Analiza III, Lista 2

1. Pokazać, że funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{dla} \quad x, y \neq 0, \\ 0, \quad \text{dla} \quad x, y = 0 \end{cases}$$
jest ciągła w zerze $(0,0)$.

2. Niech $f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1^3 + 2x_2,\ 3x_2^2 + 5x_3^3)$ odwzorowuje $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$. Wyznaczyć z definicji mocną pochodną $f(x_1, x_2, x_3)$ i porównać z macierzą Jacobiego tego odwzorowania.

3. Funkcje $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ są dane wzorami:
$$g(x,y) = (x^2+1, y^2), \qquad f(u,v) = (u+v, u, v^2).$$
Wyliczyć, że złożenie $h = f \circ g$ dane jest wzorem: $h(x,y) = (x^2+y^2+1, x^2+1, y^4)$. Znaleźć macierze pochodnych mocnych f', g', h' i sprawdzić na tym przykładzie twierdzenie o różniczkowaniu funkcji złożonej.

4. Obliczyć pochodną kierunkową w punkcie $(0,0)$ funkcji:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^2}, & \text{dla} \quad x, y \neq 0, \\ 0, \quad \text{dla} \quad x, y = 0 \end{cases}$$
Czy ta funkcja ma pochodną mocną w punkcie $(0,0)$?

5. Wyliczyć pochodne cząstkowe względem x, y funkcji:
$$a)\ \ z = x^2 + y + \frac{2x}{y} \qquad b)\ \ z = y\cos(x+y), \qquad c)\ \ z = y^x,$$

6. Wyliczyć pochodne cząstkowe względem x, y, z funkcji:
$$a)\ \ w = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad b)\ \ w = \sin(xyz), \qquad c)\ \ w = \left(\frac{y}{x}\right)^z$$

7. Sprawdzić, że funkcja $w = x + \frac{x-y}{y-z}$ spełnia równanie:
$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1$$

8. Na dwa sposoby wyliczyć pochodną względem t funkcji złożonej:
$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{gdzie} \quad x(t) = \sin(t), \ \ y(t) = \cos(t)$$

9. Równanie ruchu jednowymiarowego oscylatora harmonicznego ma postać
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t).$$
Sprawdzić, że energia całkowita
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2(t) \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2(t)$$
jest zachowana w czasie, tzn. pochodna zupełna po czasie “na rozwiązaniach równania ruchu” jest zero. Wskazówka: potraktować E jako funkcję złożoną czasu zależącą od dwóch funkcji $x(t)$ i $u \equiv \dot{x}(t)$: $E(x,u)$, gdzie z kolei od czasu zależą funkcje $x(t)$ oraz $u(t)$.

10. Ruch $\overrightarrow{r(t)}$ punktowej masy m w polu grawitacyjnym dużej masy M znajdującej się w środku układu współrzędnych opisany jest w trzech wymiarach równaniem ruchu:

$$m\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\frac{GMm\overrightarrow{r}}{r^3},$$

gdzie $r = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pokazać, że energia

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

jest zachowana w czasie, tzn. pochodna zupełna po czasie energii "na rozwiązaniach równania ruchu" jest zero. Wskazówka: przyda się zad. $6a$.

11. Wyliczyć pochodną względem x funkcji $w = xe^{y(x)}$.

12. Wyliczyć pochodne cząstkowe względem r, ϕ funkcji złożonej $w = F(x, y)$, gdzie $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi)$.

13. Wyznaczyć pochodne cząstkowe względem u, v funkcji złożonej $w = f(x, y)$, gdzie $x = \sqrt{uv}, y = u + v$.

14. Wyznaczyć pochodną funkcji uwikłanej $y(x)$ zadanej równaniem

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0.$$

15. Wyliczyć pochodne mieszane względem x, y funkcji z zadania 5. Czy pochodne mieszane są równe?

16. Na dwa sposoby wyliczyć pochodną względem t funkcji złożonej:

$$z = 2x^2 + 3xy + 4y^2, \quad \text{gdzie} \quad x(t) = t^2, \ \ y(t) = t$$

17. Sprawdzić, że drugą pochodną względem x funkcji uwikłanej $y(x)$ zadanej równaniem $F(x, y) = 0$ można obliczyć ze wzoru:

$$F'_y(x, y)y'' + F''_{xx}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y)y' + F''_{yy}(x, y)(y')^2 = 0$$

18. Udowodnić nierówność Cauchy'ego-Schwarza:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$