Mechanika kwantowa, lista zadań 2

1. Ciepło właściwe metali w niskich temperaturach.

2. Oscylator harmoniczny — metoda operatorowa (algebraiczna).

Na podstawie Byron F.W., Fuller R.W. Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej t.1, par.3.10

Hamiltonian ma postać:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Tutaj

$$p = -i\hbar\frac{d}{dx}, \qquad x = x$$

Pokazać, że

$$[p, x] = -i\hbar$$

Wprowadzamy operatory anihilacji i kreacji:

$$a \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(xm\omega + ip), \qquad a^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(xm\omega - ip)$$

Pokazać, że

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{\hbar\omega}{2}\right)$$
$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$
$$aa^\dagger = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H + \frac{\hbar\omega}{2}\right)$$
$$[a, a^\dagger] = 1$$
$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$$
$$[H, a] = -\hbar\omega a$$

Niech E_0 oznacza najmniejszą energię oscylatora (stan podstawowy), a ψ_0 stan własny: $H\psi_0 = E_0\psi_0$. Z powyższych reguł komutacji pokazać, że

$$Ha\psi_0 = (E_0 - \hbar\omega)\psi_0$$

czyli mamy $a\psi_0 = 0$. Dalej

$$a^\dagger a\psi_0 = \frac{1}{\hbar\omega}\left(H - \frac{\hbar\omega}{2}\right)\psi_0 = 0$$

czyli mamy $E_0 = \hbar\omega/2$. Następnie dostajemy

$$H(a^\dagger\psi_0) = (E_0 + \hbar\omega)a^\dagger\psi_0$$

zatem $E_0 + \hbar\omega$ jest wartością własną wektora własnego $a^\dagger\psi_0$. Pokazać indukcyjnie, że ogólnie:

$$H(a^\dagger)^n\psi_0 = (E_0 + n\hbar\omega)(a^\dagger)^n\psi_0$$

W ten sposób pokazaliśmy, że

$$E_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega, \qquad \psi_n = \Big(a^\dagger\Big)^n\psi_0 \equiv |n\rangle.$$

Wykorzystując równość $a\psi_0 = 0$ dostać jawną postać:

$$\psi_0(x) = N_0 e^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$

gdzie $N_0 = (m\omega/\hbar\pi)^{1/4}$ jest stałą normalizacyjną: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1$. Następnie mamy:

$$a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$$
$$a^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$$
$$a^\dagger a\psi_n = n\psi_n$$
$$\langle n|k\rangle = \delta_{kn}$$

Niech

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

Wyliczyć elementy macierzowe

$$\langle n|\xi|k\rangle = \sqrt{\frac{n}{2}}\delta_{n-1,k} + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\delta_{n+1,k}$$

$$\langle n|\xi^2|k\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{n(n-1)}\delta_{n-2,k} + \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\delta_{n,k} + \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{n+2,k}$$

$$\langle n|\xi^3|k\rangle = \sqrt{\frac{n(n-1)(n-2)}{8}}\delta_{n-3,k}+\sqrt{\frac{9}{8}n^3}\delta_{n-1,k}+\sqrt{\frac{9}{8}(n+1)^3}\delta_{n+1,k}+\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{8}}\delta_{n+3,k}$$

Elementy macierzowe ξ^2 oraz ξ^3 można wyliczyć na dwa sposoby.

Dla ochotników–trudne: Niech $m = \hbar = \omega = 1$, pokazać, że $(a^\dagger)^n\psi_0(x) = \psi_n(x)$, gdzie

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a $H_n(x)$ to wielomiany Hermite'a:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right).$$

Marek Wolf