkcjami Bessela. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) [z^2 - z^2 \sin^2 \theta + z \cos \theta (n - z \cos \theta) - n^2] d\theta = \\ = \frac{-n}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n\theta - z \sin \theta) (n - z \cos \theta)] d\theta. \end{aligned}$$

Funkcja $\sin(n\theta - z \sin \theta)$ jest funkcją pierwotną wyrażenia podcałkowego. Znika ona zarówno dla 0 jak i π , dowód jest więc pełny: $J_n(z)$ są rozwiązaniami równania Bessela. Łatwo pokazać, że

$$\begin{aligned} J_0(0) = 1, \quad J_n(0) = 0 \quad \text{dla} \quad n \neq 0, \\ J'_1(0) = \frac{1}{2}, \quad J'_n(0) = 0 \quad \text{dla} \quad n \neq 1, \end{aligned} \quad (6.68)$$

a więc te funkcje są rzeczywiście rozwiązaniami równania Bessela znanymi jako *funkcje Bessela pierwszego rodzaju* (które są analityczne w początku układu współrzędnych) o wskaźniku n (całkowitym).

Zwykle rozwiązanie równania Bessela wyrażane jest jako nieskończona suma, a nie jako całka. Wyprowadzimy teraz z funkcji tworzącej rozwiązanie typu nieskończonego szeregu

$$e^{(1/2)z(w-1/w)} = e^{(1/2)zw} e^{-z/2w} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^r w^r}{r!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-z/2)^m w^{-m}}{m!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^n J_n(z).$$

W celu uzyskania $J_n(z)$, współczynnika przy $w^n (n > 0)$, mnożymy każdy człon przy w^{-m} w drugim szeregu przez człon w^{n+m} w pierwszym szeregu i sumujemy następnie po wszystkich m , więc

$$J_n(z)w^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+m} w^{n+m} (-z/2)^m w^{-m}}{(n+m)!m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m (z/2)^{2m+n}}{(n+m)!m!} \right] w^n,$$

zatem

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+n}}{(n+m)!m!}. \quad (6.69)$$

Jest to rozwiązanie typu nieskończonego szeregu dla całkowitych $n \geq 0$. Czytelnik może pokazać, że dla całkowitych n

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (6.70)$$

Rozwiązania te są więc liniowo zależne i musi istnieć inny zbiór liniowo niezależnych rozwiązań. Nazywane są one *funkcjami Neumanna* i oznaczane przez $N_n(z)$. Z równań Bessela i funkcji Bessela można skonstruować całą rodzinę równań i funkcji stanowiących rozwiązania, jeżeli dopuścimy niecałkowite i połówkowe wartości wskaźnika n . Również rozmaite liniowe kombinacje funkcji Bessela i Neumanna dla rzeczywistych i urojonych argumentów prowadzą do *zmodyfikowanych funkcji Bessela* i *funkcji Hankela*. Sferyczne funkcje Bessela, które będą dyskutowane w rozdziale 7, są jeszcze jednym zbiorem funkcji definiowanych za pomocą funkcji Bessela. Każdy z tych zbiorów funkcji tworzy *układ Sturma-Liouville'a*. Naszym celem tutaj nie jest dostarczenie wyczerpującego i wyczerpującego dla czytelnika opisu tych funkcji, pragniemy jedynie wyprowadzić i przedyskutować podstawowe rezultaty aby czytelnik mógł dogrzebać się konkretnych faktów potrzebnych mu w swojej pracy z obszernych rozpraw na ten temat.

Wielomiany Legendre'a

Pokazaliśmy poprzednio, że wielomiany Legendre'a zdefiniowane przez wzór Rodriguesa

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

są *ortogonalnym zbiorem funkcji* na odcinku $[-1, 1]$ i spełniają *równanie Legendre'a*

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

W paragrafie 1.8 wspomniano, choć nie było to udowodnione z wyjątkiem P_0 , P_1 i P_2 , że *funkcją tworzącą wielomianów Legendre'a* jest

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad 0 < t < 1, \quad |x| \leq 1. \quad (6.71)$$

Porównując to równanie z równaniem (1.101) czytelnik zauważy, że położyliśmy $t \equiv r'/r$ i $x \equiv \cos\theta$. Udowodnimy teraz ten związek dla wszystkich n . Zacniemy od przedstawienia

wzoru Rodriguesa jako całki konturowej, posługując się wzorem na n -tą pochodną funkcji analitycznej,

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(1-z^2)^n}{(z-x)^{n+1}} dz. \quad (6.72)$$

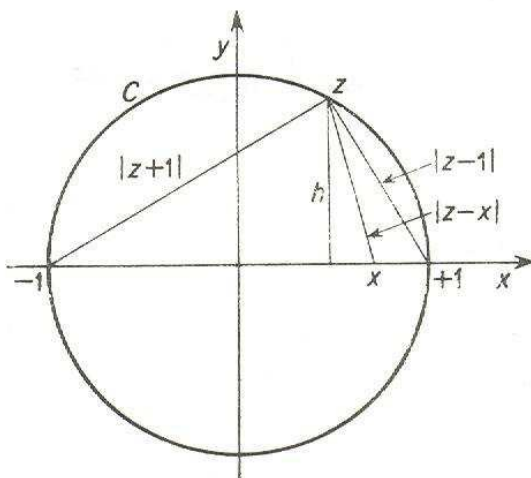
Skorzystalismy tu z faktu, że funkcja $(1-z^2)^n$ jest całkowita (C jest zamkniętym konturem, który obejmuje punkt x). To całkowe przedstawienie wielomianów Legendre'a znane jest jako *całkowy wzór Schläfli*. Jeżeli utworzymy teraz szereg $S = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, używając całkowego przedstawienia dla $P_n(x)$ i zamienimy porządek całkowania i sumowania, to otrzymamy

$$S = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} t^n \left(\frac{1-z^2}{z-x} \right)^n.$$

Jest to prosty szereg geometryczny, który jest zbieżny i daje się łatwo wysumować, jeżeli

$$\left| \frac{t}{2} \frac{1-z^2}{z-x} \right| < 1.$$

Musimy jednak pokazać, że kontur C obejmujący punkt x może być tak wybrany, aby było to zawsze słuszne dla wszystkich x i t z ich odpowiednich zakresów zmienności. Niech C będzie jednostkowym okręgiem oraz z dowolnym punktem na C , a x niech znajduje się



Rys. 6.23

na osi rzeczywistej wewnątrz lub na C tak, jak pokazuje rys. 6.23. Powierzchnia trójkąta prostokątnego z wierzchołkami w -1 , z , $+1$ dana jest przez

$$A = \frac{1}{2} |z+1| |z-1| = \frac{1}{2} |1-z^2|.$$

Dana jest ona także przez $\frac{1}{2}(2h) = h$; ale $|z-x| \geq h$ dla wszystkich z i x , a więc

$$|z-x| \geq h = A = \frac{1}{2} |1-z^2| \Rightarrow \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1-z^2}{z-x} \right| \leq 1,$$

skąd

$$\left| \frac{t}{2} \frac{1-z^2}{z-x} \right| < 1,$$

bo $t < 1$. Możliwy jest także czysto algebraiczny dowód, ale ten dowód geometryczny jest prostszy. Sumujemy teraz szereg geometryczny i uzyskujemy

$$S = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z-x} \frac{1}{1 - \left[\frac{-t}{2} \frac{(1-z)^2}{(z-x)} \right]} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{2/t dz}{z^2 - \frac{2}{t} z - \left(1 - \frac{2}{t} x\right)}.$$

Mianownik ma dwa pierwiastki

$$z_{\pm} = \frac{1}{t} \pm \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2x}{t} + 1 \right)^{1/2} = \frac{1}{t} [1 \pm (1 - 2xt + t^2)^{1/2}].$$

Pamiętając, że $0 < t < 1$ i $-1 \leq x \leq 1$, łatwo nam pokazać iż $z_+ > 1$ i $-1 < z_- < 1$, a więc z_- jest pierwiastkiem obejmowanym przez kontur. Obliczając residuum w z_- mamy

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{-1}{2\pi i} \frac{2}{t} 2\pi i \frac{1}{z_- - z_+} = \frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}},$$

c.b.d.o.

Dokładnie w ten sam sposób można otrzymać funkcje tworzące wielomianów Hermite'a i wielomianów Laguerre'a z odpowiednich wzorów Rodriguesa (patrz zadania 36 i 37).

Wróćmy do całkowego przedstawienia Schläfli dla wielomianów Legendre'a

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{2^n (z-x)^{n+1}} dz. \quad (6.73)$$

Można udowodnić bezpośrednio z tego wzoru, że $P_n(x)$ spełniają równanie różniczkowe Legendre'a. Już jednak dowodziliśmy, że $P_n(x)$ dane przez wzór Rodriguesa spełniają równanie Legendre'a, ominiemy więc ten dowód. Tutaj wyprowadzimy inne przedstawienie całkowe: *całkę rzeczywistą*.

Jako kontur C bierzemy okrąg wokół x o promieniu $|(x^2 - 1)^{1/2}|$, wtedy dla każdego punktu z na C możemy położyć $z = x + (x^2 - 1)^{1/2} e^{i\theta}$, gdzie θ wzrasta od $-\pi$ do π . Dokonując tego podstawienia we wzorze Schläfli otrzymujemy

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{(x-1 + (x^2-1)^{1/2} e^{i\theta})(x+1 + (x^2-1)^{1/2} e^{i\theta})}{2(x^2-1)^{1/2} e^{i\theta}} \right]^n i d\theta,$$

gdzie napisaliśmy $(z^2 - 1)^n$ w postaci $[(z-1)(z+1)]^n$ przed podstawieniem $z = x + (x^2 - 1)^{1/2} e^{i\theta}$. Wtedy całe wyrażenie w nawiasie powyżej upraszcza się po krótkich przekształceniach do $x + (x^2 - 1)^{1/2} \cos \theta$, co jest parzystą funkcją θ . Mamy zatem rzeczywiste przedstawienie całkowe dla wielomianów Legendre'a, które zawdzięczamy Laplace'owi

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [x + (x^2 - 1)^{1/2} \cos \theta]^n d\theta, \quad \text{dla } |x| \leq 1. \quad (6.74)$$

Zauważcie, w jak oczywisty sposób wynika z powyższego wzoru, że $P_n(1) = 1$ i $P_n(-1) =$

Tabela 6.1. Własności ortogonalnych funkcji powstających z układów Sturm-Liouville'a

Nazwa i zastosowanie fizyczne	Wzór Rodriguesa	Funkcja tworząca	Równanie różniczkowe	Równanie różniczkowe w postaci Sturm-Liouville'a	Ortonormalność
Wielomiany Legendre'a: a) Rozkład na multipole, b) ∇^2 we współrzędnych sferycznych]	$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \quad 0 < t < 1$	$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$	$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P_n'] + n(n+1)P_n = 0$	$\int_{-1}^1 P_n P_m dx = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}$
Wielomiany Hermite'a [Kwantowy oscylator]	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{-t^2+2tx}, \quad t > 0$	$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$	$\frac{d}{dx} (e^{-x^2}H_n') + 2ne^{-x^2}H_n = 0$	$\int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m e^{-x^2} dx = \delta_{nm} \sqrt{\pi} 2^n n!$
Wielomiany Laguerre'a [Atom wodoru (równanie radialne)]	$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}, \quad 0 < t < 1$	$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0$	$\frac{d}{dx} (xe^{-x}L_n') + ne^{-x}L_n = 0$	$\int_0^{\infty} L_n L_m e^{-x} dx = \delta_{nm} (n!)^2$
Funkcje Bessela (o wskaźniku całkowitym) [∇^2 we współrzędnych cylindrycznych]	Przedstaw. szeregowo $J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m+n}}{(n+m)! m!}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = e^{(1/2)x(t-1/t)}, \quad t > 0$	$x^2 J_n'' + xJ_n' + (x^2 - n^2)J_n = 0$	$\frac{d}{dx} (xJ_n') + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)J_n = 0$	Patrz zadanie 5.23
Funkcje trygonometryczne [Klasyczny oscylator]	$f_n = \sin(nx) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (nx)^{2m+1}}{(2m+1)!}$ $g_n = \cos(nx) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (nx)^{2m}}{(2m)!}$		$f_n'' + n^2 f_n = 0,$ $g_n'' + n^2 g_n = 0$	$\frac{d}{dx} (f_n') + n^2 f_n = 0,$ $\frac{d}{dx} (g_n') + n^2 g_n = 0$	$\int_{-\pi}^{\pi} f_n f_m dx = \delta_{nm} \pi,$ $\int_{-\pi}^{\pi} g_n g_m dx = \delta_{nm} \pi,$ $\int_{-\pi}^{\pi} f_n g_m dx = 0$

$= (-1)^n$. Kształcące jest wyliczenie P_0 , P_1 i P_2 z powyższego wzoru. Chociaż $(x^2-1)^{1/2}$ jest czysto urojone dla $|x| < 1$, wszystkie człony zawierające $(x^2-1)^{1/2}$ w powyższym wzorze znikają przy wykonywaniu całki, bo $\int_0^\pi \cos^m \theta d\theta = 0$ dla nieparzystych m .

Zakończymy ten paragraf tablicą 6.1. Podsumowuje ona pewne bardziej użyteczne informacje o funkcjach specjalnych używanych w fizyce matematycznej.

ZADANIA

1. Niech $f(z) = \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^2}$, gdzie dla $z \neq 0$, $f(0) = 0$.

Pokaż, gdzie funkcja ta, jeżeli gdziekolwiek jest: a) różniczkowalna, b) analityczna.

2. Pokaż, że liczby zespolone z_1 , z_2 i z_3 leżą na linii prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $(z_1 - z_3)/(z_2 - z_3)$ jest liczbą rzeczywistą.

Wskazówka: zadanie to może być rozwiązane bardzo prosto, jeżeli rozważa się liczby zespolone geometrycznie jako wektory. Może ono być także rozwiązane algebraicznie, ale metoda geometryczna jest z pewnością prostsza.

3. Udowodnij, że $u = \sin x \cosh y + 2 \cos x \sinh y + x^2 - y^2 + 4xy$ jest funkcją harmoniczną i znajdź stowarzyszoną funkcję harmoniczną v . Znajdź zespoloną funkcję zmiennej zespolonej z taką, że $f(z) = u + iv$.

4. a) Wyznacz wszystkie wartości stałych a , b , c , d , dla których wielomian $u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ jest harmoniczny, tzn. spełnia dwuwymiarowe równanie Laplace'a w całej płaszczyźnie.

b) Znajdź $v(x, y)$ harmoniczną funkcję stowarzyszoną do $u(x, y)$.

c) Znajdź funkcję analityczną $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, gdzie $z = x + iy$.

5. Zespolona funkcja $E^*(z)$ jest zdefiniowana przez $E^*(z) = E_x(x, y) - iE_y(x, y)$, gdzie E_x i E_y są składowymi pola elektrycznego w dwóch wymiarach. Pokaż, że statyczne równania Maxwella w próżni pociągają za sobą analityczność $E^*(z)$ jako funkcji z .

6. Pokaż, że jeżeli napiszemy $z = re^{i\theta}$, to równania Cauchy'ego-Riemanna przyjmują w zmiennych r i θ postać

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

7. Przeanalizuj funkcję $z^{1/3}$ z punktu widzenia pojęcia płatów Riemanna dyskutowanych w paragrafie 6.2.

8. Korzystając z wyników zadania 6.6 pokaż, że $\log z$, $z^{1/2}$ i $z^{1/3}$ są analityczne wszędzie na ich odpowiednich płatach Riemanna z wyjątkiem punktu $z = 0$.

9. Pokaż, że dwupłatowa powierzchnia Riemanna dla $w(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ może być rozcięta i połączona wzdłuż odcinka $[a, b]$ osi rzeczywistej (załóż dla wygody, że a i b są rzeczywiste). Zdefiniuj odpowiednio $w(z)$ za pomocą biegunowego przedstawienia liczb zespolonych, łącznie z definicją zakresu zmienności faz.

10. Znajdź powierzchnię Riemanna, na której $\sqrt{z-a} + \sqrt{z-b}$ (a, b rzeczywiste dodatnie) jest jednowartościową funkcją analityczną wszędzie z wyjątkiem punktów $z = a$ i $z = b$.

11. Znajdź powierzchnię Riemanna, na której $\sqrt{(z-1)(z-2)(z-3)}$ jest jednowartościową funkcją analityczną z wyjątkiem $z = 1, 2, 3$.

12. Pokaż, że $w(z) = z^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), gdzie α jest niewymierne, można uczynić funkcją jednowartościową tylko na powierzchni Riemanna o nieskończonej liczbie płatów. Zastanów się jak te płaty powinny być połączone.

13. Pokaż, że zgodnie z definicjami paragrafu 6.2

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} z) = z, \quad \log(e^z) = z + 2\pi ni.$$

14. *Twierdzenie o wartości średniej.* Pokaż, że w dwuwymiarowej przestrzeni wolnej od ładunków, wartość potencjału elektrostatycznego w dowolnym punkcie równa jest średniej potencjału na powierzchni dowolnego koła o środku w tym punkcie. Przeprowadź ten dowód rozważając potencjał jako część rzeczywistą funkcji analitycznej.

15. Znajdź wszystkie osobliwości funkcji $\operatorname{tgh} z$.

16. Wyjaśnij dlaczego jedna z podanych poniżej całek ma sens, a druga jest pozbawiona sensu. Oblicz tę, która ma sens, zapisując wynik w postaci $a + bi$.

$$\text{a) } \int_{-1}^1 z^* dz, \quad \text{b) } \int_0^i \sin 2z dz.$$

17. Oblicz korzystając z całkowego wzoru Cauchy'ego.

$$\text{a) } \oint_C \frac{e^z dz}{z - \pi i/2}, \quad C = \text{granica kwadratu o bokach wyznaczonych przez } x = \pm 2, y = \pm 2.$$

$$\text{b) } \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2}, \quad C = \text{okrąg o promieniu 1 i środku w } i.$$

(Oba kontury skierowane są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.)

18. Pokaż, że

$$\text{a) } \oint_C \frac{z^4 + 2z + 1}{(z - z_0)^4} dz = 8\pi i z_0, \quad \text{gdzie } C \text{ jest dowolnym zamkniętym konturem obejmującym } z_0.$$

$$\text{b) } \oint_C \frac{\cosh z}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{[1 + (-1)^n]}{2}, \quad \text{gdzie } C \text{ jest dowolnym zamkniętym konturem obejmującym początek układu.}$$

19. Całkowy wzór Cauchy'ego dla wielomianu. Niech $P(z)$ będzie wielomianem. Używając twierdzenia Cauchy'ego udowodnij, że $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{P(z)}{z-a} dz = P(a)$, gdzie C obejmuje punkt a .

Wskazówka: Rozważ

$$Q(z) = \frac{P(z) - P(a)}{z - a},$$

co jest także wielomianem (dlaczego?) i oblicz z tego wyrażenia całkę, która jest ci potrzebna.

20. Udowodnij, że jeżeli $f(z)$ jest analityczne na zamkniętym konturze C i wewnątrz niego, a α i β są dwoma różnymi punktami wewnątrz C , to

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)} dz = \frac{f(\alpha)}{\alpha-\beta} + \frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}.$$

Przy pomocy tego wyniku wydedukuj twierdzenie Liouville'a, które mówi, że funkcja musi być stałą.

[Wskazówka: Jeżeli dla dowolnych α i β , $f(\alpha) = f(\beta)$, to $f(z) = \text{const.}$]

21. *Twierdzenie Morera.* Twierdzenie Morera jest w pewnym sensie odwrotnością twierdzenia Cauchy'ego–Goursata. Mówi ono, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła w obszarze R i jeżeli $\oint f(z)dz = 0$ dla dowolnej krzywej C w R , to $f(z)$ jest analityczne w R . Udowodnij to twierdzenie. Twierdzenie Morera dostarcza nam innego sposobu stwierdzania analityczności funkcji. Możemy użyć go zamiast sprawdzania warunków Cauchy'ego–Riemanna i czasami kłopotliwego dodatkowego warunku analityczności — ciągłości pochodnej $f(z) = u + iv$, to znaczy ciągłości czterech pierwszych pochodnych u i v .

22. *Odwzorowania konforemne.* Rozważ funkcję analityczną $w = f(z)$ jako transformację zespolonej płaszczyzny z na zespoloną płaszczyznę w . Przyjmij, że dwie krzywe F_z^1 i F_z^2 na płaszczyźnie z przecinają się pod kątem α w z_0 . Udowodnij, że przetransformowane krzywe F_w^1 i F_w^2 na płaszczyźnie w przecinają się pod tym samym kątem, jeżeli $f'(z_0) \neq 0$. Warunek, że $f'(z_0) \neq 0$ ma podstawowe znaczenie dla konforemności w punkcie z_0 . Rozważ funkcję analityczną $w = z^2$, dla której $w'(0) = 0$. Osie współrzędnych, które przechodzą przez początek układu współrzędnych i tworzą kąt 90° , odwzorowane są na proste, które tworzą kąt 180° . Kąt między dwoma dowolnymi prostymi przechodzącymi przez początek układu współrzędnych będzie na płaszczyźnie w podwojony. Odwzorowanie nie jest zatem konforemne w początku układu. Jednakże jest ono konforemne w każdym innym punkcie.

23. *Wzór Poissona.*

a) Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną wewnątrz i na okręgu C o promieniu a . Udowodnij, że

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\frac{f(z)}{z-z'} - \frac{f(z)}{z-(a^2/z'^*)} \right] dz,$$

jeżeli $z' = re^{i\phi}$ i $r < a$, we współrzędnych biegunowych umieszczonych w środku okręgu C .

b) Przy pomocy powyższego wzoru wyprowadź wzór Poissona:

$$f(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)} f(ae^{i\theta}) d\theta.$$

c) Udowodnij przy pomocy wzoru Poissona, że jeżeli funkcja jest analityczna wewnątrz i na okręgu, to wartość funkcji w środku okręgu, $f(0)$, jest średnią jej wartości granicznych na okręgu (twierdzenie o wartości średniej).

d) Startując teraz z równania

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\frac{f(z)}{z-z'} + \frac{f(z)}{z-(a^2/z'^*)} \right] dz$$

[które różni się od równania w części (a) znakiem $+$, ale jest słuszne z tego samego powodu] udowodnij, że [używając ewentualnie części (c)]

$$f(z') = f(0) - \frac{iar}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta - \phi) f(ae^{i\theta})}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)} d\theta.$$

e) Kładąc $f(z') = f(re^{i\phi}) = u(r, \phi) + iv(r, \phi)$, itd. wyprowadź (d) ze wzorów

$$u(a, \phi) = u(0) + \frac{1}{2\pi} P \int_0^{2\pi} v(a, \theta) \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) d\theta,$$

$$v(a, \phi) = v(0) - \frac{1}{2\pi} P \int_0^{2\pi} u(a, \theta) \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) d\theta.$$

Wzory te wyrażają część rzeczywistą funkcji analitycznej na okręgu przez jej część urojoną na tym okręgu i na odwrót. Istnieje wiele dalszych zastosowań tych wzorów.

24. *Alternatywne podejście do transformat Hilberta.*

a) Pokaż, że jeżeli $f(z)$ jest analityczne w górnej półpłaszczyźnie z i jeżeli $a = \alpha + i\beta$, przy czym $\beta > 0$, to

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[\frac{f(z)}{z-a} + \frac{f(z)}{z-a^*} \right] dz = f(a),$$

gdzie C jest półokręgiem o dowolnie dużym promieniu, którego podstawą jest oś rzeczywista.

b) Jeżeli $|f(z)| \rightarrow 0$ dla $|z| \rightarrow \infty$ w górnej półpłaszczyźnie, to pokaż, że

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-a^*} \right] dx = f(a).$$

Dodaj ułamki, aby otrzymać

$$\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)f(x)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = f(a).$$

c) Jeżeli $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, to pokaż, że (b) redukuje się do

$$u(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)v(x, 0)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx,$$

$$v(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\alpha)u(x, 0)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx.$$

d) Pokaż stąd, że jeżeli położymy $\beta = 0$, to

$$u(\alpha, 0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x, 0)}{x-\alpha} dx, \quad v(\alpha, 0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x, 0)}{x-\alpha} dx,$$

co z wyjątkiem notacji stanowi parę transformat Hilberta wyprowadzonych w paragrafie 6.5 [równ. (6.19a) i (6.19b)].

25. Rozważ całkę

$$I_{\pm} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-A}^{+B} \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon} dx,$$

gdzie A i B są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, a $\varepsilon > 0$.

a) Pokaż, że I_{\pm} można zapisać w postaci

$$I_{\pm} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-A}^{-\delta} \frac{xf(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{+\delta}^{+B} \frac{xf(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{xf(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \pm i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-A}^B \frac{f(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx,$$

gdzie δ jest małą liczbą dodatnią.

b) Użyj wiarogodnych argumentów (na przykład tego typu, jak w paragrafie 5.3) w celu pokazania, że I_{\pm} można zapisać w postaci

$$I_{\pm} = \int_{-A}^{-\delta} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\delta}^{+B} \frac{f(x)}{x} dx + f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2} \mp if(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-A}^B \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

c) Pokaż, że trzeci człon w równaniu (b) znika z powodu symetrii. Wykonując w sposób jawny czwartą całkę pokaż, że

$$I_{\pm} = P \int_{-A}^B \frac{f(x)}{x} dx \mp if(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{B}{\varepsilon} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{A}{\varepsilon} \right) \right].$$

d) Połóż $\varepsilon \rightarrow 0$ i użyj definicji funkcji δ , aby ostatecznie napisać

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-A}^B \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = P \int_{-A}^B \frac{f(x)}{x} dx \mp i\pi f(0) = P \int_{-A}^B \frac{f(x)}{x} dx \mp i\pi \int_{-A}^B \delta(x) f(x) dx.$$

Relacja ta jest czasem zapisywana raczej tajemniczo jako

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x).$$

26. Rozwiąż równanie całkowe

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-t} dx = \frac{1}{1+t^2} \equiv -v(t),$$

znajdując transformatę Hilberta funkcji $v(t)$. Znajdź funkcję zespoloną $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ taką, że $u(x, 0) \equiv u(x) = \operatorname{Re}(f(z))$ i $v(x, 0) \equiv v(x) = \operatorname{Im}(f(z))$ oraz sprawdź, że ta funkcja ma dwie własności (co to są za własności?), które gwarantują, że $u(x)$ i $v(x)$ są parą transformat Hilberta.

27. Wyprowadź wzór dyspersyjny dla $f(z)$, jeżeli $|f(z)/z|$ dąży do stałej, gdy $|z| \rightarrow \infty$.

28. Udowodnij, że jednostajnie zbieżny szereg funkcji analitycznych może być scałkowany człon po członie. Pokaż stąd, że jednostajnie zbieżny szereg funkcji analitycznych jest funkcją analityczną.

Wskazówka: użyj twierdzenia Morera z zadania 22.

29. Znajdź rząd bieguna w początku układu, residuum tego bieguna i całkę po (małym) konturze otaczającym początek układu, ale nie zawierającym wewnątrz żadnej innej osobliwości, dla następujących funkcji:

a) $\operatorname{ctg} z$, b) $\operatorname{cosec}^2 z \log(1-z)$, c) $\frac{z}{\sin z - \operatorname{tg} z}$.

30. Jakie są położenia i natura osobliwości oraz ich residua następujących funkcji w płaszczyźnie z , wyłączając punkt w nieskończoności?

a) $f_1(z) = \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{(z-1)^2}$, b) $f_2(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$.

Uwaga: obie te funkcje mają nieodosobnione, a zatem istotne osobliwości w nieskończoności, ponieważ początek układu jest dla funkcji $f_1(1/z)$ i $f_2(1/z)$ punktem granicznym biegunów.

31. Zadania na obliczanie rzeczywistych całek określonych przez całkowanie po konturze

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\pi}{(a^2-b^2)^{1/2}}, \quad a > b > 0,$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2} [a - (a^2-b^2)^{1/2}], \quad a > b > 0,$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}, \quad a > b > 0,$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \quad e) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3},$$

$$f) \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x(a^2+x^2)} = \frac{\pi}{2a^2} (1-e^{-a}), \quad g) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi,$$

$$h) \int_0^{\infty} \frac{x^{2a-1}}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi b^{2(a-1)}}{2} \operatorname{cosec} \pi a, \quad 0 < a < 1,$$

$$i) \int_0^{\infty} \frac{\log x}{b^2+x^2} dx = \frac{\pi \log b}{2b},$$

$$j) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega' - \omega_0)^2 + a^2} \frac{1}{\omega' - \omega} d\omega' = \frac{\pi}{a} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + a^2},$$

$$k) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{2\pi}{3a^2\sqrt{3}}.$$

1) Rozważ całkę rzeczywistą

$$G(x, x', \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} e^{-k^2\tau} dk,$$

gdzie τ jest rzeczywiste. W tym przypadku łatwo pokazać, że

$$G(x, x', \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} e^{-(x-x')^2/4\tau}.$$

Pokaż, że ten wynik jest nadal słuszny w przypadku, gdy τ jest czysto urojone.

Wskazówka: wartość całki

$$\int_0^{\infty} e^{-iu^2} du$$

można znaleźć rozważając całkę z e^{-z^2} po granicy kołowego sektora $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $0 \leq r \leq R$. Udowodnij, że w granicy $R \rightarrow \infty$ wkład od całki po kołowym łuku dąży do zera. Wkłady od pozostałych prostoliniowych odcinków konturu dają wartość całki niezbędną w zadaniu.

Uwaga: Ta całka konturowa dostarcza wartości dwóch oznaczonych całek rzeczywistych

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = (\pi/2)^{1/2}$$

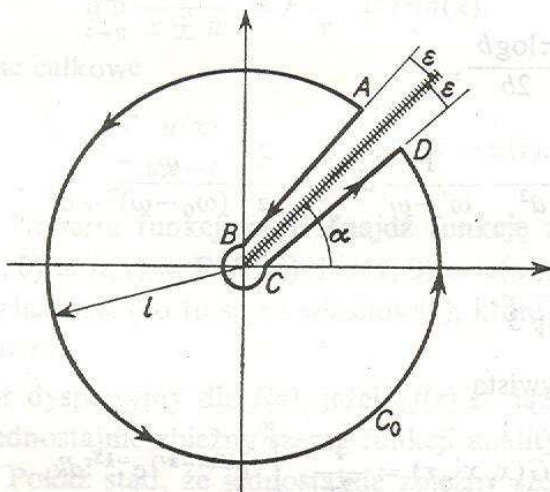
poprzez wzięcie części rzeczywistej i urojonej. Droga zamiany zmiennych $x^2 = t$ wynik ten może być przekształcony do postaci

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = (\pi/2)^{1/2}.$$

32. Widzieliśmy w jaki sposób funkcja $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ może być użyta do sumowania pewnych szeregów. Jest ona jednak bezużyteczna, jeżeli szereg jest naprzemienny. Pokaż jak można sumować naprzemienne szeregi używając funkcji $\pi \operatorname{cosec}(\pi z)$ zamiast $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$. Użyj ogólnego wyniku aby pokazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/12.$$

33. Rozważ zagadnienie obliczenia całki z funkcji $z^{1/2}$ od A do D wzdłuż kołowej drogi C pokazanej na rys. 6.24. Cięcie wybieramy wzdłuż promienia $\theta = \alpha$ i definiujemy $z^{1/2} \equiv r^{1/2} e^{i\theta/2}$ dla $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$. Porównaj ten wynik z wartością otrzymaną z całkowania $z^{1/2}$ od A do D wzdłuż drogi $ABCD$ typu „dziurka od klucza”. Czy wyniki się zgadzają? Czy powinny się zgadzać? Dlaczego?



Rys. 6.24 Kontur potrzebny w zadaniu 6.34. Kąty ϵ określające kształt drogi typu „dziurka od klucza” są dowolnie małe. Promień okręgu C_0 wynosi l i cięcie biegnie wzdłuż kierunku $\theta = \alpha_0$.

34. Rozważ następującą funkcję reakcji $G(t)$, która znika dla ujemnych wartości argumentu i która dla wartości dodatnich dana jest przez

$$G(t) = G_0 \frac{\sin^2 \mu t}{t^{3/2}}.$$

Zwróć uwagę, że funkcja ta spełnia warunki (a), (b) i (c) z początku paragrafu 6.6. Pokaż, że transformata Fouriera $g(\omega)$ dana jest wzorami:

$$g(\omega) = \frac{i-1}{2} G_0 \left[\sqrt{\omega} - \frac{1}{2} \sqrt{\omega+2\mu} - \frac{1}{2} \sqrt{\omega-2\mu} \right], \quad \omega \geq 2\mu,$$

$$g(\omega) = \frac{i-1}{2} G_0 \left[\sqrt{\omega} - \frac{1}{2} \sqrt{\omega+2\mu} \right] + \frac{i+1}{2} G_0 \left[\frac{1}{2} \sqrt{2\mu-\omega} \right], \quad 0 \leq \omega \leq 2\mu$$

$$g(-\omega) = g^*(\omega).$$

Pokaż, że funkcja o wartościach zespolonych, która redukuje się na osi rzeczywistej do powyższego wyrażenia ma postać

$$g(z) = \frac{i-1}{2} G_0 \left[\sqrt{z} - \frac{1}{2} \sqrt{z+2\mu} - \frac{1}{2} \sqrt{z-2\mu} \right].$$

Widzimy zatem, że $g(z)$ ma na osi rzeczywistej punkty rozgałęzienia; ewentualność, której nie wykluczają warunki (a), (b) i (c). Zauważ, że możemy wybrać cięcia tak, aby leżały w dolnej półpłaszczyźnie, dzięki czemu funkcja $g(z)$ jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie.

Wskazówka: będzie tu użyteczna całka wymieniona w uwadze po zadaniu 6.32.

35. Funkcja Θ (lub funkcja schodkowa) jest zdefiniowana przez

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Udowodnij, że

$$\text{a) } \Theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega} d\omega, \quad \text{b) } \frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x).$$

Wskazówka: patrz równanie (5.63).

36. Wielomiany Laguerre'a generowane są przez funkcję tworzącą

$$\psi(x, t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n, \quad 0 < t < 1.$$

Dane są one bezpośrednio wzorem

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad 0 \leq x \leq \infty,$$

analogicznym do wzoru Rodriguesa dla wielomianów Legendre'a.

a) Różniczkując funkcję tworzącą względem x [otrzymując $(1-t)\psi' = -t\psi$] wyprowadź równanie rekurencyjne

$$L'_n - nL'_{n-1} = -nL_{n-1}.$$

Różniczkując $\psi(x, t)$ względem t można otrzymać inne równanie rekurencyjne. Pokaż, że

$$L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + n^2 L_{n-1} = 0.$$

b) Z tych dwóch związków rekurencyjnych wyprowadź różniczkowe równanie Laguerre'a

$$xL''_n + (1-x)L'_n + nL_n = 0.$$

c) Pokaż, że $L_n(0) = n!$

d) Wyprowadź funkcję tworzącą ze wzoru Rodriguesa przez całkowanie po konturze.

37. W paragrafie 5.10 zdefiniowaliśmy wielomiany Hermite'a przy pomocy funkcji tworzącej

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad t > 0$$

i stąd wyprowadziliśmy wzór Rodriguesa

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Udowodnij teraz rzecz odwrotną, a mianowicie, że wzór Rodriguesa pociąga za sobą istnienie takiej funkcji tworzącej. Po drodze udowodnij przedstawienie całkowe

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} e^{x^2} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

gdzie C obejmuje punkt x .

38. Udowodnij całkowe przedstawienie wielomianów Hermite'a

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x+it)^n e^{-t^2} dt.$$

Użyj tego wyniku do wyprowadzenia jawnego przedstawienia wielomianów Hermite'a przez szereg

$$H_n(x) = \sum_{\substack{r=0 \\ (2r \leq n)}}^n \frac{(-1)^r n!}{r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r}.$$

39. Pokaż, że

a) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dla $x > 0$,

b) $\Gamma(n+1) = n!$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.

LITERATURA POMOCNICZA

- R. V. Churchill *Complex Variables and Applications*. Drugie wydanie. McGraw-Hill, New York 1960. Doskonała, niezwykle jasno napisana książka, idealna dla samodzielnej nauki. Książka Churchilla miała wpływ na całe pokolenie fizyków włączając w to autorów.
- P. Franklin *Functions of Complex Variables*. Prentice Hall, Englewood Cliffs-New York 1958.
- E. Goursat *Functions of a Complex Variable*. Dover Publications, New York 1966. Bardzo łatwa do czytania.
- E. Hiile *Analytic Function Theory*, Tom I i II. Ginn, Boston 1959. Wyczerpująco traktuje temat.
- K. Knopp *Theory of Functions*, Część I i II. Dover, New York 1945. Książce tej towarzyszą dwa zbiory zadań.
- E. Landau *Foundations of Analysis*. Chelsea, New York 1960. Aksjomatyczne omówienie różnych systemów liczbowych włącznie z liczbami zespolonymi.
- S. Seshu i N. Balabarian *Linear Network Analysis*. Wiley, New York 1959. Książka omawia inżynierskie zastosowania związków dyspersyjnych.
- S. Schweber *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Row Peterson, Evanston Ill. 1961. Patrz str. 411, gdzie dyskutowany jest problem przyczynowości i związków dyspersyjnych.
- E. C. Titchmarsh *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford University Press, New York 1937. Rozdział 5 omawia w sposób ścisły zagadnienie par transformat Hilberta.
- H. Weyl *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton University Press Princeton-New York 1949. Rozdział II poświęcony jest różnym systemom liczbowym.