Uwagi o całkach

Oto podstawowe twierdzenie analizy: całka z pochodnej funkcji $f(x)$ po odcinku (a,b), którego brzeg to punkty a i b, to po prostu:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \tag{1}$$

Wprowadzamy operator nabla

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

Całka z gradientu funkcji $f(\vec{r})$ określonej na $\mathbb{R}^3$ po krzywej łączącej punkty A i B, które są jej "brzegiem":

$$\int\limits_{\widehat{AB}} \vec{\nabla} f(\vec{r})d\vec{r} = f(B) - f(A). \tag{3}$$

Jak wynika z postaci prawej strony (3), powyższa całka (dla dostatecznie porządnej funkcji $f(\vec{r})$) nie zależy od krzywej łączącej punkty A i B.

Twierdzenie Greena: Całka z rotacji pola wektorowego $\vec{F}(\vec{r})$ po powierzchni S jest równa krążeniu tego pola po krzywej K która jest brzegiem tej powierzchni S:

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_K \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \tag{4}$$

Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa: Całka z dywergencji pola wektorowego $\vec{F}(\vec{r})$ po objętości V, której brzegiem jest powierzchnia S:

$$\iiint\limits_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})dV = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{\sigma}. \tag{5}$$

"Fizyczne" dowody powyższych twierdzeń są w wysłanych wcześniej Wykładach Feynmana.

Proszę zauważyć regułę: po prawej stronie jest o jedną całkę mniej niż po lewej stronie powyższych równości. Z podstawowego twierdzenia analizy wynika, że różniczkowanie i całkowanie sa operacjami do siebie odwrotnymi. Dlatego po lewych stronach powyższych równości występujące różniczkowania "skracają" się z jedną całką i po prawych stronach jest o jedna całkę mniej.

Ze wzoru (3) widzimy, że jeżeli pole wektorowe $\vec{F}(\vec{r})$ jest gradientem jakiegoś potencjału $\phi(\vec{r})$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

to całka krzywoliniowa z tego pola wektorowego nie zależy od drogi. W fizyce pozwala to zdefiniować energię potencjalną. Na płaszczyźnie dla wektora $\vec{F}(\vec{r})$ o składowych $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ mamy:

$$P(x,y) = \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}$$

oraz

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Jeżeli $\phi(x, y)$ jest "porządną" funkcją to można zamienić kolejność różniczkowania, zatem mamy:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{6}$$

i otrzymujemy kryterium pozwalające stwierdzić, czy całka

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dz + Q(x,y)dy \tag{7}$$

nie zależy od drogi łączącej A i B:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{8}$$

Jest to warunek konieczny i wystarczający aby (7) nie zależała od drogi łączącej punkty A i B. Zadania 10, 11 z listy 4.

Na płaszczyźnie **twierdzenie Greena** (4) dla wektora $\vec{F}(\vec{r})$ o składowych $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ przyjmuje postać:

$$\oint_K \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy, \tag{9}$$

gdzie zamknięta krzywa K ogranicza obszar D. Powyższy wzór jest nazywany wzorem Greena i jest potrzebny do zadania 4 i 5 z listy 5.

Dobre przedstawienie tych zagadnień jest **tutaj**

Ważne są wzory na zamianę zmiennych w całkach wielokrotnych: zad.8 lista 5, na wykładzie liczyłem to samo na płaszczyźnie, teraz proszę to zrobić samodzielnie. Po przejściu od (x, y) do układu biegunowego (r, ϕ) łatwo liczy się całki z zadania 9 z listy 4, zadań 2, 3, 4 z listy 5. Zamiana zmiennych wraz z przykładami jest omawiana **tutaj**.

Marek Wolf