Analiza III, Lista 4

1. Rozwinąć w szereg Taylora wokół $(0,0)$ do członów kwadratowych funkcje

$$f(x,y) = e^{x+2y} \quad (= 1 + x + 2y + \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + 2xy + \ldots),$$

$$f(x,y) = e^x \log(1+y) \quad (= y + xy - \frac{y^2}{2} + \cdots) \qquad (\text{dla } \ |y| < 1).$$

2. Wyliczyć całkę krzywoliniową pierwszego rodzaju $\int_K xydl$, gdzie K jest pierwszą ćwiartką elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ używając równań parametrycznych krzywej K.

3. Wyliczyć całkę krzywoliniową pierwszego rodzaju $\int_L xydl$, gdzie L jest obwodem prostokąta wyznaczonego przez proste: $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$.

4. Obliczyć całkę krzywoliniową pierwszego rodzaju $\int_L \sqrt{2y}dl$, gdzie L jest łukiem cykloidy $x = a(t - \sin(t)), \ \ y = a(1 - \cos(t)), \quad a > 0, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

5. Obliczyć całki krzywoliniowe pierwszego rodzaju

$$\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl, \qquad\qquad \int_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$$

gdzie L jest pierwszym skrętem linii śrubowej $x = a\cos(t), \ \ y = a\sin(t), \ \ z = at, \quad a > 0, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

6. Obliczyć całkę krzywoliniową drugiego rodzaju $\int_L 2xydx + x^2dy$, gdzie L jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $O = (0,0)$ do $A = (1,1)$.

7. Obliczyć całkę krzywoliniową drugiego rodzaju $\int_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$, gdzie L jest obwodem trójkąta ABC o wierzchołkach: $A = (1,1), B = (2,1), C = (2,2)$.

8. Wyliczyć całkę krzywoliniową drugiego rodzaju $\int_L ydx - xdy$, gdzie L jest dodatnio skierowanym obwodem elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Wskazówka: użyć równań parametrycznych krzywej elipsy.

9. Obliczyć całkę krzywoliniową drugiego rodzaju

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$$

gdzie L jest dodatnio skierowanym okręgiem o promieniu a.

10. Obliczyć całkę krzywoliniową drugiego rodzaju

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} yxe^x dx + (x-1)e^x dy$$

po dowolnej krzywej łączącej $A = (0,2)$ z $B = (1,2)$.

11. Obliczyć całkę krzywoliniową drugiego rodzaju

$$\int_{\overset{\frown}{MN}} 2y\sin(2x)dx - \cos(2x)dy$$

po dowolnej krzywej łączącej $M = (\pi/4, \ 2)$ z $N = (\pi/6, \ 1)$.

12. Niech $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ będzie prędkością ciała poruszającego się po okręgu o promieniu $\mathbf{r}$ z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$. Pokazać, że $rot\, \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Fakt ten wyjaśnia znaczenie słowa rotacja=wirowość.

13. Pokazać tożsamości:

$$rot\,(grad\, f(x,y,z)) = \nabla\times(\nabla f(x,y,z)) = 0, \qquad div(rot(\mathbf{F}(x,y,z))) = \nabla\cdot(\nabla\times(\mathbf{F}(x,y,z))) = 0$$

14. Sprawdzić (w ostatnich równościach $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ jest operatorem Laplace'a):

$$div(f\mathbf{F}) = f div\, \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot grad\, f, \qquad div(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot rot\, \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot rot\, \mathbf{G}$$

$$rot(f\mathbf{F}) = f\ rot\, \mathbf{F} + grad\, f \times \mathbf{F}, \qquad rot\, rot\, \mathbf{F} = grad\, div\, \mathbf{F} - \Delta\mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = g\, gradh,\ \text{wtedy}\ div \cdot \mathbf{F} = g\,\Delta h + (grad\, u) \cdot (grad\, h).$$

15. Zapoznać się z równaniami Maxwella w postaci różniczkowej i całkowej. Korzystając z powyższych tożsamości pokazać, że 2 spośród 4 równań Maxwella można rozwiązać wprowadzając potencjał skalarny ϕ oraz potencjał wektorowy $\mathbf{A}$: $\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - grad\, \phi, \quad \mathbf{B} = rot\, \mathbf{A}$.