Analiza II

Lista 8:

1. Sprawdzić, że
$$\frac{d}{dx}\left(e^{(a+bi)x}\right) = (a+bi)e^{(a+bi)x}$$

2. Niech
$$u(x) = -\frac{\cos(kx)}{k}\int_{x_0}^{x} f(t))\sin(kt)dt + \frac{\sin(kx)}{k}\int_{x_0}^{x} f(t)\cos(kt)dt$$
pokazać, że
$$u'(x) = \sin(kx)\int_{x_0}^{x} f(t))\sin(kt)dt + \cos(kx)\int_{x_0}^{x} f(t)\cos(kt)dt$$

3. Rozwiązać równanie różniczkowe:
$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 4\sin(2x).$$
Odp. $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{5}{19}\cos(2x) + \frac{1}{19}\sin(2x)$

4. Pokazać, że równanie Bessela
$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$
ma rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego (funkcja Bessela zerowego rzędu):
$$y(x) \equiv J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(n!)^2\cdot 2^{2n}}$$
Gdzie zbieżny jest powyższy szereg?

5. Rozwiązać za pomocą szeregów potęgowych równanie:
$$y''(x) - xy(x) = 0.$$
Odp. dwa liniowo niezależne rozwiązania:
$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{(3n)!}x^{3n}$$
$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{(3n+1)!}x^{3n+1}$$
Zbadać zbieżność tych szeregów.

6. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać równania różniczkowe:
$$(a)\qquad y''(x) - xy(x) = 0 \qquad (y(0) = 1, y'|_{x=0} = 0)$$
$$(b)\qquad y'(x) = y(x), \qquad (y(0) = 1)$$
$$(c)\qquad y'(x) = x + y(x), \qquad (y(0) = 0)$$