Analiza III, Lista 3

1. Wyliczyć pochodne cząstkowe względem x, y, z funkcji $f(x, y, z) = x^{(y^z)}$.
   Dlaczego nawiasy są ważne? Czy $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$?

2. Równanie stanu Clapeyrona $pV = RT$ wiąże ciśnienie p, objętość V i temperaturę T. Traktując p, V jako zmienne niezależne wyliczyć $\partial T/\partial p$ oraz $\partial T/\partial V$. Z kolei traktując p, T jako zmienne niezależne wyliczyć $\partial V/\partial p$ oraz $\partial V/\partial T$. Następnie traktując T, V jako zmienne niezależne wyliczyć $\partial p/\partial T$ oraz $\partial p/\partial V$. Otrzymać równanie:
$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1$$

3. Równanie stanu van der Waalsa ma postać:
$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$
   Powtórzyć powyższe rachunki z zad.3 dla tego równania.

4. Niech
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{dla } \ x, y \neq 0, \\ 0, \ \ \text{dla } \ x, y = 0 \end{cases}$$
   Wyliczyć
$$\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad \left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}\right|_{x=0, y=0}, \quad \left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right|_{x=0, y=0}$$

5. Obliczyć na dwa sposoby $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ oraz $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ jeżeli $\quad z = \dfrac{x^2}{y}$, gdzie $x = u - 2v$, $y = v + 2u$.

6. Poziomicą funkcji $f : U \to \mathbb{R}, (U \subseteq \mathbb{R}^n)$ nazywamy zbiór $f^{-1}(c) := \{x \in U : f(x) = c\}$. Niech $\mathbb{R} \ni t \to x(t)$ będzie krzywą różniczkowalną na poziomicy $f^{-1}(c)$, wektor pochodnej $x'(t)$ nazywamy *wektorem stycznym* do danej krzywej:
$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad .$$
   Pokazać, że gradient $\nabla f(x) \equiv [\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}]$ jest prostopadły do poziomicy:
$$\nabla f(x)|_{x=x(t)} \cdot f'(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]_{x=x(t)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{bmatrix} = 0.$$
   Przykład: $U(x, y, z, t)$ potencjał, a $\overrightarrow{E} = -\nabla U$ natężenie pola elektrycznego. Wskazówka: K. Maurin, *Analiza*, t.I, str. 153-154.

7. Ruch w mechanice klasycznej można opisywać za pomocą równań Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x_k}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_k} = 0, \qquad L(x, \dot{x}, t) = T - U \ ,$$

oraz równań Hamiltona

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial x_k} \\ \\ \dot{x}_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \end{cases}, \quad H(x, p, t) = T + U$$

gdzie T jest energią kinetyczną, U oznacza energię potencjalną. Otrzymać jawne równania ruchu dla następujących lagranżianów L i hamiltonianów H:

$$a) \qquad L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \qquad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2},$$

$$b) \qquad L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x), \qquad H = \frac{p^2}{2m} + U(x),$$

8. Niech $\phi(x, y, x) = 0, \psi(x, y, z) = 0$, pokazać, że rozwikłane z' otrzymuje się z układu równań:

$$\phi'_x(x, y, z) + \phi'_y(x, y, z)y' + \phi'_z(x, y, z)z' = 0$$

$$\psi'_x(x, y, z) + \psi'_y(x, y, z)y' + \psi'_z(x, y, z)z' = 0$$

9. Zbadać ekstrema funkcji:

$$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2),$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 54,$$

$$f(x, y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y},$$

$$f(x, y) = 3 \ln\left(\frac{x}{6}\right) + 2\ln(x) + \ln(12 - x - y).$$

Wskazówka: K. Maurin, *Analiza*, t.I, str. 197.