Równania różniczkowe zwyczajne

Równania różniczkowe to równanie na funkcję $f(x)$ spełniającą zależność zawierającą tę funkcję i jej pochodne. Przykładem jest równanie oscylatora harmonicznego:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \tag{1}$$

którego rozwiązaniem jest $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Można to sprawdzić w pamięci. Najprostsze są równania I–rzędu (tzn. zawierające pierwszą pochodną funkcji) liniowe (tzn. szukana funkcja $y(x)$ i jej pochodne występują w pierwszej potędze):

$$\frac{dy(x)}{dx} + P(x)y(x) + Q(x) = 0. \tag{2}$$

Rozwiązanie:

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}\Big\{y_0 - \int_{x_0}^{x} Q(s)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{s} P(u)du}\, ds\Big\} \tag{3}$$

gdzie $y(x_0) = y_0$ to tzw. warunek początkowy. Sprawdzić, że (3) jest rozwiązaniem (2). Trzeba korzystać z podstawowego twierdzenia analizy oraz ze wzoru na pochodna iloczynu funkcji.

Ważne w zastosowaniach fizycznych są jednorodne (tzn. prawa strona jest 0) równania różniczkowe liniowe II rzędu o stałych współczynnikach p i q:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0. \tag{4}$$

Np. równanie oscylatora harmonicznego (1) albo obwodu elektrycznego RLC:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0. \tag{5}$$

Szukana jest zależność ładunku $Q(t)$ od czasu. Równanie (4) ma 2 rozwiązania liniowo niezależne $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Liniowa niezależność funkcji $y_1(x)$ i $y_2(x)$ oznacza, jak na algebrze dla wektorów, że nie istnieje stała C taka, że $y_2(x) = Cy_1(x)$, czyli iloraz $y_2(x)/y_1(x)$ nie jest stały, a więc pochodna tego ilorazu jest różna od zera:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x)}{(y_1(x))^2} \neq 0. \tag{6}$$

Licznik powyższego ułamka można zapisać jako wyznacznik

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{7}$$

Powyższy wyznacznik nazywa się wrońskianem od polskiego matematyka i filozofa **Józefa Hoene-Wrońskiego**. Zadanie 9 z listy 7 pokazuje, że funkcje mogą być liniowo niezależne, a mimo to ich wrońskian jest zero. Gdy kwadratowe równanie charakterystyczne dla (4):

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{8}$$

ma dwa różne pierwiastki r_1 i r_2 to rozwiązanie rozwiązanie (4) jest sumą dwóch funkcji liniowo niezależnych postaci

$$y(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}. \tag{9}$$

Istotnie $y_2(x)/y_1(x) = (B/A)\mathrm{e}^{(r_2-r_1)x} \neq 0$ dla $r_1 \neq r_2$. Powyższe równanie może mieć 2 różne pierwiastki zespolone wzajemnie sprzężone:

$$r_{1,2} = \alpha \pm \imath\beta. \tag{10}$$

Wtedy (4) ma 2 liniowo niezależne rozwiązania oscylujące:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\big), \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(A\cos(\beta x) - B\sin(\beta x)\big). \tag{11}$$

Gdy równanie charakterystyczne ma pierwiastek podwójny $r_1 = r_2 = r$ wtedy (4) ma rozwiązanie

$$y(x) = Ax\mathrm{e}^{rx} + B\mathrm{e}^{rx} \tag{12}$$

Tutaj 2 liniowo niezależne rozwiązania to $y_1(x) = Ax\mathrm{e}^{rx}$ oraz $y_2(x) = B\mathrm{e}^{rx}$. Stałe A i B w powyższych wzorach wyznacza się z dwóch warunków początkowych: $y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y'_0$, np. w mechanice klasycznej aby wyznaczyć ruch trzeba zadać początkowe położenie i prędkość.

Na następnej stronie są moje notatki do wykładu omawiające całkowanie za pomocą szeregów potęgowych; zadania 4 i 5 na 8 liście zadań.

Równania I rzędu nieliniowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y) \tag{13}$$

można rozwiązywać metodą kolejnych przybliżeń: mając przybliżenie $y^{(n)}(x)$ następne przybliżenie dostajemy ze wzoru:

$$y^{(n+1)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s; y^{(n)}(s)\; ds \tag{14}$$

gdzie jako przybliżenie zerowe bierze się warunek początkowy $y(x_0) = y_0$, zadanie 6 lista 8. W I tomie *Analizy* profesora Maurina jest to omawiane w rozdziale IX, np. zadanie $6c$ jest stronie 239.

Proszę postarać się zrobić zadanie z listy A_III_rezonans.pdf. Ciekawostka: poszukać atraktor i układ równań Lorenza, np. **tutaj**.

$\Rightarrow$ rozwiązanie szczególne $u(x) = -\frac{\cos kx}{k}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin kt\,dt + \frac{\sin kx}{k}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos kt\,dt =$

$= \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin k(x-t)\,dt$ zadanie: $u'(x) = \sin kx \int_{x_0}^{x} f(t)\sin kt\,dt + \cos kx \int_{x_0}^{x} f(t)\cos kt\,dt$

CAŁKOWANIE PRZY POMOCY SZEREGÓW POTĘGOWYCH: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ (Δ)

Niech $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$

$$(\Delta) \Rightarrow \sum_{k=2} k(k-1)\alpha_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{n=1} n\alpha_n x^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = 0$$

$\Rightarrow$

$x^0 \;|\; 2\cdot 1\,\alpha_2 + a_0\alpha_1 + b_0\alpha_0 = 0$ (a)

$x^1 \;|\; 3\cdot 2\cdot\alpha_3 + 2a_0\alpha_2 + a_1\alpha_1 + b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0 = 0$ (b)

$x^2 \;|\; 4\cdot 3\,\alpha_4 + 3a_0\alpha_3 + 2a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0 = 0$ (c)

Każde następne równanie zawiera o jeden szukany współczynnik α_n więcej od poprzedniego. α_0 i α_1 są dowolne i odgrywają rolę dowolnych stałych, więc z (a) mamy α_2, z (b) dostajemy α_3 itd. Wygodny wybór: A) $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ B) $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$

czyli $y_1|_{x_0=0} = 1$, $y_1'|_{x_0=0} = 0$ $\quad$ $y_2|_{x_0=0} = 0$, $y_2'|_{x_0=0} = 1$

gdy $y|_{x_0=0} = A$, $y'|_{x_0=0} = B$ wtedy $y = Ay_1 + By_2$

Tw. (Peano) (Malmin str. 260) o jednoznaczności: $I = [a,b]$, $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f jest ciągła na $I\times(x_0-r, x_0+r)$ to istnieje takie τ że zagadnienie początkowe $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ $x(t_0) = x_0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie $t_0 \in (a,b)$ na $(t_0-\tau, t_0+\tau)$

6