Analiza III, Lista 1

1. Znaleźć dziedziny funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$a) \quad f(x,y) = \sqrt{2x} + y,$$
$$b) \quad f(x,y) = \sqrt{2-x^2} + \sqrt{y^2-5},$$
$$c) \quad f(x,y) = \sqrt{2x^2+2y^2-8} + \sqrt{25-x^2-y^2},$$
$$d) \quad f(x,y) = \ln(x\ln(y-x)).$$

2. Naszkicować wykresy funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$a) \quad f(x,y) = 2x+5y+3$$
$$b) \quad f(x,y) = 6(x^2+y^2)$$
$$c) \quad f(x,y) = \sqrt{20-(x^2+y^2)}$$
$$d) \quad f(x,y) = 5\sqrt{x^2+y^2}$$
$$e) \quad f(x,y) = x^2-y^2$$

3. Dla metryk zadanych w $\mathbb{R}^n$ wzorami: $d_1(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$, $d_2(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $d_3(x,y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i-y_i|$ pokazać, że

$$d_3(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant nd_3(x,y),$$
$$d_3(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant nd_3(x,y),$$
$$\frac{1}{n} d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y)$$

4. Obliczyć granice funkcji:

$$a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \sin\frac{2\pi}{x^2+y^2}$$
$$b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x+y-x^2-y^2}{x+y} \quad (x+y\neq 0),$$
$$c) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}+y}{x^2+y^2},$$
$$d) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2},$$
$$e) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

W ostatnim przypadku rozważyć przechodzenie do $(0,0)$ wzdłuż prostej nachylonej względem osi x-ów pod kątem α: $y = \mathrm{tg}(\alpha)x$.

5. Niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{dla} \ \ x,y\neq 0, \\ 0, \ \ \text{dla} \ \ x,y=0 \end{cases}$$

Wyliczyć

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}\right|_{x=0,y=0}, \quad \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{x=0,y=0}$$