# Analiza III, Lista 5

1. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D (x+y)dxdy,$$
gdzie $D$ jest obszarem ograniczonym przez prostą $y = x$ oraz parabolę $y^2 = x$.

2. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2},$$
gdzie $D$ jest obszarem ograniczonym okręgami $x^2+y^2 = 1$ oraz $x^2+y^2 = 4$.

3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyzną $z = 0$, walcem $x^2+y^2 = a^2$ oraz stożkiem $x^2+y^2 = z^2$.

4. Korzystając ze wzoru Greena wyliczyć całkę krzywoliniową
$$\oint_L -x^2ydx + xy^2dy,$$
gdzie $L$ jest okręgiem $x^2+y^2 = a^2$ z obiegiem dodatnim.

5. Korzystając ze wzoru Greena wyliczyć całkę krzywoliniową po zamknietym konturze
$$\oint_L x^2ydx + y^3dy,$$
gdzie $L$ jest odcinkiem prostej $y = x$ od $A = (0,0)$ do $B = (1,1)$ oraz fragmentem krzywej $y^3 = x^2$
od $B$ do $A$.

6. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+1)(y+1)(z+1)},$$
gdzie $D$ jest obszarem ograniczonym powierzchniami $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = 3$.

7. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint_D y\cos(x+z)dxdydz,$$
gdzie $D$ jest obszarem ograniczonym walcem parabolicznym $y = \sqrt{x}$ oraz płaszczyznami $y = 0, z = 0, x+z = \pi/2$ .

8. Wyliczyć jakobian przejścia od układu współrzędnych kartezjańskich $xyz$ do układu sferycznego $r, \theta, \phi$.

9. Obliczyć masę ostrosłupa utworzonego przez płaszczyzny $x+y+z = a, x = 0, y = 0, z = 0$, jeżeli gęstość w każdym punkcie jest równa współrzędnej $z$ tego punktu. Wyznaczyć środek ciężkości tej bryły.

10. Wyliczyć moment bezwładności względem osi $z$ bryły ograniczonej powierzchniami $x = 0, y = 0, x+z = a$ przyjmując, że gęstość jest stała $\rho = 1$.

11. Sprawdzić, że $y(x) = \tan(x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y' = y^2 + 1$.

12. Sprawdzić, że $y(x) = -1/x$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y' = y^2$.

13. Sprawdzić, że $y(x) = 1/(1 + e^x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y' = y^2 - y$.

14. Sprawdzić, że $y(x) = c_1 e^x + c_2(1 + x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'' - (1 + 1/x)y' + y/x = 0$.

15. Sprawdzić, że $y(x) = e^{x^2}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y' = 2xy$. Otrzymać to rozwiązanie *a*) metodą rozdzielania zmiennych, *b*) szukając $y(x)$ w postaci szeregu potęgowego: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

16. Metodą uzmienniania stałych rozwiązać równanie $y'' - 3y' + 2y = e^{4x}$. Odp. $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{6} e^{4x}$

17. Prąd zmienny o natężeniu $I(t)$ płynący w obwodzie zawierającym opór $R$ i indukcyjność $L$ z przyłożonym napięciem $V(t)$ opisany jest równaniem

$$RI(t) + L\frac{dI}{dt} = V(t).$$

Rozwiązać to równanie dla *a*) stałego napięcia $V(t) = const$, *b*) napięcia zmiennego $V(t) = A\sin(\omega t)$.

18. Niech $I_1 > I_2 > I_3$ będą głównymi momentami bezwładności bąka i niech $\overrightarrow{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ będzie wektorem prędkości kątowej. Ruch takiego bąka opisany jest równaniami Eulera:

$$I_1\frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3,$$

$$I_2\frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3,$$

$$I_3\frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2.$$

Pokazać, że całkami pierwszymi ruchu są wielkości:

$$C_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} I_k\omega_k^2 \qquad \text{(energia)}$$

$$C_2 = \sum_{k=1}^{3} I_k^2\omega_k^2 \qquad \text{(kwadrat momentu pędu)}$$

19. Zapoznać się z biografią Hoene–Wrońskiego, np. tutaj http://pl.wikipedia.org/wiki/Józef Hoene-Wroński lub artykuł prof. P. Pragacza w *Wiadomości Matematyczne*, vol. XLIII, str. 67 (2007).

20. Wyliczyć wrońskian dla funkcji

$$a) \qquad y_1(x) = x^2 \ , \ y_2(x) = \frac{1}{x},$$

$$b) \qquad y_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Punkt $b$) pokazuje, że mogą istnieć funkcje liniowo niezależne o zerowym wrońskianie.

21. Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 4\sin(2x).$$

Odp. $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{13}\cos(2x) + \frac{1}{13}\sin(2x)$

22. Metodą kolejnych przybliżeń rozwiązać równania różniczkowe:

$$(a) \qquad y''(x) - xy(x) = 0 \qquad (y(0) = 1, y'|_{x=0} = 0)$$

$$(b) \qquad y'(x) = y(x), \qquad (y(0) = 1)$$

$$(c) \qquad y'(x) = x + y(x), \qquad (y(0) = 0)$$