# Mechanika kwantowa, lista zadań 4

1. Równanie Schröedingera dla **cząstki swobodnej** ma postać:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t).$$

Rozwiązać to równanie za pomocą transformaty Fouriera:

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\tilde{\psi}(\vec{p},t)d^3\vec{p}.$$

Przy takiej normalizacji transformata odwrotna jest dana przez:

$$\tilde{\psi}(\vec{p},t) = \int e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\psi(\vec{r},t)d^3\vec{r}.$$

Równanie Schrödingera dla $\tilde{\psi}(\vec{p},t)$ przyjmuje postać:

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(\vec{p},t)}{\partial t} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\tilde{\psi}(\vec{p},t)$$

czyli

$$\tilde{\psi}(\vec{p},t) = e^{-i\vec{p}^2 t/2m\hbar}\tilde{\psi}(\vec{p},0)\,.$$

Wtedy funkcja falowa w chwili $t$ daje się wyrazić przez wartość funkcji falowej w chwili $t=0$ jako:

$$\psi(\vec{r},t) = \int K(\vec{r}-\vec{r}\,';t)\psi(\vec{r}\,',0)d^3\vec{r}\,'\,,$$

gdzie *propagator* (propaguje funkcję od chwili $t=0$ do czasu $t$) jest dany wzorem:

$$K(\vec{r}-\vec{r}\,';t) = \left(\frac{m}{i\hbar t}\right)^{3/2} e^{im(\vec{r}-\vec{r}\,')^2/2\hbar t}\,.$$

Pokazać, że paczka gaussowska w chwili $t=0$ skoncentrowana w punkcie $\vec{a}$ o szerokości $\sigma$ ($N$ to czynniki normalizacyjny):

$$\psi(\vec{r},0) = Ne^{-(\vec{r}-\vec{a})^2/2\sigma^2}$$

"rozpływa" się w czasie:

$$\psi(\vec{r},t) = N\frac{1}{\sqrt{1+i\hbar t/m\sigma^2}}e^{-(\vec{r}-\vec{a})^2/(\sigma^2+i\hbar t/m)},$$

czyli mimo że nie działa na cząstkę (np. elektron) żadna siła, funkcja falowa ulega zmianie. Wskazówka: przyda się całka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\vec{r}^2/2+\vec{b}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{3/2} e^{\vec{b}^2/2a}$$

$$\frac{2\sqrt{2}e^{-\frac{mt\left(\mathrm{y1}^2+\mathrm{y2}^2+\mathrm{y3}^2\right)}{2ms^2+2iht^2}} h\pi^{3/2}s^2t}{\sqrt{-\frac{im}{ht}+\frac{t}{s^2}}\left(-ims^2+ht^2\right)}$$

2. Definiujemy operator **momentu pędu**

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \tag{1}$$

Sprawdzić związki komutacyjne:

$$[\hat{L}_x, x] = 0, \quad [\hat{L}_x, y] = i\hbar z \quad + \text{ permutacja cykliczna } \quad x, y, z \tag{2}$$

$$[\hat{L}_x, \hat{p}_x] = 0, \quad [\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar \hat{p}_z \quad + \text{ permutacja cykliczna } \quad x, y, z \tag{3}$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad + \text{ permutacja cykliczna } \quad x, y, z \tag{4}$$

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_x] = 0, \quad + \text{ permutacja cykliczna } \quad x, y, z \tag{5}$$

Wzór (4) czasem zapisuje się w postaci;

$$\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hbar \hat{\vec{L}} \tag{6}$$

Wskazówka: (4) i (5) najszybciej można otrzymać z (2) i (3) stosując tożsamość

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{7}$$