Analiza III

Lista 7:

1. Pokazać, że
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\sin(nx+\alpha_n)$$
gdzie $\rho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ oraz $\alpha_n=\arcsin(a_n/\rho_n)$.

2. Sprawdzić, że $y(x)=\arctan(x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'=y^2+1$.

3. Sprawdzić, że $y(x)=-1/x$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'=y^2$.

4. Sprawdzić, że $y(x)=1/(1+e^x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'=y^2-y$.

5. Sprawdzić, że $y(x)=e^{x^2}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'=2xy$. Otrzymać to rozwiązanie *a*) metodą rozdzielania zmiennych, *b*) szukając $y(x)$ w postaci szeregu potęgowego: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

6. Prąd zmienny o natężeniu $I(t)$ płynący w obwodzie zawierającym opór R i indukcyjność L z przyłożonym napięciem $V(t)$ opisany jest równaniem
$$RI(t)+L\frac{dI}{dt}=V(t).$$
Rozwiązać to równanie dla *a*) stałego napięcia $V(t)=const$, *b*) napięcia zmiennego $V(t)=A\sin(\omega t)$.

7. Niech $I_1>I_2>I_3$ będą głównymi momentami bezwładności bąka i niech $\overrightarrow{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ będzie wektorem prędkości kątowej. Ruch takiego bąka opisany jest równaniami Eulera:
$$I_1\frac{d\omega_1}{dt}=(I_2-I_3)\omega_2\omega_3,$$
$$I_2\frac{d\omega_2}{dt}=(I_3-I_1)\omega_1\omega_3,$$
$$I_3\frac{d\omega_3}{dt}=(I_1-I_2)\omega_1\omega_2.$$
Pokazać, że całkami pierwszymi ruchu są wielkości:
$$C_1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}I_k\omega_k^2 \qquad \text{(energia)}$$
$$C_2=\sum_{k=1}^{3}I_k^2\omega_k^2 \qquad \text{(kwadrat momentu pędu)}$$

8. Zapoznać się z biografią Hoene–Wrońskiego.

9. Wyliczyć wrońskian dla funkcji
$$a)\qquad y_1(x)=x^2\ ,\ y_2(x)=\frac{1}{x},$$
$$b)\qquad y_1(x)=\begin{cases}x^2 & \text{dla } x<0\\ 0 & \text{dla } x\geqslant 0\end{cases}$$
$$y_2(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ x^2 & \text{dla } x\geqslant 0\end{cases}.$$