Zawsze 47

Dr Marek WOLF

Drogi Czytelniku, pomyśl sobie dowolną liczbę naturalną, pomnóż ją przez 87 i dodaj 134 i na koniec weź resztę z dzielenia przez 261. Z otrzymanym wynikiem powtórz wcześniejsze operacje, tzn. pomnóż go przez 87, dodaj 134 i weź resztę z dzielenia przez 261. Jeśli się nie pomyliłeś, w wyniku powinieneś dostać liczbę 47. Opisane operacje arytmetyczne, wykonane dwukrotnie, przeprowadzają wszystkie liczby naturalne w liczbę 47. A oto wyjaśnienie tego zjawiska.

Oznaczając przez x_0 pomyślaną na początku liczbę, a przez x_1 rezultat pierwszej operacji, wykonane działania można zapisać w następujący sposób:

$$(87x_0+134) \bmod 261 = x_1,$$

$$(87x_1+134) \bmod 261 = 47.$$

Powyższe działania są szczególnym przypadkiem następującego procesu iteracyjnego:

$$x_{n+1} = (Ax_n+B) \bmod C, \tag{1}$$

gdzie A i B są liczbami naturalnymi mniejszymi od C.
Dla zadanego x_0 powyższe iteracje generują ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, którego elementami są liczby naturalne ze zbioru $\{0, 1, \ldots, C-1\}$.
Wprowadzając funkcję

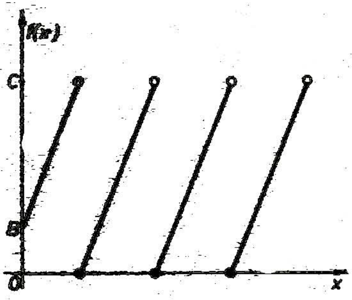
$$f(x) = (Ax+B) \bmod C \tag{2}$$

możemy równanie (1) przepisać w postaci $x_{n+1} = f(x_n)$.
Funkcja $f(x)$, określona dla liczb naturalnych wzorem (2), może być rozszerzona na całą oś rzeczywistą za pomocą wzoru

$$f(x) = Ax+B-C\,[(Ax+B)/C],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Wykres tej funkcji składa się z odcinków linii prostych nachylonych pod kątem, którego tangens wynosi A (rys. 1). Jak łatwo zauważyć, okres tej funkcji jest równy $T = C/A$.
Teraz n-ty element x_n możemy wyrazić przez element x_0 jako wynik następującej superpozycji

$$x_n = f\circ f\circ \ldots \circ f(x_0) = f^n(x_0). \tag{4}$$



Rys. 1

Posługując się indukcją matematyczną i korzystając z oczywistej relacji

$$(a+kc) \bmod c = a \bmod c, \quad k\in \mathbf{N},$$

można wyrazić n-krotne złożenie funkcji f za pomocą wzoru

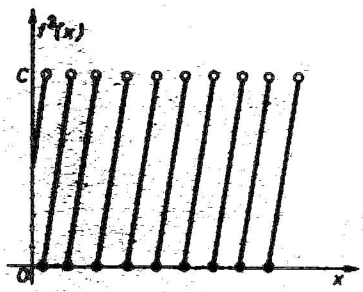
$$x_n = f^n(x_0) = \left(A^n x_0+\frac{A^n-1}{A-1}B\right) \bmod C. \tag{5}$$

Gdy A jest większe od 1, wtedy wykres kolejnych superpozycji funkcji f będzie się składać z coraz bardziej stromych odcinków (rys. 2). Okres n-tej superpozycji f^n jest równy

$$T^{(n)} = C/A^n, \tag{6}$$

czyli

$$f^n(x+T^{(n)}) = f^n(x).$$



Rys. 2

Gdy n rośnie, okresy funkcji f^n maleją. Gdy dla pewnego N zdarzy się, że odcinek jednostkowy będzie zawierać całkowitą wielokrotność odcinków długości $T^{(N)}$:

$$1 = KT^{(N)} = KC/A^N, \quad K\in \mathbf{N}, \tag{7}$$

wówczas

$$f^N(x+1) = f^N(x).$$

W szczególności, N-ta superpozycja funkcji f będzie przyjmować tę samą wartość dla wszystkich liczb naturalnych:

$$f^N(x)|_{\mathbf{N}} = x^* = \text{const.}$$

Warunek (7) oznacza, że istnieje taka liczba N, że N-ta potęga liczby A dzieli się bez reszty przez C:

$$A^N \equiv 0 \pmod C. \tag{8}$$

Ponieważ kolejne złożenie z funkcją f nie zmieni już wartości x^* (bo okres kolejnego złożenia funkcji f zmniejszy się A razy i odcinek jednostkowy będzie zawierać A razy więcej odcinków o długości C/A^{n+1}), więc liczba x^* jest punktem stałym odwzorowania f

$$f(x^*) = x^*.$$

Wartość tego punktu stałego możemy otrzymać ze wzoru (5) podstawiając szczególną wartość $x_0 = 0$:

$$x^* = \left(\frac{A^n-1}{A-1}B\right) \bmod C. \tag{9}$$

Podsumowując: gdy znajdziemy liczby A, C i N będące rozwiązaniem równania (8), wówczas N-ta iteracja określona przez (1) dowolnego naturalnego elementu początkowego x_0 będzie równa liczbie x^* danej przez równanie (9). W przykładzie podanym na początku mieliśmy $A = 87 = 3\cdot 29$, $C = 261 = 3^2\cdot 29$, tak więc równanie (8) jest spełnione dla $N = 2$, a z (9) otrzymujemy wtedy $x^* = ((87+1)\cdot 134) \bmod 261 = (11792) \bmod 261 = 47$. Oczywiście Czytelnik może znaleźć wiele innych rozwiązań równania (8), bardziej „złośliwych”, tzn. wymagających wykonania większej liczby iteracji równania (1) (np. dla $A = 94$, $C = 6016$ ilość iteracji N jest równa 7).

Rozwiązanie zadania F 236. Różnica czasu przechodzenia światła w obu rurach jest równa

$$\Delta t = l/v_1 - l/v_2,$$

gdzie $v_{1,2}$ – prędkości fazowe światła w wodzie o różnych kierunkach przepływu. Jeśli zaniedbamy efekt Dopplera, to wówczas:

$$v_{1,2} = \frac{c}{n} \pm u\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

a w konsekwencji

$$\Delta t = \frac{l}{\frac{c}{n}-u\cdot(1-1/n^2)} - \frac{l}{\frac{c}{n}+u\cdot(1-1/n^2)} \cong$$

$$\cong \frac{2lu}{c^2}(n^2-1).$$

Przesunięcie wyrażone przez odległość między prążkami jest równe

$$\Delta p = \frac{2\Delta t}{T} \cong \frac{2c\Delta t}{\lambda_0} = \frac{4lu}{c\lambda_0}(n^2-1) \approx 0{,}64.$$