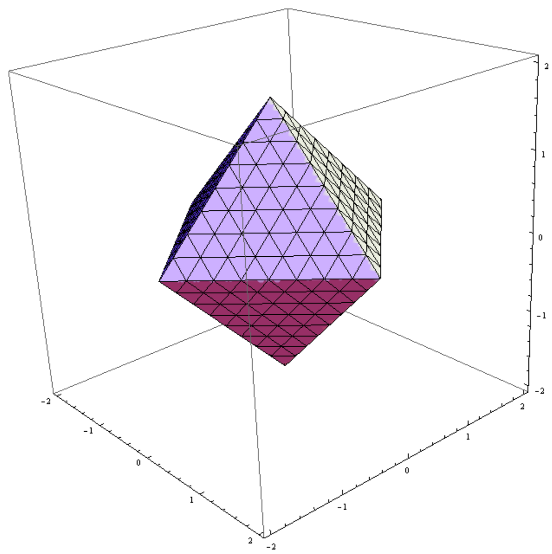
Analiza II   Lista dodatkowa

1. Poćwiczyć zapis $\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}$. Rozpisać jawnie np. $\sum_{k=1}^{4} a_{2k}b_{k3}$, $\sum_{k=1}^{3} k^2$.

2. Niech $X = (\mathbb{R}^2, d_i)$ będzie przestrzenią metryczną, gdzie d_i jest jedną z metryk z zad.3 z listy 1. Jak wyglądają kule otwarte o środku w $(0,0)$ w każdej z tych metryk? To samo dla $\mathbb{R}^3$. Odpowiedź dla metryki $d_2(x,y)$ jest poniżej na rys.1 (promień $r = 1.7$). Wyjaśnienie: Kula o środku w punkcie a i promieniu r w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z metryką $d(x,y)$ to zbiór punktów x spełniających nierówność $d(a,x) < r$.



Rysunek 1:

3. Sprawdzić, czy poniższe wzory zadają metryki w $\mathbb{R}$:

$$a)\ \ d(x,y) = |x-y|^3, \qquad b)\ \ d(x,y) = |x^2-y^2| + |x^5-y^5|, \qquad c)\ \ d(x,y) = e^{|x-y|} - 1$$

Wskazówka do c): czy punkty $x = 3, y = 2, z = 1$ spełniają nierówność trójkąta?

4. Pokazać, że definicja zbieżności ciągu $a_n = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^k)$ elementów z $(\mathbb{R}^k, d)$ podana na wykładzie: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) > 0$ takie, że $d(a_n, a) < \epsilon$ dla $n > N(\epsilon)$ jest równoważna zwykłej zbieżności ciągów współrzędnych $\lim_{n\to\infty} a_n^l = a^l$ dla każdego $l = 1, 2, \ldots, k$, gdzie $a = (a^1, a^2, \ldots, a^k)$.

5. Znaleźć w metryce taksówkowej granice ciągów $a_n = (x_n, y_n)$ zadanych wzorami:

$$a)\ \ x_n = 2^{\frac{1}{n}}, \quad y_n = 3^{-n^2}, \qquad b)\ \ x_n = \frac{5n^3-3}{7n^3+3}, \quad y_n = 2 - \frac{1}{n^2},$$

$$c)\ \ x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4(n+1)}\right), \quad y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4(n+1)}\right).$$

(a zatem, na mocy zadania 3 z listy 1 będą to również granice względem innych metryk).