

Analiza III

Lista 8:

1. Sprawdzić, że

$$\frac{d}{dx} \left(e^{(a+bi)x} \right) = (a+bi)e^{(a+bi)x}$$

2. Niech

$$u(x) = -\frac{\cos(kx)}{k} \int_{x_0}^x f(t) \sin(kt) dt + \frac{\sin(kx)}{k} \int_{x_0}^x f(t) \cos(kt) dt$$

pokazać, że

$$u'(x) = \sin(kx) \int_{x_0}^x f(t) \sin(kt) dt + \cos(kx) \int_{x_0}^x f(t) \cos(kt) dt$$

3. Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 4 \sin(2x).$$

$$\text{Odp. } y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{19} \cos(2x) + \frac{1}{19} \sin(2x)$$

4. Pokazać, że równanie Bessela

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

ma rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego (funkcja Bessela zerowego rzędu):

$$y(x) \equiv J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}$$

Gdzie zbieżny jest powyższy szereg?

5. Rozwiązać za pomocą szeregów potęgowych równanie:

$$y''(x) - xy(x) = 0.$$

Odp. dwa liniowo niezależne rozwiązania:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}$$

Zbadać zbieżność tych szeregów.

6. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać równania różniczkowe:

$$(a) \quad y''(x) - xy(x) = 0 \quad (y(0) = 1, y'|_{x=0} = 0)$$

$$(b) \quad y'(x) = y(x), \quad (y(0) = 1)$$

$$(c) \quad y'(x) = x + y(x), \quad (y(0) = 0)$$